P1 a) Evalúe el conmutador $[\hat{x},[\hat{x},\hat{H}]]$ para $\hat{H}=\frac{\hat{p}^2}{2m}+V(x)$

b) Encuentre su valor de expectación con respecto al autoestado $|\phi_0\rangle$

c) Pruebe que:

$$\sum_n \left|\int d\hat{x}\, \phi_0^*(x)\, x\, \phi_n(x)\right|^2 (E_n-E_0) = \frac{\hbar^2}{2m}$$

Sol: a) • $[x,H] = \cancel{[x,V(x)]}^{\,0} + [x,\frac{p^2}{2m}] = \frac{1}{2m}(\overbrace{[x,p_x]}^{i\hbar}p_x + p_x[x,p_x]) = \frac{i\hbar}{m}p_x$

• $[x,[x,H]] = \frac{i\hbar}{m}\underbrace{[x,p_x]}_{i\hbar} = \boxed{-\frac{\hbar^2}{m}}$

b) El valor de expectación:

$$\langle[x,[x,H]]\rangle = \langle\phi_0|[x,[x,H]]|\phi_0\rangle = \int dx\, \langle\phi_0|x\rangle\langle x|[x,[x,H]]|\phi_0\rangle$$

$$\rightarrow \langle x|[x,[x,H]]|\phi_0\rangle = \langle x|-\frac{\hbar^2}{m}|\phi_0\rangle = -\frac{\hbar^2}{m}\phi_0(x)$$

$$\Rightarrow \langle[x,[x,H]]\rangle = -\frac{\hbar^2}{m}\int dx\, \phi_0^*\phi_0 \boxed{= -\frac{\hbar^2}{m}}$$

c) Vemos que el conmutador usado:

$$[x,[x,H]] = [x, xH-Hx] = x^2H - xHx - xHx + Hx^2 =$$

$$= x^2H + Hx^2 - 2xHx = -\frac{\hbar^2}{m}$$

Volvemos al valor de expectación:

$$\langle[x,[x,H]]\rangle = \int dx\, \phi_0^*(x)\langle x|[x^2H + Hx^2 - 2xHx]|\phi_0\rangle$$

Vemos término por término:

• $\int dx\phi_0^* \langle x|\underset{\uparrow\, 1}{x^2}H|\phi_0\rangle = \int dx\int dx'\, \phi_0^*(x)\underbrace{\langle x|x^2|x'\rangle}_{x'^2\delta(x-x')}\underbrace{\langle x'|H|\phi_0\rangle}_{E_0\phi_0(x')}$

Aquí usaré que $\delta(x-x') = \sum_n \phi_n(x)\phi_n^*(x')$

$$\Rightarrow \int dx\phi_0^*\langle x|x^2H|\phi_0\rangle = \sum_n\int dx\, \phi_0^*(x)x\phi_n(x)\int dx'\, \phi_n^*(x')x'\phi_0(x')\, E_0$$

$$= E_0\sum_n\left|\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \phi_0^*(x)x\phi_n(x)\right|^2$$

- $\int dx\, \phi_0^*(x) \langle x | H x^2 | \phi_0 \rangle \underset{\uparrow}{=} E_0 \sum_n \left| \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \phi_0^*(x)\, x\, \phi_n(x) \right|^2$

$(x^2 H)^* = H x^2$

- $\int dx\, \phi_0^*(x) \langle x | x H x | \phi_0 \rangle \underset{\uparrow}{=} \int dx \int dx'\, \phi_0^*(x)\, x\, H\, \delta(x-x')\, x' \phi_0(x') =$

de forma similar a lo anterior

$$= \int dx \int dx'\, \phi_0^*(x)\, x\, \underbrace{H \sum_n \phi_n(x)}_{E_n \phi_n(x)} \phi_n^*(x')\, x'\, \phi_0(x') =$$

$$= \sum_n E_n \left| \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \phi_0^*(x)\, x\, \phi_n(x) \right|$$

Sumando los tres términos y usando la parte b):

$$2E_0 \sum_n \left| \int_{-\infty}^{\infty} \text{''} \right| - 2\sum_n E_n \left| \int_{-\infty}^{\infty} \text{''} \right| = \frac{-\hbar^2}{m}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_n \left| \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \phi_0^*(x)\, x\, \phi_n(x) \right|^2 (E_n - E_0) = \frac{\hbar^2}{2m}}$$

Esto se conoce como la relación de suma de Thomas-Reiche-Kuhn.

