P1) $[A,B]=\lambda A$. Mostrar que $Ae^{B}=e^{\lambda}e^{B}A$

Sol: Al sacar Ae^{B} saldrán términos del tipo AB^{n}, por lo que lo sacaremos.

$\underline{n=1}$: $AB^{1}=AB-BA+BA=\underbrace{[A,B]}_{\lambda A}+BA=(\lambda+B)A$

$\underline{n=2}$: $AB^{2}=AB\cdot B=(\lambda+B)AB=(\lambda+B)^{2}A$

$\underline{n=3}$: $AB^{3}=AB^{2}\cdot B=(\lambda+B)^{3}AB=(\lambda+B)^{3}A$

$\vdots$

$\longrightarrow$ $\boxed{AB^{n}=(\lambda+B)^{n}A}$

Ahora sacamos Ae^{B}:

$$Ae^{B}=A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}B^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}AB^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\lambda+B)^{n}A$$

P2) $\hat{G}(\lambda) = e^{\lambda \hat{A}} e^{\lambda \hat{B}} = e^{\lambda \hat{A}} F(\lambda)$. $[A,[A,B]]=0$, $[[A,B],B]=0$

a) Demostrar que $dF/d\lambda = (B - \lambda [A,B]) F(\lambda)$

b) Concluir que $e^A e^B = e^{A+B-[A,B]/2}$

<u>Sol.:</u> a)
$$e^{\lambda A + \lambda B} = e^{\lambda A} F(\lambda) \quad / \frac{d}{d\lambda}(\,)$$
$$(\cancel{A}+B)\underbrace{e^{\lambda A} e^{\lambda B}}_{e^{\lambda A}F(\lambda)} = \cancel{A e^{\lambda A}} F(\lambda) + e^{\lambda A}\frac{dF}{d\lambda}$$
$$e^{\lambda A}\frac{dF}{d\lambda} = B e^{\lambda A} F(\lambda) \quad / e^{-\lambda A}(\,)$$
$$\frac{dF}{d\lambda} = e^{-\lambda A} B e^{\lambda A} F(\lambda)$$

Aquí usamos el resultado de la P3b de la Auxiliar 5:

$$e^{-\lambda A} B e^{\lambda A} = B + [-\lambda A, B] + \frac{1}{2!}[-\lambda A,[-\lambda A, B]] + \ldots =$$
$$= B - \lambda [A,B] + \frac{\lambda^2}{2!}[A,[A,B]] + \ldots$$

debido a que $[A,[A,B]]=0$, sólo sobreviven los dos primeros términos.

$$\rightarrow \boxed{\frac{dF}{d\lambda} = (B - \lambda[A,B]) F(\lambda)}$$

b) Se ve que si $F(\lambda) = e^{\lambda B - \frac{\lambda^2}{2}[A,B]}$
$$\frac{dF}{d\lambda} = (B - \frac{\cancel{2}\lambda}{\cancel{2}}[A,B]) e^{\lambda B - \frac{\lambda^2}{2}[A,B]}$$
$$= (B - \lambda[A,B]) F(\lambda)$$

Por tanto: $e^{\lambda A} e^{\lambda B} = e^{\lambda A} F(\lambda) = e^{\lambda A + \lambda B - \frac{\lambda^2}{2}[A,B]}$

Escogiendo $\lambda = 1$

$$\boxed{e^A e^B = e^{A+B-[A,B]/2}}$$

P3) a) Evalúe el conmutador $[x, e^{ik_x a}]$

b) Pruebe que $e^{ik_x a}|x\rangle$ es autoestado del operador $\hat{x}$. ¿Cuál es el autovalor?

Sol: a) $[\hat{x}, e^{i\hat{k}a}] = [\hat{x}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(i\hat{k}a)^n] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(ia)^n [x, \hat{k}^n]$

Usaré que $[x, k^n] = \sum_{j=0}^{n-1} k^j \underbrace{[x,k]}_{i} k^{n-j-1}$ (demostrar)

$\rightarrow [\hat{x}, e^{i\hat{k}a}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(ia)^n i \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} \cancel{\hat{k}^j} \hat{k}^{n-\cancel{j}-1}}_{n\hat{k}^{n-1}} =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} \underbrace{(ia)^n i}_{(ia)^{n-1}\cdot(-a)} \hat{k}^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} (ia)^{n-1} (-a) \hat{k}^{n-1} =$

$= -a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} (ia\hat{k})^{n-1} = -a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (ia\hat{k})^n =$

$$\boxed{[\hat{x}, e^{i\hat{k}a}] = -a\, e^{i\hat{k}a}}$$

b) Usando la parte a):

$\hat{x} e^{i\hat{k}a}|x\rangle = [\hat{x}, e^{i\hat{k}a}]|x\rangle + e^{i\hat{k}a} \underbrace{\hat{x}|x\rangle}_{x|x\rangle} =$

número

$= -a e^{i\hat{k}a}|x\rangle + x e^{i\hat{k}a}|x\rangle =$

$= (x-a) e^{i\hat{k}a}|x\rangle$

Entonces, como:

$\hat{x}\underbrace{[e^{i\hat{k}a}|x\rangle]}_{\text{autoestado}} = \underbrace{(x-a)}_{\text{autovalor}} \underbrace{[e^{i\hat{k}a}|x\rangle]}_{\text{autoestado}}$

se puede normalizar con una cte. C

$\boxed{P4}$ $|\psi_0\rangle = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}$, $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 1 & i\\0 & -i & 1\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & -i\\0 & i & 0\end{pmatrix}$

a) Se mide A y luego B. Prob. de obtener 0 para A y -1 para B.

b) Se mide B y luego A. Prob. de obtener -1 para B y 0 para A.

