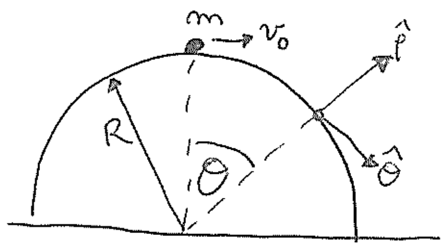
Auxiliar 3

P1 |



¿Ángulo en que se despega?

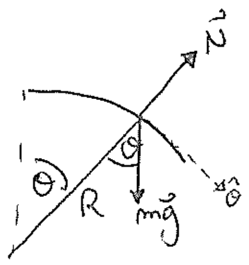
Sol: Utilizando cilíndricas:

$$\vec v = \dot\rho\hat\rho + \rho\dot\theta\hat\theta$$

pero $\rho = R \Rightarrow \dot\rho = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec v = R\dot\theta\hat\theta$

Inicialmente: $v_0 = R\dot\theta_0 \Rightarrow \dot\theta_0 = \frac{v_0}{R}$

DCL:



$$\Rightarrow \begin{array}{l} \hat\rho: \; ma_\rho = m(\underbrace{\cancel{\ddot\rho}}_{0} - \overbrace{\rho}^{R}\dot\theta^2) = N - mg\cos\theta \\ \hat\theta: \; ma_\theta = m(2\cancel{\dot\rho}\dot\theta + \underbrace{\rho}_{R}\ddot\theta) = mg\,\text{sen}\,\theta \end{array}$$

$$\Rightarrow -mR\dot\theta^2 = N - mg\cos\theta \qquad (1)$$

$$mR\ddot\theta = mg\,\text{sen}\,\theta \qquad (2)$$

Buscamos θ^* tal que $N = 0$:

$$(1) \rightarrow \cancel{-m}g\cos\theta^* = \cancel{-m}R\dot\theta^{*2} \quad \hookrightarrow \dot\theta(\theta=\theta^*) \quad \rightarrow \quad \dot\theta^{*2} = \frac{g}{R}\cos\theta^* \qquad (3)$$

pero no conocemos $\dot\theta(\theta)$:

$$(2) \rightarrow \ddot\theta = \frac{g}{R}\,\text{sen}\,\theta$$

$$\frac{d\dot\theta}{dt} = \frac{d\dot\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot\theta\frac{d\dot\theta}{d\theta} = \frac{g}{R}\,\text{sen}\,\theta$$

resolviendo:

$$\int_{\dot\theta_0 = \frac{v_0}{R}}^{\dot\theta} \dot\theta\, d\dot\theta = \frac{g}{R}\int_0^\theta \text{sen}\,\theta\, d\theta \rightarrow \frac{\dot\theta^2}{2} - \frac{\dot\theta_0^2}{2} = -\frac{g}{R}\cos\theta\Big|_0^\theta = \frac{g}{R}(1-\cos\theta)$$

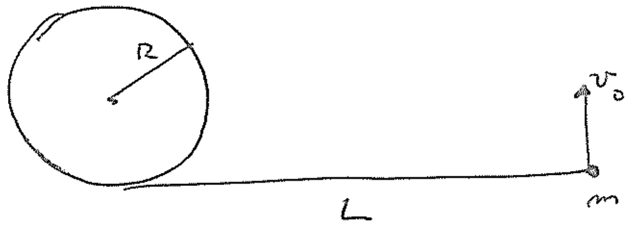
$$\Rightarrow \dot\theta^2 = \frac{v_0^2}{R^2} + \frac{2g}{R}(1-\cos\theta)$$

Finalmente remplazamos en (3):

$$\frac{v_0^2}{R^2} + \frac{2g}{R}(1-\cos\theta^*) = \frac{g}{R}\cos\theta^*$$

$$\frac{3g}{\cancel{R}}\cos\theta^* = \frac{v_0^2}{R^{\cancel{2}}} + \frac{2g}{\cancel{R}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta^* = \arccos\left(\frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3gR}\right)}$$

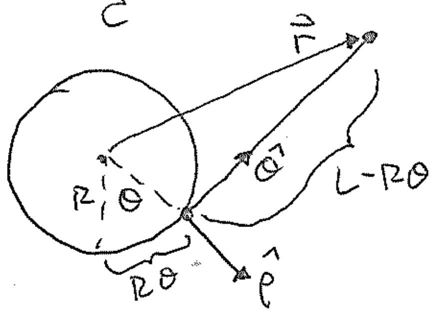
P2



a) Tensión cuerda en función del tiempo

b) Tiempo que tarda la cuerda en enrollarse

Sol: a) ¿Qué coordenadas usamos, y donde?



Usamos cilíndricos pero para el punto donde se despega la cuerda.