P2) La función de onda en tiempo cero de una partícula en un pozo infito de ancho a es:

$$\psi(x,0) = \begin{cases} 1/\sqrt{a} & 0 \leq x \leq a \\ 0 & \sim \end{cases}$$

a) Probabilidad en $t=0$ que la energía sea $E_n = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2ma^2}$

b) Probabilidad en $t>0$ " " " "

Sol: a) Sabemos que: $E_n = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2ma^2}$ y $\phi_n(x) = \langle x|\phi_n\rangle = \sqrt{\frac{2}{a}}\, \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$

La probabilidad buscada:

$$P_n(0) = |\langle\phi_n|\psi_0\rangle|^2 = \frac{2}{L^2}\left|\int_0^L \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx\right|^2 = \frac{2}{n^2\pi^2}[(-1)^n - 1]^2$$

$$\Rightarrow \boxed{P_n(0) = \begin{cases} 8/n^2\pi^2 & n \text{ impar} \\ 0 & n \text{ par} \end{cases}}$$

b) Sabemos que:

$$|\psi_t\rangle = \sum_n c_n |\phi_n\rangle e^{-iE_nt/\hbar} \qquad / \langle\phi_n|$$

$$\langle\phi_n|\psi_0\rangle = c_n = \frac{2\sqrt{2}}{n\pi}$$

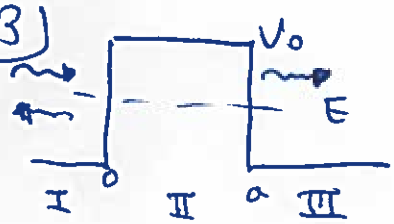
La probabilidad buscada:

$$P_n(t) = |\langle\psi_{n,t}|\psi_t\rangle|^2 = |\langle\phi_n|e^{iE_nt/\hbar}\sum_{n'} c_{n'}|\phi_{n'}\rangle e^{-iE_nt/\hbar}|^2 =$$

$$= |c_{n'}\delta_{n'n}|^2$$

$$\Rightarrow \boxed{P_n(t) = \begin{cases} 8/n^2\pi^2 & n \text{ impar} \\ 0 & n \text{ par} \end{cases}}$$

P3)

a) 

Encuentre el coeficiente de transmisión.

Sol: Para $0<x<a$: $\psi'' - \underbrace{\frac{2m}{\hbar^2}(V_0-E)}_{K^2}\psi = 0 \Rightarrow \psi_{II} = Ce^{Kx} + De^{-Kx}$

Para el resto: $\psi'' + \underbrace{\frac{2m}{\hbar^2}E}_{k^2}\psi = 0 \Rightarrow \psi_{I} = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$

$\psi_{III} = Ee^{ikx}$

Imponemos continuidad en $x=0$:

$\psi_I|_0 = \psi_{II}|_0 \to A+B = C+D$

$\psi'_I|_0 = \psi'_{II}|_0 \to Aik - Bik = CK - DK$

tratamos de despejar A en función de C y D:

$$Aik - Cik - Dik + Aik = CK - DK$$

$$\to A = \left(\frac{K+ik}{2ik}\right)C + \left(\frac{-K+ik}{2ik}\right)D \qquad (*)$$

de forma análoga para B:

$$\to B = \left(\frac{-K+ik}{2ik}\right)C + \left(\frac{K+ik}{2ik}\right)D$$

Imponemos la continuidad en $x=a$:

$\psi_{II}|_a = \psi_{III}|_a \to Ce^{Ka} + De^{-Ka} = Ee^{ika}$

$\psi'_{II}|_a = \psi'_{III}|_a \to KCe^{Ka} - DKe^{-Ka} = Eike^{ika}$

Tratamos de espejar C en función de E:

$$KCe^{Ka} + CKe^{+Ka} - EKe^{ika} = Eike^{ika}$$

$$\rightarrow C = \left(\frac{\varkappa + ik}{2\varkappa}\right) E e^{ika} e^{-\varkappa a}$$

de forma análoga para D:

$$\rightarrow D = \left(\frac{\varkappa - ik}{2\varkappa}\right) E e^{ika} e^{\varkappa a}$$

ahora remplazamos en (*):

$$A = \frac{E e^{ika}}{2\varkappa \cdot 2ik} \left[(\varkappa + ik)^2 e^{-\varkappa a} - (-\varkappa + ik)^2 e^{\varkappa a} \right] =$$

$$= \frac{E e^{ika}}{4ik\varkappa} \left[(\varkappa^2 + 2ik\varkappa - k^2) e^{-\varkappa a} - (\varkappa^2 - 2ik\varkappa - k^2) e^{\varkappa a} \right] =$$

$$= \frac{E e^{ika}}{4ik\varkappa} \left[4ik\varkappa \cosh(\varkappa a) + 2(k^2 - \varkappa^2) \operatorname{senh}(\varkappa a) \right]$$

