Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Física
FI4001 Mecánica Cuántica

Auxiliar N° 6

Profesor: Hugo Arellano S.
Profesor auxiliar: Felipe Isaule

16 de Abril de 2015

Propuestos: Problemas 18, 32-33 del apunte de clases.

P1. Si dos operadores A y B cumplen que $[A, B] = \lambda A$. Muestre que $Ae^B = e^\lambda e^B A$.

P2. Considere $\hat{G}(\lambda) = e^{\lambda\hat{A}}e^{\lambda\hat{B}} = e^{\lambda\hat{A}}F(\lambda)$, con $\hat{A}$ y $\hat{B}$ matrices independientes de λ. Además $[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0$ y $[[\hat{A}, \hat{B}], \hat{B}] = 0$.

a) Demuestre que $\frac{d\hat{F}}{d\lambda} = (\hat{B} - \lambda[\hat{A}, \hat{B}])\hat{F}$.

b) Concluya que $e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} = e^{\hat{A}+\hat{B}-[\hat{A},\hat{B}]/2}$.

P3.

a) Evalue el conmutador $[x, exp(ik_x a)]$.

b) Usando el resultado anterior, pruebe que $exp(ik_x a)|x\rangle$ es un autoestado del operador $\hat{x}$. ¿Cual es el autovalor correspondiente?

P4. Considere un sistema cuyo estado en el instante t_0 es $|\Phi_0\rangle$ con dos observables A y B. Ellos estan dados por

$$|\Phi_0\rangle = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix} \quad A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 1 & i\\0 & -i & 1\end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & -i\\0 & i & 0\end{pmatrix}$$

a) Primero se mide A e inmediatamente después se mide B. Calcule la probabilidad de obtener el autovalor 0 para A y 1 para B.

b) Si primero se mide B y luego A, encuentre la probabilidad de obtener el autovalor 1 para B y 0 para A.

c) Analice e interprete los resultados obtenidos.

Matrices de Pauli:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}, \; \sigma_y = \begin{pmatrix}0 & -i\\i & 0\end{pmatrix}, \; \sigma_z = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$$

P5. Considere una partícula de carga q y masa m que se mueve en un campo magnético $\vec{B} = B_0\hat{z}$. Lleve las ecuaciones a forma matricial e identifique una de las matrices de Pauli. Obtenga los valores y vectores propios y verifique que se obtienen los resultados conocidos.

P6. Demuestre que si $\hat{M}$ es hermítica, entonces:

a) si sus elementos $\langle a'|\hat{M}|a\rangle$ son reales entonces $\hat{M}$ es simétrica, y que si son imaginarios entonces es anti-simétrica.

b) Haciendo uso de la observación anteriores, encuentre tres matrices de dimension 2×2 que sean hermíticas.

c) Sean σ_x, σ_y y σ_z las tres matrices de Pauli. Verifique que $\sigma_x \sigma_y = i\sigma_z$.

d) Calcule los autovalores y autovectores de cada matriz de Pauli (puede usar el resultado de la pregunta 1).

e) Sea $\hat{n}$ un vector unitario en 3D. Calcule $(\sigma \cdot \hat{n})^2$.

f) Encuentre los autovalores de $\sigma \cdot \hat{n}$