La posición de la masa m:

$$\vec r = R\hat\rho + (L-R\theta)\hat\theta$$

La velocidad:

$$\vec v = \frac{d\vec r}{dt} = R\frac{d\hat\rho}{dt} - R\dot\theta\,\hat\theta + (L-R\theta)\frac{d\hat\theta}{dt} = \cancel{R\dot\theta\hat\theta} - \cancel{R\dot\theta\hat\theta} + (L-R\theta)\dot\theta(-\hat\rho)$$

$$\frac{d\hat\rho}{dt} = \dot\theta\hat\theta$$

$$\frac{d\hat\theta}{dt} = \dot\theta(-\hat\rho)$$

$$\Rightarrow \vec v = -(L-R\theta)\dot\theta\,\hat\rho$$

Inicialmente:

$$-v_0 = -L\dot\theta_0$$

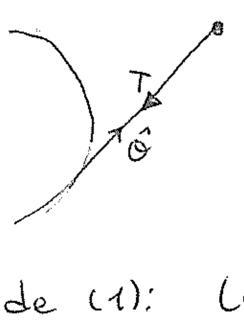
$$\Rightarrow \dot\theta_0 = +\frac{v_0}{L}$$

La aceleración:

$$\vec a = \frac{d\vec v}{dt} = -(L-R\theta)\dot\theta\underbrace{\frac{d\hat\rho}{dt}}_{\dot\theta\hat\theta} - (L-R\theta)\ddot\theta\,\hat\rho + R\dot\theta^2\hat\rho$$

$$\Rightarrow \vec a = (R\dot\theta^2 - (L-R\theta)\ddot\theta)\hat\rho - (L-R\theta)\dot\theta^2\hat\theta$$

Ahora podemos hacer el DCL:



$\hat\rho$: $ma_\rho = 0 \Rightarrow R\dot\theta^2 = (L-R\theta)\ddot\theta$ (1)

$\hat\theta$: $ma_\theta = -T \Rightarrow m(L-R\theta)\dot\theta^2 = T$ (2)

de (1): $(L-R\theta)\ddot\theta = (L-R\theta)\cancel{\dot\theta}\frac{d\dot\theta}{d\theta} = R\dot\theta^2$

$$\int_{v_0/L}^{\dot\theta}\frac{d\dot\theta}{\dot\theta} = \int_0^{\theta}\frac{R}{L-R\theta}\,d\theta \to \ln\left(\frac{\dot\theta}{v_0/L}\right) = -\ln(L-R\theta)\Big|_0^{\theta} = \ln\left(\frac{L}{L-R\theta}\right)$$

aplicando la exponencial: $\dot\theta = \frac{v_0}{L-R\theta} = \frac{d\theta}{dt}$

seguimos integrando:

$$\int_0^{\theta} (L-R\theta)\,d\theta = v_0 \int_0^t dt$$

$$L\theta - \frac{R}{2}\theta^2 = v_0 t$$

$$-\frac{1}{2R}\underbrace{(R^2\theta^2 - 2R\theta L + L^2)}_{(L-R\theta)^2} + \frac{L^2}{2R} = v_0 t$$

$$(L-R\theta)^2 = L^2 - 2Rv_0 t \quad \rightarrow \quad L - R\theta = \sqrt{L^2 - 2Rv_0 t} \qquad (3)$$

Finalmente usamos (2):

$$T = m(L-R\theta)\underbrace{\dot{\theta}^2}_{\frac{v_0^2}{(L-R\theta)^2}} = \frac{mv_0^2}{(L-R\theta)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T(t) = \frac{mv_0^2}{\sqrt{L^2 - 2Rv_0 t}}}$$

b) El tiempo que tarda en enrollarse esta dado por:

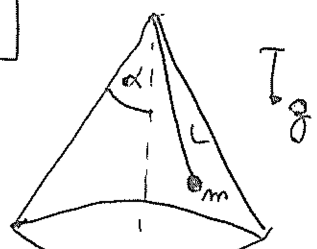
$$R\theta(t^*) = L$$

usamos (3): $\cancel{L} - \sqrt{L^2 - 2Rv_0 t^*} = \cancel{L}$

$$L^2 - 2Rv_0 t^* = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{t^* = \frac{L^2}{2Rv_0}}$$

P3



m describe una circunferencia con velocidad angular ω_0 cte.

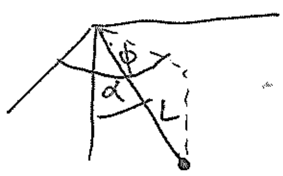
a) Encuentre T y N

b) Encuentre ω t.q. $N=0$

¿Periodo rotación?

¿Qué pasa para ω mayores?

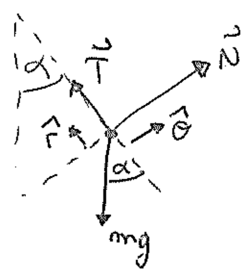
Sol: a) En esféricas:



$$\theta=\alpha \Rightarrow \dot\theta=\ddot\theta=0$$
$$r=L \Rightarrow \dot r=\ddot r=0$$
$$\dot\phi=\omega_0 \Rightarrow \ddot\phi=0$$

$$\vec a=-L\dot\phi^2 \operatorname{sen}^2\alpha\,\hat r-L\dot\phi^2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\,\hat\theta$$

DCL:



$$\hat r): \; -mL\omega_0^2\operatorname{sen}^2\alpha=-T+mg\cos\alpha$$
$$\hat\theta): \; -mL\omega_0^2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha=N-mg\operatorname{sen}\alpha$$

se obtiene:
$$T=m(L\omega_0^2\operatorname{sen}^2\alpha+g\cos\alpha)$$
$$N=m(g\operatorname{sen}\alpha-L\omega_0^2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha)$$

b) Para que $N=0$:
$$g\cancel{\operatorname{sen}\alpha}=L\omega^2\cancel{\operatorname{sen}\alpha}\cos\alpha$$
$$\Rightarrow \boxed{\omega=\sqrt{\frac{g}{L\cos\alpha}}}$$

Periodo de rotación:
$$T=\frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \boxed{T=2\pi\sqrt{\frac{L\cos\alpha}{g}}}$$