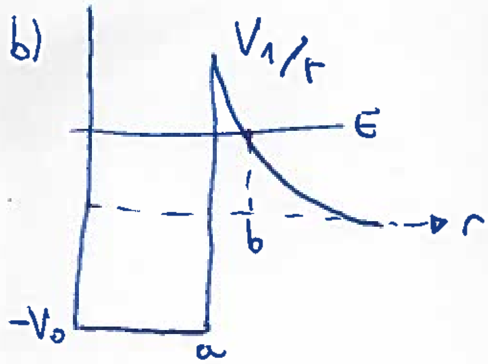
Ahora el coeficiente de transmisión:

$$\left|\frac{E}{A}\right|^2 = \frac{16 k^2 \varkappa^2}{16 k^2 \varkappa^2 \cosh^2(\varkappa a) + 4(k^2 - \varkappa^2)^2 \operatorname{senh}^2(\varkappa a)} = T$$

si $\varkappa a$ es grande, $\cosh \varkappa a \sim \frac{1}{2} e^{\varkappa a}$, $\operatorname{senh} \varkappa a \sim \frac{1}{2} e^{\varkappa a}$

$$\rightarrow T \approx \frac{4 k^2 \varkappa^2}{4 k^2 \varkappa^2 \frac{1}{2} e^{\varkappa a} + 4 (k^2 - \varkappa^2)^2 \frac{1}{2} e^{\varkappa a}} \boxed{\approx e^{-2\varkappa a}}$$

b)

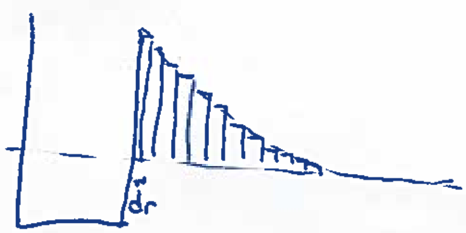


Encuentre la probabilidad que una partícula escape del pozo.

<u>Sol:</u> $-\frac{\hbar^2}{2m}u'' + V(r)u = Eu$ con $R(r) = \frac{u(r)}{r}$, $\psi = R(r)\, Y_\ell^m(\theta,\phi)$

<u>Para $r<a$:</u> $u'' + \underbrace{\frac{2m}{\hbar^2}(E+V_0)}_{k^2}u = 0 \Rightarrow u(r) = A\,\mathrm{sen}(kr)$

<u>Para $r>a$:</u> Dividimos el potencial en potenciales más pequeños:



Para el primer rectángulo:

$\Big\}\ T \sim e^{-2k_1 r}$

donde $k_1^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(V_1 - E)$.

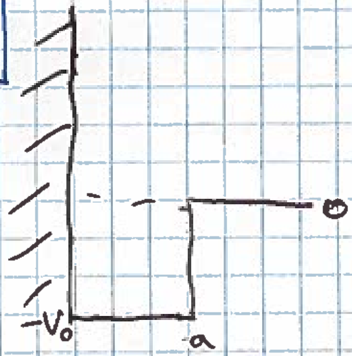
luego la probabilidad de pasar un dr de la barrera:

$$dP = \exp\left(-2dr\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_1 - E)}\right)$$

entonces la probabilidad de pasar la barrera:

$$\boxed{P \approx \exp\left(-2\underbrace{\int_a^b dr\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V(r)-E)}}_{G\,:\ \text{Factor de Gamow}}\right)}$$

P4



$$V(x) = \begin{cases} \infty & x<0 \\ -V_0 & 0<x<a \\ 0 & a<x \end{cases}$$

a) Ecuación para estado ligado

b) Mínimo valor de V_0 para que exista estado ligado

c) Estudie el caso $E>0$. Escriba una expresión para la función de onda y encuentre una ecuación que caracterice la energía.

