AUXILIAR 11

P1 a) Una medición en $\hat{S}_x$ da como auto-energía $+\hbar/2$. Luego se hace la medición $\hat{S}_x\cos\phi + \hat{S}_y \operatorname{sen}\phi$. Calcule la probabilidad de medir $+\hbar/2$.

<u>Sol:</u> De la primera medición:

$$\frac{\hbar}{2}\sigma_x \chi_0 = +\frac{\hbar}{2}\chi_0 \quad \rightarrow \quad \chi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

Ahora sacamos los autoestados de $\hat{S}_x\cos\phi + \hat{S}_y \operatorname{sen}\phi$:

$$(\hat{S}_x\cos\phi + \hat{S}_y \operatorname{sen}\phi)\,\chi = \frac{\hbar}{2}\lambda\,\chi$$

$$\frac{\cancel{\hbar}}{\cancel{2}}\begin{pmatrix}0 & \cos\phi - i\operatorname{sen}\phi\\ \cos\phi + i\operatorname{sen}\phi & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \frac{\cancel{\hbar}}{\cancel{2}}\lambda\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{l} \bullet\ e^{-i\phi}\, b = \lambda a \\ \bullet\ e^{i\phi}\, a = \lambda b \end{array}\right\} \quad ab = \lambda^2 ab \quad \rightarrow \quad \lambda = \pm 1$$

entonces los autovectores:

<u>$\lambda = +1$</u>: $\quad b = a e^{i\phi} \quad \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ e^{i\phi}\end{pmatrix} \rightarrow \chi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}e^{-i\phi/2}\\ e^{i\phi/2}\end{pmatrix}$

<u>$\lambda = -1$</u>; $\quad b = -a e^{i\phi} \quad \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -e^{i\phi}\end{pmatrix} \rightarrow \chi_- = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}e^{-i\phi/2}\\ -e^{i\phi/2}\end{pmatrix}$

Entonces la probabilidad buscada es:

$$P = |\langle\chi_+|\chi_0\rangle|^2 = \left|\frac{1}{2}\left(e^{-i\phi/2}\ e^{i\phi/2}\right)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right|^2 = \Big|\underbrace{\frac{1}{2}\left(e^{i\phi/2} + e^{-i\phi/2}\right)}_{\cos\phi/2}\Big|^2$$

$$\Rightarrow \boxed{P = \cos^2\phi/2}$$

b) Inicialmente se tiene una partícula en el estado $+\frac{\hbar}{2}$ de $\hat{S}_x$. La partícula se encuentra en un campo magnético $B_0\hat{z}$. Encuentre la probabilidad de encontrar la partícula en un autoestado de $\hat{S}_y$ en un tiempo t.

Sol: Resolvemos: $\hat{H}|\phi\rangle = E|\phi\rangle$

Consideremos un electrón:

$$\sigma_z\, g\, \mu_B \frac{\hbar}{2} B_0 |\phi\rangle = E|\phi\rangle \quad \rightarrow E_0 = \mu_B \hbar B_0$$

$$E_0\, \sigma_z |\phi\rangle = E|\phi\rangle$$

$$\rightarrow E = \pm E_0 \quad \text{con} \quad |\phi_+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ |\phi_-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto la dependencia temporal:

$$|\phi_t\rangle = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-iE_0 t/\hbar} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{iE_0 t/\hbar}$$

Inicialmente: $|\phi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow c_1 = c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Los autoestados de $\hat{S}_y$: $\overbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}}^{\chi_+},\ \overbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}}^{\chi_-}$

Entonces las probabilidades buscadas:

$$P_- = |\langle \chi_+ | \phi_t\rangle|^2 = \left| \frac{1}{2} e^{-iE_0 t/\hbar} + \frac{1}{2}(-i) e^{iE_0 t/\hbar} \right|^2 =$$

$$= \left| \frac{1}{2}\left(\cos(E_0 t/\hbar) + \operatorname{sen}(E_0 t/\hbar)\right) + \frac{i}{2}\left(-\operatorname{sen}(E_0 t/\hbar) - \cos(E_0 t/\hbar)\right) \right|^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\left[1 + 1 + 2\underbrace{\cos(E_0 t/\hbar)\operatorname{sen}(E_0 t/\hbar)}_{\operatorname{sen}(2E_0 t/\hbar)/2}\right] = \boxed{\frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{sen}(2E_0 t/\hbar)\right) = P_-}$$