Sol: a) Primero sacamos los autovectores de A y B:

A: $\det\begin{pmatrix}2-\lambda & 0 & 0\\0 & 1-\lambda & i\\0 & -i & 1\end{pmatrix} = (2-\lambda)[(1-\lambda)^2+i^2] = 0$

$$(2-\lambda)[\lambda^2-2\lambda+\cancel{1-1}] = 0$$

$$\lambda(2-\lambda)(\lambda-2)=0 \quad \Rightarrow \underbrace{\lambda_{1,2}=1, \quad \lambda_3=0}_{\text{tenía que dividir por 2}}$$

Los autovectores asociados a 1:

$$v_{1_A} = \begin{pmatrix}0\\i\\1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} \quad v_{2_A} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

y a 0:

$$v_{3_A} = \begin{pmatrix}0\\-i\\1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

B: $\det\begin{pmatrix}1-\lambda & 0 & 0\\0 & -\lambda & -i\\0 & i & -\lambda\end{pmatrix} = (1-\lambda)[\lambda^2+i^2] = 0$

$$(1-\lambda)(\lambda^2-1)=0 \quad \Rightarrow \lambda_{1,2}=1, \quad \lambda_3=-1$$

Los autovectores asociados a 1:

$$v_{1_B} = \begin{pmatrix}0\\-i\\1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} \quad v_{2_B} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

y a -1:

$$v_{3_B} = \begin{pmatrix}0\\i\\1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Si se mide A, prob. de obtener 0:

$$P_{A,0} = |\langle v_{3_A} | \psi_0 \rangle|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{6} \cdot 4 \right|^2 = \frac{16}{2 \cdot 36} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

Luego de esta medición, el estado queda en:

$$|\psi_1\rangle = |v_{3_A}\rangle \langle v_{3_A} | \psi_0 \rangle = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ahora si se mide B, prob. de obtener -1:

$$P_{B,-1} = |\langle v_{3_B} | \psi_1 \rangle|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{3} \cdot (-i^2 + 1) \right|^2 = \left| \frac{2}{\sqrt{2} \cdot 3} \right|^2 = \frac{4}{2 \cdot 9} = \frac{2}{9}$$

Luego la probabilidad buscada es $\frac{4}{81}$.

b) Si primero se mide B, la prob. de obtener -1:

$$P_{B,-1} = |\langle v_{3_B} | \psi_0 \rangle|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{6} \cdot 4 \right|^2 = \frac{2}{9}$$

queda en el estado

$$|\psi_1\rangle = \langle v_{3_B} | \psi_0 \rangle |v_{3_B}\rangle = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$$

y ahora la prob. de obtener 0 si se mide A:

$$P_{A,0} = |\langle v_{3_A} | \psi_1 \rangle|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{3} \cdot (-i^2 + 1) \right|^2 = \frac{2}{9}$$

es la misma probabilidad $4/81$. ¿Por qué?

¿Qué pasa con los autoestados degenerados? Investigar!

P5

$$m\dot{\vec{v}} = q\vec{v}\times\vec{B} \qquad \text{con} \qquad \vec{B} = B_0\hat{z}$$

$$\dot{\vec{v}} = \frac{q}{m}\left(-v_x B_0\hat{y} + v_y B_0\hat{x}\right)$$

$$\rightarrow \quad \dot{v}_x = \frac{qB_0}{m}v_y \qquad \dot{v}_y = -\frac{qB_0}{m}v_x$$

Si $\vec{v} = e^{i\omega t}\vec{u}$:

$$\rightarrow \quad i\omega u_x = \frac{qB_0}{m}u_y \qquad i\omega u_y = -\frac{qB_0}{m}u_x$$

De forma matricial:

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \frac{qB_0}{i\omega m}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{i} \\ -\frac{1}{i} & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \frac{qB_0}{\omega m}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}}_{\sigma_y}\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$$

Sus autovalores son $+\frac{qB_0}{\omega m}$ y $-\frac{qB_0}{\omega m}$. Los vectores propios:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

Obteniendo la relación conocida para la frecuencia.

$$\omega = \frac{qB_0}{vm}$$

Luego la solución para $\vec{v}$:

$$\rightarrow \frac{A}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}e^{i\omega_+ t} + \frac{B}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}e^{-i\omega_- t} = \vec{v}$$

Si uso que va con una rapidez v: $A = B = \frac{v}{\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow \vec{v} = \frac{v}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}e^{iqB_0/vm\, t} + \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}e^{-iqB_0/vm\, t}\right) =$$

$$\vec{v} = v\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{qB_0}{vm}t\right) \\ -\operatorname{sen}\left(\frac{qB_0}{vm}t\right) \end{pmatrix}$$

que es el resultado conocido.

P6 Si $\hat{M}$ es hermítica:

a) Demostrar que si $\langle a'|M|a\rangle$ son reales, M es simétrica y que si $\langle a'|M|a\rangle$ son imaginarios es antisimétrica.

Sol: • Si $\langle a'|M|a\rangle = C$, con C real, entonces:

$\langle a|M|a'\rangle = C \Rightarrow M$ es simétrica

• Si $\langle a'|M|a\rangle = iC$

$\langle a|M|a'\rangle = (\langle a'|M|a\rangle)^* = -iC \Rightarrow M$ es antisimétrica

b) Encontrar tres matrices de dimensión 2x2 hermíticas.

ej: $\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) Calcular $\sigma_x \sigma_y$:

Sol: $\sigma_x \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = i\sigma_z$

d) Los de σ_y son $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ y $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ para 1 y -1.

σ_x: $\det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1$

$\rightarrow v_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad v_- = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

σ_z: $\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = -(1+\lambda)(1-\lambda) = 0 \rightarrow 1-\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1$

$\rightarrow v_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad v_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$