FACULTAD DE FÍSICA
PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATÓLICA DE CHILE

Dinámica (FIS1514)

Centro de masa y sistemas con masa variable

Felipe Isaule

felipe.isaule@uc.cl

Lunes 30 de Octubre de 2023

Resumen clase anterior

- Revisamos las colisiones **elásticas** e **inelásticas**.
- Definimos el concepto de **impacto**, incluyendo los impactos **centrales** y **obliquos**.
- Introducimos el **coeficiente de restitución**.

Clase de hoy

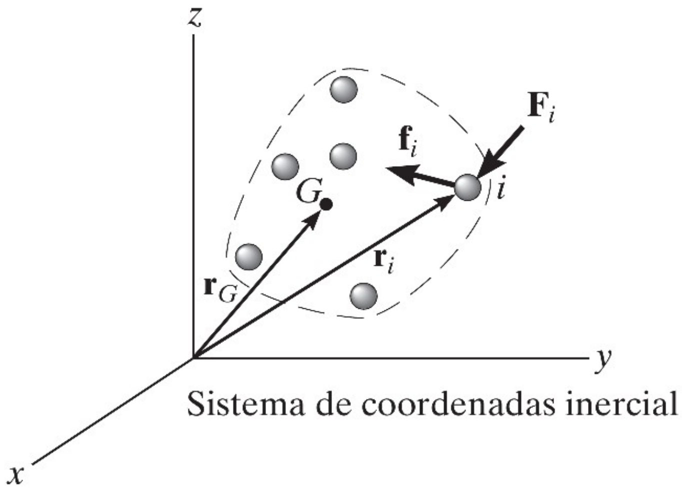
- Centro de masa.
- Sistemas con masa variable.

Clase de hoy

- **Centro de masa.**
- Sistemas con masa variable.

Centro de masa

- Cuando tenemos un **sistema de partículas**, la **posición** del **centro de masa** corresponde a



$$\boxed{\vec{r}_{\mathrm{G}} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{m}}$$

donde m es la masa total del sistema

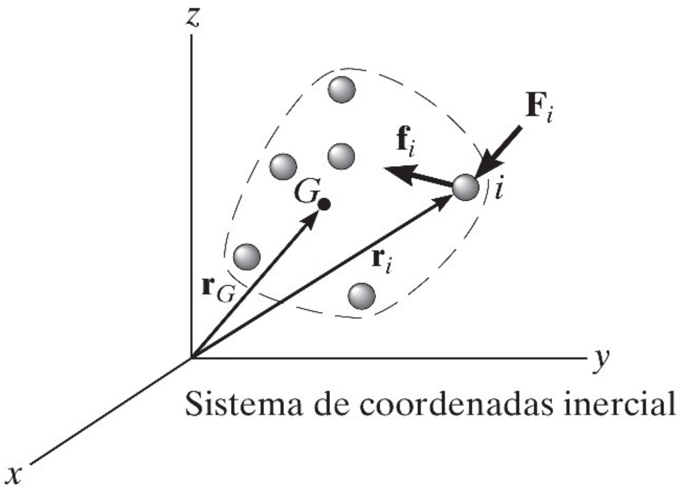
$$m = \sum_i m_i$$

- Las **velocidades** y **aceleraciones** del centro de masa:

$$\vec{v}_{\mathrm{G}} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{m} \qquad \vec{a}_{\mathrm{G}} = \frac{\sum_i m_i \vec{a}_i}{m}$$

Momentum e impulso del centro de masa

- La **segunda Ley de Newton** para un sistema de partículas toma la forma



$$\sum_i \vec{F}_{i,\mathrm{ext}} = \sum_i \dot{\vec{p}}_i = \sum_i m_i \vec{a}_i$$

Masas constantes

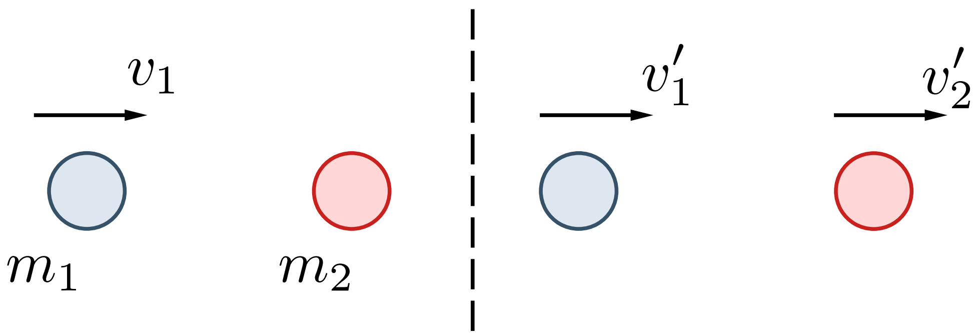
- La **principio de impulso-momentum** se puede escribir como

$$\sum_i \vec{I}_{\mathrm{i,ext}} = \sum_i \Delta\vec{p}_i \longrightarrow \boxed{\sum_i \vec{I}_{\mathrm{i,ext}} = \Delta\vec{p}_G}$$

Momentum
Centro de masa

Momentum del centro de masa

- En el choque elástico de la figura (clase anterior)



$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

- El momentum del centro de masa se **conserva**

Antes del choque

$$p_G = m v_G = m_1 v_1$$

$$m_1 + m_2 \qquad \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

$$=$$

Después del choque

$$p_G' = m v_G' = m_1 v_1$$

$$m_1 + m_2 \qquad \frac{m_1 v_1' + m_2 v_2'}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

- Si **no hay impulsos externos**, el **momentum del centro de masa se conserva.**

Clase de hoy

- Centro de masa.
- **Sistemas con masa variable.**

Sistemas de masa variable

- Un cuerpo puede tener **masa variable**, es decir, su **masa varía con el tiempo**.
- En este caso, la ecuación de movimiento toma la forma

$$\boxed{\sum \vec{F}_{\mathrm{ext}} + \vec{v}_{\mathrm{rel}}\dot{m} = m\vec{a}} \qquad \dot{m} = \frac{dm}{dt}$$

  donde son F_{ext} son las **fuerzas externas**, y v_{rel} es la **velocidad relativa** con que la masa está escapando (o ingresando) del cuerpo.