De forma análoga: $\boxed{P_+ = \frac{1}{2}\left(1 - \operatorname{sen}(2E_0 t/\hbar)\right)}$

c) En tiempo cero una partícula está en el estado S_x con autovalor $\hbar/2$. Hasta tiempo T se encuentra en un campo magnético $B_0\hat{z}$. Luego súbitamente cambia a $B_0\hat{y}$. Si en $2T$ se realiza una medición en S_x, ¿con qué probabilidad se medirá el estado $+\hbar/2$?

Sol: De la parte b):

$$|\phi(t\leq T)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{-iE_0t/\hbar} + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}e^{iE_0t/\hbar} \qquad (1)$$

Ahora resolvemos la ec. de Schrödinger para $B_0\hat{y}$:

$$E_0\sigma_y|\phi\rangle = E|\phi\rangle$$

$$\rightarrow |\phi(t>T)\rangle = c_1\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}e^{-iE_0t/\hbar} + c_2\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}e^{iE_0t/\hbar} \qquad (2)$$

de (1) tenemos que $|\phi(T)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}e^{-iE_0T/\hbar}\\ e^{iE_0T/\hbar}\end{pmatrix}$

de (2) : $|\phi(T)\rangle = \begin{pmatrix}c_1e^{-iE_0T/\hbar} + c_2e^{iE_0T/\hbar}\\ c_1ie^{-iE_0T/\hbar} - c_2ie^{iE_0T/\hbar}\end{pmatrix}$

Igualando ambas: $\rightarrow$
- $\frac{1}{\sqrt{2}} = c_1 + c_2e^{2iE_0T/\hbar}$
- $\frac{1}{\sqrt{2}} = ic_1e^{-2iE_0T/\hbar} - ic_2$

de donde se despeja:

$$c_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(1 - ie^{2iE_0T/\hbar}\right), \quad c_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(i + e^{-2iE_0T/\hbar}\right)$$

Entonces:

$$|\phi(2T)\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(e^{-2iE_0T/\hbar} - i\right)\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(ie^{2iE_0T/\hbar} + 1\right)\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}$$

La probabilidad buscada:

$$P = \left|\langle \underbrace{\chi_+^x}_{\frac{1}{\sqrt{2}}(1\ 1)} | \phi(2T)\rangle\right|^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\left|\left(e^{-2iE_0T/\hbar} - i\right)(1+i) + \left(ie^{2iE_0T/\hbar} + 1\right)(1-i)\right|^2 =$$

$$= \frac{1}{16}\left|\left(e^{-2iE_0T/\hbar} + 1 + e^{2iE_0T/\hbar} + 1\right) + i\left(e^{-2iE_0T/\hbar} - 1 + e^{2iE_0T/\hbar} - 1\right)\right|^2 =$$

$$= \frac{1}{16}\left|\left(2 + 2\cos(2E_0T/\hbar)\right) + i\left(-2 + 2\cos(2E_0T/\hbar)\right)\right|^2 =$$

$$= \frac{1}{16}\left[8 + 8\cos^2(2E_0T/\hbar)\right]$$

$$\boxed{P = \frac{1}{2}\left(1 + \cos^2(2E_0T/\hbar)\right)}$$

P2) Una partícula con momento magnético μ y spin $\frac{1}{2}$ se encuentra en un campo magnético:

$$\vec{B}(t) = B_0\,(\operatorname{sen}\theta \cos\omega_0 t,\ \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\omega_0 t,\ \cos\theta)$$

Si en $t=0$ el spin paralelo a $\vec{B}$ tiene valor $\hbar/2$, encuentre la función de onda.

