



FACULTAD DE FÍSICA
PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATÓLICA DE CHILE

Dinámica (FIS1514)

Trabajo y energía

Felipe Isaule

felipe.isaule@uc.cl

Lunes 25 de Septiembre de 2023

Resumen clase anterior

- Presentamos la fuerza de **roce estático** y la fuerza de **roce dinámico**.
- Terminamos la unidad de **Dinámica**.

Clase de hoy

- Trabajo.
- Energía cinética y método de trabajo-energía.

Clase de hoy

- **Trabajo.**
- Energía cinética y método de trabajo-energía.

Producto punto

- Antes de definir trabajo, recordamos la definición de **producto punto** entre dos vectores.
- Si tenemos dos vectores en cartesianas:

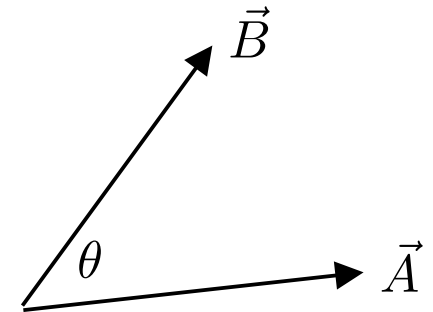
$$\vec{A} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}, \quad \vec{B} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}$$

- El producto punto es un escalar, y se define como:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

- También podemos escribir

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \theta$$



- Notar que el **producto punto entre vectores ortogonales es cero.**

Trabajo

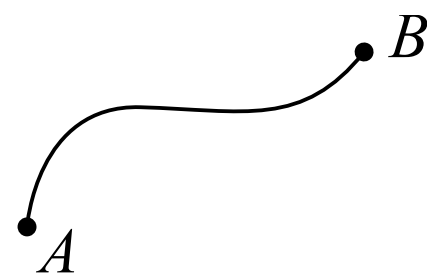
- El **trabajo** dW efectuado por una **fuerza** F aplicada a un cuerpo que se desplaza una **distancia** $d\vec{r}$ es

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

↖
Producto punto

- El trabajo realizado por una fuerza desde un punto A a uno B ,

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$



Trayectoria (o camino) seguido por el cuerpo desde A a B.

- El trabajo es un **escalar**.
- Sus unidad en el SI es el **Joule**.

$$J = \text{kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

Trabajo

- Una integral del tipo

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

se llama **integral del línea**.

- Debido al producto punto, sólo los componentes de la fuerza **paralelos al desplazamiento** producen trabajo.
- Es decir, **fuerzas ortogonales al desplazamiento no generan trabajo**.

- Entonces, podemos escribir

$$W_{A \rightarrow B} = \int_{s_A}^{s_B} F_t ds$$

donde F_t es la componente de la fuerza paralela al desplazamiento, mientras que ds parametriza la trayectoria.

Cálculo de trabajo en coordenadas cartesianas

- En **coordenadas cartesianas**, tenemos que

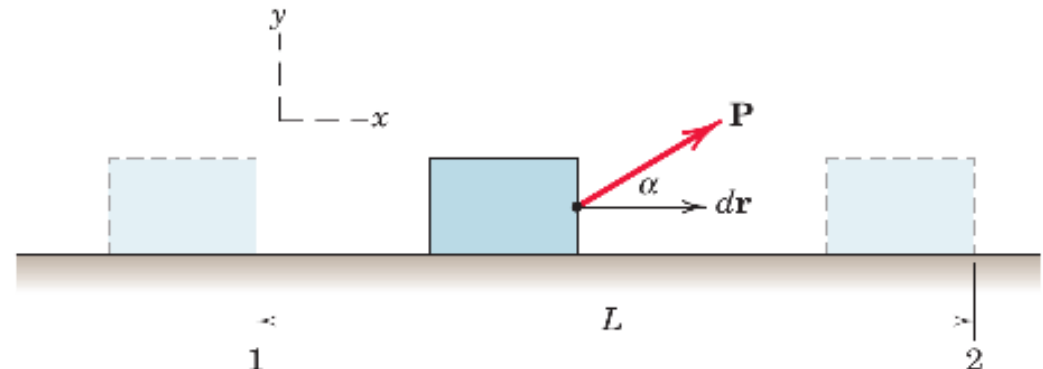
$$d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}.$$

- Pero debemos **imponer la dirección del desplazamiento**.

