Auxiliar 9

P1| A resorte afectado por roce viscoso ($F_R = -\gamma v$) se le inyecta potencia de forma que no sienta el roce.

a) Comprobar que tasa de trabajo instantáneo en contra es γv^2

b) $x = A\cos(\omega_0 t)$. Calcular trabajo en una oscilación.

Sol: a) El trabajo:

$$dW = F_{anti\text{-}roce}\, dx = \gamma v\, dx$$

la tasa de trabajo es ... la potencia!

$$P = \frac{dW}{dt} = \gamma v \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{v} \Rightarrow \boxed{P = \gamma v^2}$$

b) $x = A\cos(\omega_0 t) \Rightarrow v = -A\omega_0 \operatorname{sen}(\omega_0 t)$

El periodo de una oscilación: $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$

entonces el trabajo en una oscilación:

$$W = \int_0^T P(t)\,dt = \int_0^T \gamma A^2\omega_0^2 \underbrace{\operatorname{sen}^2(\omega_0 t)}_{\frac{1-\cos(2\omega_0 t)}{2}}dt =$$

$$= \frac{\gamma A^2 \omega_0^2}{2}\left[\int_0^T dt - \int_0^T \cos(2\omega_0 t)\,dt\right] =$$

$$= \frac{\gamma A^2\omega_0^2}{2}\left[T - \cancel{\frac{\operatorname{sen}(\overset{4\pi}{2\omega_0 T})}{2\omega_0}}_{0}\right] = \frac{\gamma A^2 \omega_0^2 T}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{W = \gamma A^2 \omega_0 \pi}$$

P2 $\vec{F}=F_0\left(e^{-2(x-x_0)/x_0}-e^{-x/x_0}\right)\hat{i}$

a) ¿Para qué x $F(x)=0$?

b) $U(x)-U(x_0)$

c) Graficar $U(x)$ para $U(x_0)=\frac{F_0x_0}{2}(1-e^{-1})$

Sol: a) $F=0 \Rightarrow e^{-2(x-x_0)/x_0}=e^{-x/x_0}$ $\quad ()^{x_0}$

$$e^{-2x+2x_0}=e^{-x} \quad /\ln()$$

$$\boxed{x=2x_0}$$

b) $U(x)-U(x_0)=-\int_{x_0}^{x}\vec{F}\cdot d\vec{r}=-\int_{x_0}^{x}F_0\left(e^{-2(x-x_0)/x_0}-e^{-x/x_0}\right)dx=$

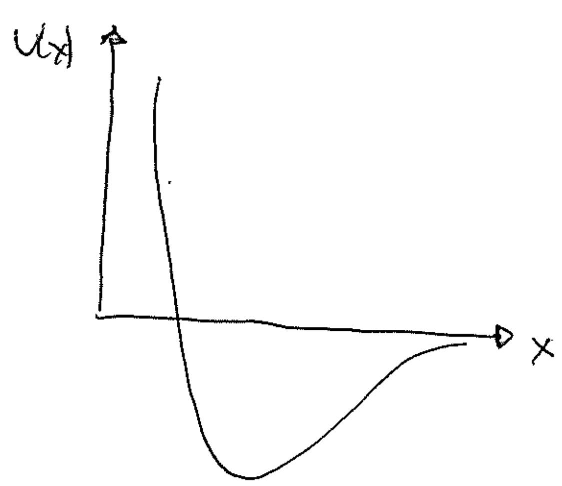
$d\vec{r} \rightarrow dx\,\hat{i}$

$$=F_0\left[\frac{e^{-2(x-x_0)/x_0}}{2/x_0}\Bigg|_{x_0}^{x}-\frac{e^{-x/x_0}}{1/x_0}\Bigg|_{x_0}^{x}\right]=F_0\left[\frac{x_0}{2}e^{-2\frac{(x-x_0)}{x_0}}-\frac{x_0}{2}-x_0e^{\frac{-x}{x_0}}+x_0e^{-1}\right]$$

$$\boxed{U(x)-U(x_0)=\frac{F_0x_0}{2}\left[e^{-2(x-x_0)/x_0}-2e^{-x/x_0}-1+2e^{-1}\right]}$$

c) En este caso:

$$U(x)=\frac{F_0x_0}{2}\left(e^{-2(x-x_0)/x_0}-2e^{-x/x_0}\right)$$



P3 | Vehículo de masa m se mueve rectilíneamente gracias su motor que entrega potencia P_0. Por el roce $-\gamma v^2$, se alcanza una velocidad asintótica igual a V_0.

a) Determinar V_0

b) en $t=0$, cuando se mueve a velocidad V_0, su potencia cambia a $2P_0$. Encuentre $v(t)$.