Sol: a) Tenemos: $\displaystyle -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi + V\psi = -|E|\psi$

$0<x<a$: $\quad \psi'' + \underbrace{\frac{2m}{\hbar^2}(V_0-|E|)}_{k^2}\psi = 0 \quad \Big\}$ Recordar que $V_0>|E|$

$\Rightarrow \psi(x) = A\,\mathrm{sen}(kx+\delta)$

Borde: $\psi(x=0)=0 = A\,\mathrm{sen}(\delta) \Rightarrow \delta=0 \Rightarrow \psi(x<a) = A\,\mathrm{sen}(kx)$

$a<x$: $\quad \psi' - \underbrace{\frac{2m|E|}{\hbar^2}}_{K^2}\psi = 0 \quad \Rightarrow \psi(a<x) = Be^{-Kx}$

Ahora imponemos continuidad:

$$\frac{\psi'(a^-)}{\psi(a^-)} = \frac{\psi'(a^+)}{\psi(a^+)}$$

$$\frac{\cancel{A}k\cos(ka)}{\cancel{A}\,\mathrm{sen}(ka)} = \frac{-\cancel{B}Ke^{-\cancel{Ka}}}{\cancel{B}e^{-\cancel{Ka}}} \quad \Big\} \quad \boxed{K\tan(ka) = -k} \quad (*)$$

Queda la relación para obtener $|E|$ a partir de datos conocidos.

b) Veamos el límite en que desaparece el estado ligado:

$$|E| \to 0 \quad \Rightarrow \quad K \to 0 \quad \Rightarrow k^2 \to \frac{2m}{\hbar}V_0 = \text{cte} > 0$$

Si en (*) γ tiende a 0 pero k es una cte, entonces la tangente tiende a infinito, que ocurre cuando:

$$ka \to \pi/2$$

remplazando: $\frac{2mV_{0,min}}{\hbar^2} a^2 = \frac{\pi^2}{4} \Rightarrow \boxed{V_{0,min} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{8ma^2}}$

c) Para $E > 0$:

<u>$0 < x < a$:</u> $\psi(x) = A \operatorname{sen}(k_1 x)$ con $k_1^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 + E)$

<u>$a < x$:</u> $\psi'' + \underbrace{\frac{2mE}{\hbar^2}}_{k_2^2} \psi = 0 \to \psi(x) = B \operatorname{sen}(k_2 x + \delta)$

Imponiendo continuidad: $\frac{\psi'(a^-)}{\psi(a^-)} = \frac{\psi'(a^+)}{\psi(a^+)}$

$$\frac{\cancel{A} k_1 \cos(k_1 a)}{\cancel{A} \operatorname{sen}(k_1 a)} = \frac{\cancel{B} k_2 \cos(k_2 a + \delta)}{\cancel{B} \operatorname{sen}(k_2 a + \delta)}$$

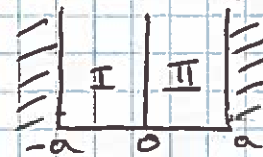
$$\to k_2 \tan(k_1 a) = k_1 \tan(k_2 a + \delta)$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta = -k_2 a + \arctan\left(\frac{k_2}{k_1} \tan(k_1 a)\right)}$$

Notar que $k_1^2 = \frac{2mV_0}{\hbar^2} + k_2^2$

P9/ a) Considere el pozo infinito con una delta en su centro, encuentre expresiones que caractericen la energía.

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < -a \\ \alpha\delta(x) & -a < x < a \\ \infty & a < x \end{cases}$$



Sol: Dentro del pozo: $\psi'' + \underbrace{\frac{2mE}{\hbar^2}}_{k^2}\psi = 0$

Como es un potencial simetrico, puedo separar el problema en soluciones pares e impares:

Impar: $\psi_I(x) = A\,\text{sen}\,kx + B\cos kx$

$\psi_{II}(x) = A\,\text{sen}\,kx - B\cos kx$

Por continuidad en $x=0$: $A\,\cancel{\text{sen}}\,0 + B\,\cancel{\cos}\,0 = A\,\cancel{\text{sen}}\,0 - B\,\cancel{\cos}\,0$

$B = -B \Rightarrow B = 0$

La derivada ya es continua, por lo que no nos da información.