- Ejemplo: Si a un bloque se le aplica una fuerza P constante como muestra la figura, el trabajo realizado entre los puntos 1 y 2 es:

$$\begin{aligned} W_{1 \rightarrow 2} &= \int_1^2 \vec{P} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 (P \cos \alpha \hat{i} + P \sin \alpha \hat{j}) \cdot (dx \hat{i}) \\ &= \int_{x_1}^{x_2} P \cos \alpha dx = P \cos \alpha (x_2 - x_1) = P L \cos \alpha \end{aligned}$$

Movimiento es sólo en x



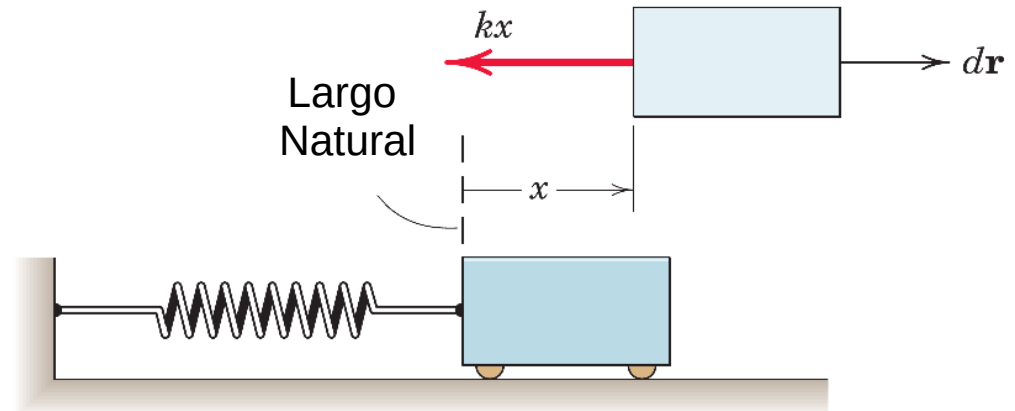
Trabajo producido por un resorte

- Si se tiene un cuerpo atado a un resorte de constante elástica k como muestra la figura, el trabajo realizado entre dos puntos 1 y 2:

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{x_1}^{x_2} k x dx = -\frac{k}{2}(x_2^2 - x_1^2)$$

$$\vec{F} = -k x \hat{i}$$
$$d\vec{r} = dx \hat{i}$$

- El trabajo depende sólo de las posiciones iniciales y finales.



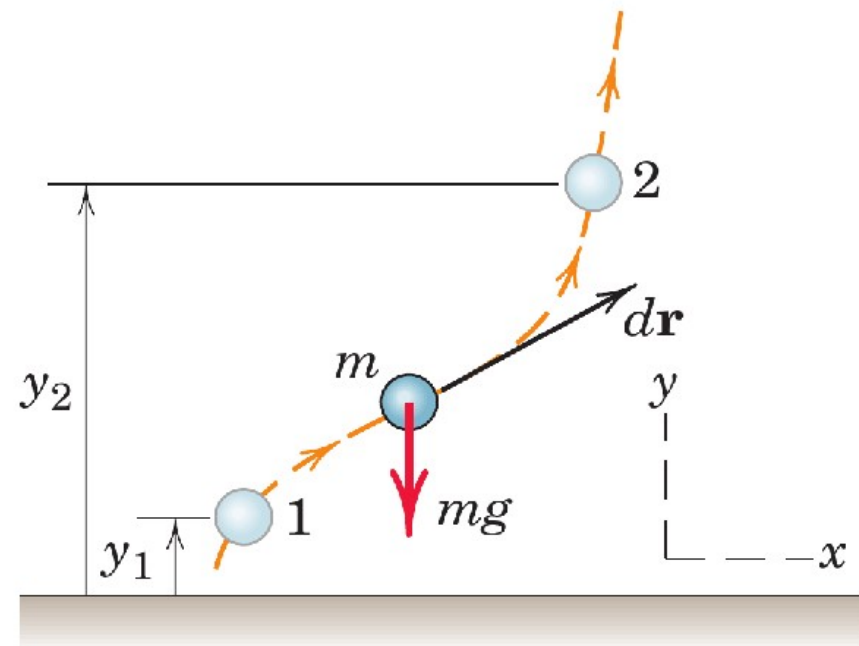
Trabajo debido al peso

- Si un cuerpo de masa m cae en un plano a través de una trayectoria (ver figura), el trabajo debido al peso es:

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{y_1}^{y_2} m g dy = -m g (y_2 - y_1)$$

$$d\vec{r} = dx \hat{i} + dy \hat{j}$$
$$\vec{F} = -m g \hat{j}$$

- El trabajo depende sólo de la **diferencia de alturas**.



Clase de hoy

- Trabajo.
- **Energía cinética y método de trabajo-energía.**

Energía cinética

- Si consideramos todas las fuerzas aplicadas a un cuerpo, por la segunda ley de Newton tenemos que:

$$\begin{aligned}W_{A \rightarrow B} &= \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B m \vec{a} \cdot d\vec{r} \\ &= m \int_A^B \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = m \int_A^B \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt \\ &= m \int_{\vec{v}_A}^{\vec{v}_B} d\vec{v} \cdot \vec{v} = \frac{m}{2} \int_{v_A^2}^{v_B^2} dv^2\end{aligned}$$

$$W_{A \rightarrow B} = \frac{m}{2} (v_B^2 - v_A^2)$$

- El **trabajo total realizado** entre dos puntos depende de la **diferencia entre los cuadrados de la rapidez**.

Energía cinética

- La **energía cinética** de un cuerpo en un punto es

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

- El **trabajo total** realizado por un cuerpo entre dos puntos A y B es igual a la **diferencia entre las energías cinéticas**:

$$W_{A \rightarrow B} = T_B - T_A$$

que corresponde a la **ecuación de trabajo-energía** de un cuerpo.

- Resolver problemas de dinámica utilizando esta ecuación se denomina el **método de trabajo-energía**.

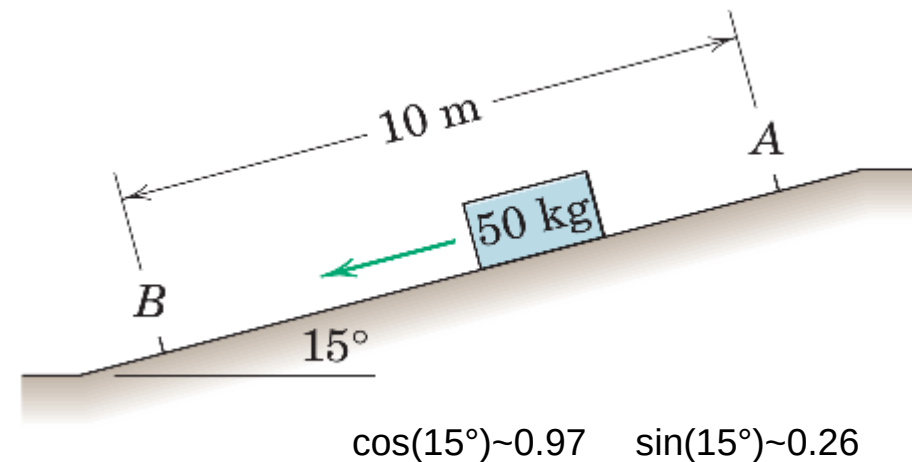
Receta del método de trabajo-energía

- 1) Identificar los **puntos iniciales y finales** del movimiento.
- 2) Identificar las fuerzas, o componentes de las fuerzas, que **realizan trabajo**.
- 3) Calcular el **trabajo realizado** y/o las **energías cinéticas** en los puntos iniciales y finales.
- 4) Despejar las **incógnitas**.