Sol: a) La energía cinética: $K=\frac{m}{2}v^2$

El cambio de energía cinética es igual al campo de trabajo:

$$\frac{dK}{dt}=\frac{dW}{dt}$$

$$\underbrace{\frac{dW}{dt}=P_0-\gamma v^2}_{P1} \Rightarrow \frac{dK}{dt}=mv\dot{v}=P_0-\gamma v^2$$

en la situación estacionaria: $\dot{v}=0 \Rightarrow \boxed{v_0^2=\frac{P_0}{\gamma}}$

b) Ahora $\frac{dW}{dt}=\frac{dK}{dt}$ cambia a:

$$m v \underbrace{\dot{v}}_{\frac{dv}{dt}}=2P_0-\gamma v^2$$

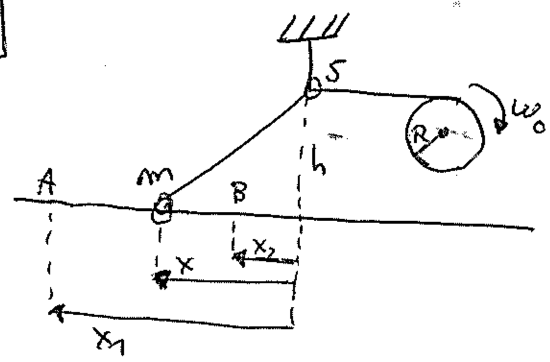
$$m\int_{v_0}^{v}\frac{v\,dv}{2P_0-\gamma v^2}=\int_0^t dt$$

$$-\frac{m}{2\gamma}\ln\left(\frac{2P_0-\gamma v^2}{2P_0-\gamma v_0^2}\right)=t \rightarrow \ln\left(\frac{2P_0-\gamma v^2}{2P_0-\gamma v_0^2}\right)=-\frac{2\gamma}{m}t \quad (\exp())$$

$$\frac{2P_0-\gamma v^2}{2P_0-\gamma \underbrace{v_0^2}_{\frac{P_0}{\gamma}}}=e^{-\frac{2\gamma}{m}t} \rightarrow 2P_0-\gamma v^2=P_0e^{-\frac{2\gamma}{m}t}$$

$$\Rightarrow \boxed{v(t)=\sqrt{\frac{P_0}{\gamma}\left(2-e^{-\frac{2\gamma}{m}t}\right)}}$$

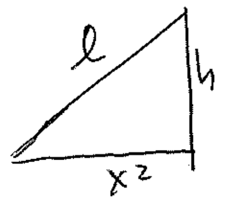
P4



a) $v(x), a(x), T(x)$

b) Trabajo $A \to B$

Sol: Definimos como ℓ la distancia entre S y el anillo:



$$\ell^2 = x^2 + x^2 \xrightarrow{\frac{d}{dt}} 2\ell\dot{\ell} = 2x\dot{x}$$

usando que $\dot{\ell} = -\omega_0 R \Rightarrow x\dot{x} = -\ell\omega_0 R \Rightarrow \dot{x} = \dfrac{-\omega_0 R\overbrace{\sqrt{h^2+x^2}}^{\ell}}{x}$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{x}(x) = -\omega_0 R\sqrt{1+\frac{h^2}{x^2}}}$$

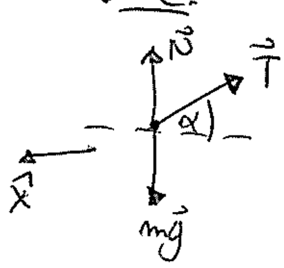
ahora la aceleración:

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = +\omega_0 R\,\frac{1}{2}\left(1+\frac{h^2}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{+2h^2}{x^3}\dot{x} = \frac{\omega_0 R}{\cancel{\sqrt{1+\frac{h^2}{x^2}}}}\frac{h^2}{x^3}(-\omega_0 R)\cancel{\sqrt{1+\frac{h^2}{x^2}}}$$

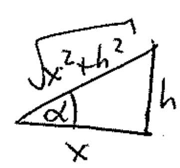
$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x}(x) = -\omega_0^2 R^2\frac{h^2}{x^3}}$$

la tensión:

DCL:



$$-T\cos\alpha = m\ddot{x} = -m\omega_0^2R^2\frac{h^2}{x^3}$$



$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{T(x) = m\omega_0^2R^2\frac{\sqrt{x^2+h^2}}{x^4}h^2}$$

Hay dos formas:

1. Diferencia de energía cinética:

$$W = \Delta K = \frac{m}{2}\dot{x}_B^2 - \frac{m}{2}\dot{x}_A^2 \underset{\dot{x}(x)}{=} \frac{m}{2}\omega_0^2R^2\left(\cancel{1}+\frac{h^2}{x_2^2}-\cancel{1}-\frac{h^2}{x_1^2}\right) \Rightarrow \boxed{W = \frac{1}{2}m\omega_0^2R^2h^2\left(\frac{1}{x_2^2}-\frac{1}{x_1^2}\right)}$$

2. Hacer la integral:

$$d\vec{r} = dx\,\hat{i}$$

$$\Rightarrow W = \int_{x_A}^{x_B} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{x_A}^{x_B} (-T\cos\alpha)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \Big(-\underbrace{m\omega_0^2 R^2 \frac{\cancel{\sqrt{x^2+h^2}}}{\cancel{x}x^3}h^2}_{T}\;\underbrace{\frac{\cancel{x}}{\cancel{\sqrt{x^2+h^2}}}}_{\cos\alpha}\Big)\,dx =$$

$$= -\int_{x_1}^{x_2} m\omega_0^2 R^2 h^2 x^{-3}\,dx = \frac{m}{2}\omega_0^2 R^2 h^2\left(\frac{1}{x_2^2} - \frac{1}{x_1^2}\right)$$