Sol: La función de onda $\psi(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$

$$\rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi = \hat{H}\psi \rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -\mu B_0 \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta\, e^{-i\omega_0 t} \\ \operatorname{sen}\theta\, e^{i\omega_0 t} & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Escribiendo: $\hbar q = \mu B_0 \cos\theta$, $\hbar p = \mu B_0 \operatorname{sen}\theta$

$$\rightarrow \cdot\ \dot{a} = iqa + ipe^{-i\omega_0 t}b \qquad (1)$$

$$\cdot\ \dot{b} = ipe^{i\omega_0 t}a - iqb \qquad (2)$$

Derivando (1):

$$\ddot{a} = iq\dot{a} + ipe^{-i\omega_0 t}(\dot{b} - i\omega_0 b)$$

usando $\dot{b}$ de (2):

$$\ddot{a} = iq\dot{a} + ipe^{-i\omega_0 t}\left(ipe^{i\omega_0 t}a - iqb - i\omega_0 b\right)$$

$$\ddot{a} = iq\dot{a} - p^2 a + p(q+\omega_0)e^{-i\omega_0 t}b$$

de (1) se tiene: $pe^{-i\omega_0 t}b = -i\dot{a} - qa$

$$\Rightarrow \ddot{a} = iq\dot{a} - p^2 a + (q+\omega_0)(-i\dot{a} - qa)$$

$$\ddot{a} + i\omega_0\dot{a} + (p^2+q^2+\omega_0 q)a = 0$$

Resolvemos usando polinomio característico:

$$\lambda_\pm = -\frac{i\omega_0}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-\omega_0^2 - 4(p^2+q^2+\omega_0 q)} =$$

$$= -\frac{i\omega_0}{2} \pm i\sqrt{\frac{\omega_0^2}{4} + p^2+q^2+\omega_0 q} = i\underbrace{\left(\frac{\omega_0}{2} \pm \sqrt{\frac{\omega_0^2}{4}+p^2+q^2+\omega_0 q}\right)}_{\Omega_\pm}$$

Entonces la solución de $a(t)$:

$$a(t) = a_1 e^{i\Omega_1 t} + a_2 e^{-i\Omega_2 t}$$

Remplazando en (1) se obtiene:

$$b(t) = \frac{\Omega_1 - q}{p}a_1 e^{i(\Omega_1+\omega_0)t} + \frac{\Omega_2 - q}{p}a_2 e^{i(\Omega_2+\omega_0)t}$$

En $t=0$:

$$|\psi(t=0)\rangle = \begin{pmatrix} a(0) \\ b(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ \frac{\Omega_1 - q}{p}a_1 + \frac{\Omega_2 - q}{p}a_2 \end{pmatrix}$$

Además del enunciado, en $t=0$:

$$\operatorname{sen}\theta\,\hat{S}_x + \cos\theta\,\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \frac{\cancel{\hbar}}{\cancel{2}}\begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a(0) \\ b(0) \end{pmatrix} = +\frac{\cancel{\hbar}}{\cancel{2}}\begin{pmatrix} a(0) \\ b(0) \end{pmatrix}$$

tenemos:

- $\cos\theta\,(a_1+a_2) + \operatorname{sen}\theta\left(a_1\frac{\Omega_1-q}{p} + a_2\frac{\Omega_2-q}{p}\right) = a_1+a_2$

- $\operatorname{sen}\theta\,(a_1+a_2) - \cos\theta\left(a_1\frac{\Omega_1-q}{p} + a_2\frac{\Omega_2-q}{p}\right) = \frac{\Omega_1-q}{p}a_1 + \frac{\Omega_2-q}{p}a_2$

que lleva a:

$$a_1 = A\left(-\tan\theta/2 + \frac{\Omega_2-q}{p}\right)$$
$$a_2 = A\left(\tan\theta/2 - \frac{\Omega_1-q}{p}\right) \qquad \text{con} \quad |A|^2 = \frac{p^2\cos^2\theta/2}{(\Omega_2-\Omega_1)^2}$$