$$W_{A \rightarrow B} = T_B - T_A$$

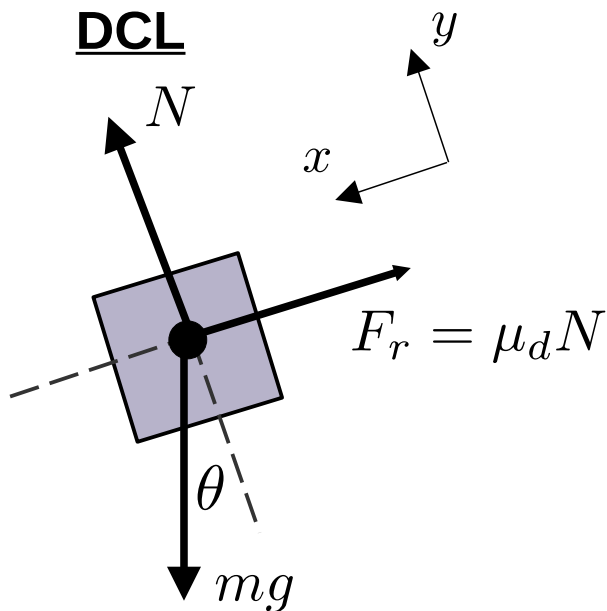
Ejemplo:

- Calcule la **rapidez** de un bloque de 50kg cuando llega al punto *B* (ver figura) si la **rapidez inicial** en *A* es $v_A=4$ m/s . Considere un coeficiente de roce dinámico de $\mu_d=0.30$.



Ejemplo:

- Calcule la **rapidez** de un bloque de 50kg cuando llega al punto B (ver figura) si la **rapidez inicial** en A es $v_A=4$ m/s . Considere un coeficiente de roce dinámico de $\mu_d=0.30$.



Fuerzas

Peso : $\vec{P} = mg \sin \theta \hat{i} - mg \cos \theta \hat{j}$

Normal : $\vec{N} = mg \cos \theta \hat{j}$

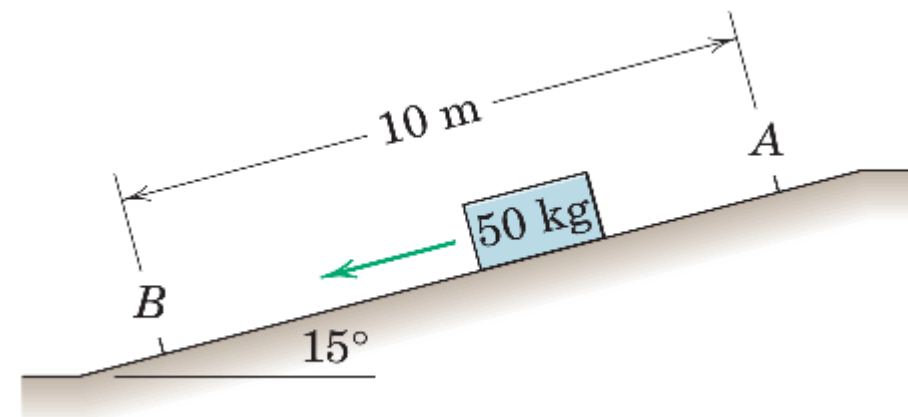
Roce : $F_r = -\mu_d m g \cos \theta \hat{i}$

Debido a que el desplazamiento es en x. Sólo el roce y el componente en x del Peso contribuyen al trabajo.

Ecuaciones de movimiento

$$x : F_x = mg \sin \theta - \mu_d N = ma_x$$

$$y : F_y = N - mg \cos \theta = 0$$



$$\cos(15^\circ) \sim 0.97 \quad \sin(15^\circ) \sim 0.26$$

Ejemplo:

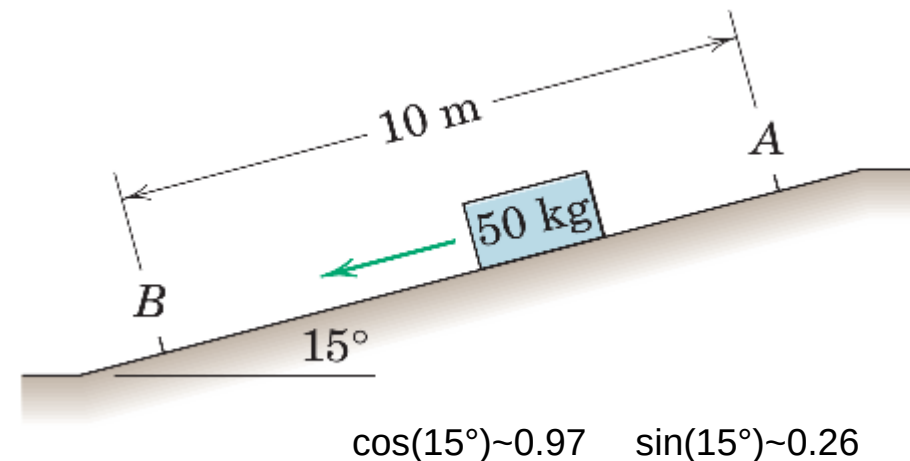
- Calcule la **rapidez** de un bloque de 50kg cuando llega al punto **B** (ver figura) si la **rapidez inicial** en **A** es $v_A=4$ m/s . Considere un coeficiente de roce dinámico de $\mu_d=0.30$.