Vemos los bordes: $\psi_{II}(a) = A\,\text{sen}(ka) = 0 \Rightarrow ka = n\pi$

$$\Rightarrow \boxed{E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}}$$

Par: $\psi_I(x) = A\,\text{sen}\,kx + B\cos kx$

$\psi_{II}(x) = -A\,\text{sen}\,kx + B\cos kx$

Los bordes: $\psi_{II}(a) = -A\,\text{sen}\,ka + B\cos ka = 0 \Rightarrow \tan(ka) = \frac{B}{A}$ (*)

Ahora vemos la derivada en $x=0$:

$$\psi'(0^+) - \psi'(0^-) = \frac{2m\alpha}{\hbar^2}\psi(0)$$

$$-Ak\cos(0) - B\cancel{k\,\text{sen}(0)} - Ak\cos(0) + B\cancel{k\,\text{sen}(0)} = \frac{2m\alpha}{\hbar^2}\psi(0)$$

$$-\cancel{2}Ak = \frac{\cancel{2}m\alpha}{\hbar^2}B$$

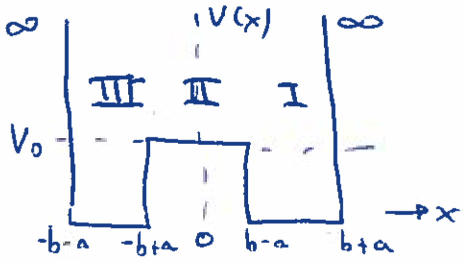
remplazando con (*):

$$\boxed{-\frac{\hbar^2 k}{m\alpha} = \tan(ka)}$$

¿Qué pasa si $\alpha \to \infty$?

b) Se tiene el potencial:

$$V(x) = \begin{cases} \infty & |x| > (a+b) \\ 0 & a+b > |x| > b-a \\ V_0 & \sim \end{cases}$$



Encuentre ecuaciones para la energía para $E < V_0$ y las fnes. de onda.

Sol: Separamos en solución par e impar.

Pares: • $a+b > x > b-a$: $\psi'' + \underbrace{\frac{2mE}{\hbar^2}}_{k_1^2}\psi = 0 \Rightarrow \underbrace{\psi_I(x) = A\,\text{sen}(k_1 x + \delta)}_{\text{aún no imponemos paridad}}$

dado que $\psi(a+b) = 0 = A\,\text{sen}(k_1(a+b)+\delta) \rightarrow \delta = -k_1(a+b)$

$\Rightarrow \psi_I(x) = A\,\text{sen}(k_1(x-a-b))$

• $|x| < b-a$: $\psi'' - \underbrace{\frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)}_{k_2^2}\psi = 0 \Rightarrow \underbrace{\psi_{II}(x) = B\cosh(k_2 x)}_{\text{par}}$

• $-(b+a) < x < -b+a$; Ahora sí imponemos la paridad con la región I.

$$\psi_{III}(x) = -A\,\text{sen}(k_1(x+a+b))$$

que ya satisface $\psi(-a-b) = 0$

Ahora imponemos continuidad en $x = b-a$:

$$\frac{\psi_I'(b-a)}{\psi_I(b-a)} = \frac{\psi_{II}'(b-a)}{\psi_{II}(b-a)}$$

$$\frac{\cancel{A}k_1\cos(k_1(\cancel{b}-a-a-\cancel{b}))}{\cancel{A}\,\text{se}(k_1(-2a))} = \frac{\cancel{B}k_2\,\text{senh}(k_2(b-a))}{\cancel{B}\cosh(k_2(b-a))}$$

$$\frac{A\cos(2ak_1)k_1}{-\text{sen}(2ak_1)} = k_2\tanh(k_2(b-a))$$

$$\boxed{k_1\cot(2k_1 a) = -k_2\tanh(k_2(b-a))}$$

Impares:

- $\psi_{I}(x) = A \operatorname{sen}(k_1(x-a-b))$ } aun no imponemos que es impar
- $\psi_{II}(x) = B \operatorname{senh}(k_2 x)$ } impar
- $\psi_{III}(x) = A \operatorname{sen}(k_1(x+a+b))$

Ahora imponemos continuidad:

$$\frac{\cancel{A} k_1 \cos(-2ak_1)}{\cancel{A} \operatorname{sen}(-2ak_1)} = \frac{\cancel{B} k_2 \cosh(k_2(b-a))}{\cancel{B} \operatorname{senh}(k_2(b-a))}$$

$$\boxed{-k_1 \cot(2ak_1) = k_2 \coth(k_2(b-a))}$$