Trabajo

El trabajo realizado entre **A** y **B**:

$$\begin{aligned} W_{A \rightarrow B} &= \int_{x_A}^{x_B} F_x dx = \int_{x_A}^{x_B} \overbrace{(mg \sin \theta)}^{\text{Componente en x del Peso}} - \overbrace{\mu_d mg \cos \theta}^{\text{Roce}} dx \\ &= mg(\sin \theta - \mu_d \cos \theta)(x_B - x_A) \\ &= -151.9 \text{ J} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_A &= 0 \\ x_B &= 10 \text{ m} \end{aligned}$$



$$\cos(15^\circ) \sim 0.97 \quad \sin(15^\circ) \sim 0.26$$

Ejemplo:

- Calcule la **rapidez** de un bloque de 50kg cuando llega al punto **B** (ver figura) si la **rapidez inicial** en **A** es $v_A=4$ m/s . Considere un coeficiente de roce dinámico de $\mu_d=0.30$.

Trabajo

$$W_{A \rightarrow B} = -151.9 \text{ J}$$

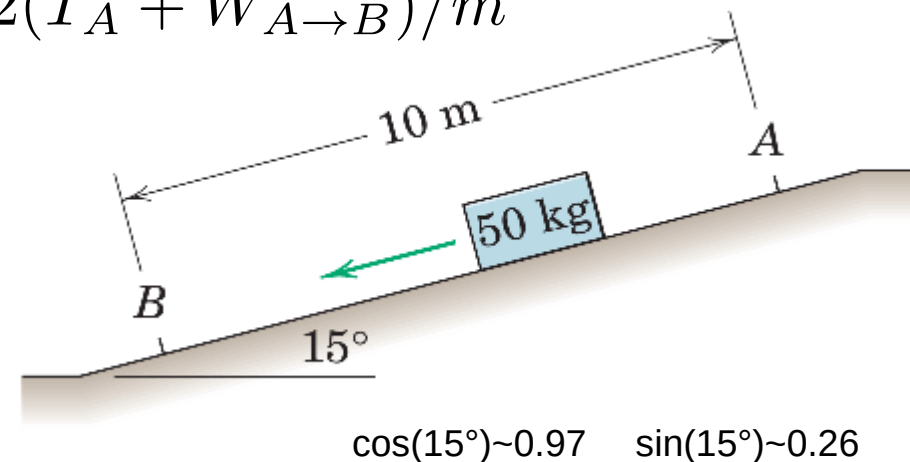
Energía cinética

$$T_A = \frac{1}{2} m v_A^2 = 400 \text{ J}$$

Ecuación trabajo-energía

$$W_{A \rightarrow B} = T_B - T_A \quad \longrightarrow \quad v_B = \sqrt{2(T_A + W_{A \rightarrow B})/m}$$

$$\longrightarrow \quad v_B = 3.15 \text{ m/s}$$



Ventajas del método de trabajo-energía

- El ejemplo anterior se podría haber resuelto utilizando leyes de Newton y cinemática.
- Sin embargo, para obtener la rapidez tendríamos que haber resuelto integrales más complicadas para resolver la cinemática.
- El método de trabajo-energía **permite resolver problemas sin tener que integrar la aceleración.**

Resumen

- Hemos definido el concepto de **trabajo** realizado por fuerzas.
- Hemos introducido el concepto de **energía cinética**.
- Presentamos el **método de trabajo-energía** para resolver problemas de dinámica.
- Próxima clase:
 - Energía potencial y conservación de energía.