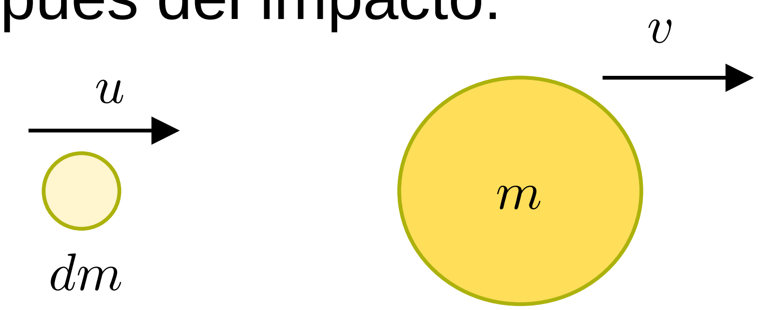
- Se puede entender como la segunda Ley de Newton para un sistema de partículas.

Cuerpo ganando masa

- Un cuerpo con **masa variable** m se mueve **inicialmente con velocidad** v. Si otro cuerpo de **masa** dm se mueve con velocidad u, el momentum total antes y después del impacto:

$$\vec{p} = m\vec{v} + dm\,\vec{u}$$

$$\vec{p}\,' = (m + dm)(\vec{v} + d\vec{v})$$



- Entonces

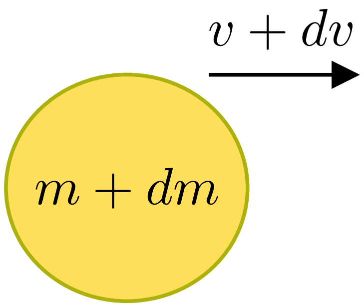
$$d\vec{p} = \vec{p}\,' - \vec{p} = m\vec{v} + m d\vec{v} + dm\,\vec{v} + dm\,\overset{\text{Muy pequeño}}{\cancel{d\vec{v}}} - m\vec{v} - dm\,\vec{u}$$
$$= m d\vec{v} - (\vec{u} - \vec{v}) dm$$

- Por la segunda Ley

$$\boxed{\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} - \underbrace{(\vec{u} - \vec{v})}_{\vec{v}_{\text{rel}}}\frac{dm}{dt}}$$

Cuerpo perdiendo masa

- Un cuerpo con **masa variable** m se mueve **inicialmente con velocidad** v. Si el cuerpo pierde una **masa** dm con velocidad u, el momentum total antes y después del impacto:



$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$$\vec{p}' = (m + dm)(\vec{v} + d\vec{v}) + \vec{u}(-dm)$$

- Entonces

Muy pequeño

$$d\vec{p} = \vec{p}' - \vec{p} = m\vec{v} + md\vec{v} + dm\,\vec{v} + \cancel{dm}\,d\vec{v} - \vec{u}dm - m\vec{v}$$
$$= md\vec{v} - (\vec{u} - \vec{v})dm$$

- Obtenemos lo mismo

$$\boxed{\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} - (\vec{u} - \vec{v})\frac{dm}{dt}}$$

$\vec{v}_{\text{rel}}$

Ejemplo 1

- La **masa inicial combinada** de un cohete y su combustible es m_0 . Una **masa** total m_f se **consume** a una **proporción constante** de $dm_e/dt = c$ y se **expele** a una **tasa constante** de u con **respecto al cohete**. Determine la **velocidad máxima** que alcanza el cohete. El cohete se lanza **verticalmente** desde el punto de **reposo**.

Ejemplo 1

- La **masa inicial combinada** de un cohete y su combustible es m_0 . Una **masa** total m_f se **consume** a una **proporción constante** de $dm_e/dt = c$ y se **expele** a una **tasa constante** de u con **respecto al cohete**. Determine la **velocidad máxima** que alcanza el cohete. El cohete se lanza **verticalmente** desde el punto de **reposo**.

Las fuerzas externas aplicadas sobre el cohete:

$$F_{\text{ext}} = -m(t)g$$

El cohete pierde masa en el tiempo:

$$m(t) = m_0 - \frac{dm_e}{dt}t = m_0 - ct$$

Masa inicial

Masa perdida en cada instante

La ecuación de movimiento:

$$F_{\text{ext}} + v_{\text{rel}}\dot{m} = ma \longrightarrow -(m_0 - ct)g + uc = (m_0 - ct)\frac{dv}{dt}$$

$$-u \qquad \dot{m} = -c$$

Ejemplo 1

- La **masa inicial combinada** de un cohete y su combustible es m_0 . Una **masa** total m_f se **consume** a una **proporción constante** de $dm_e/dt = c$ y se **expele** a una **tasa constante** de u con **respecto al cohete**. Determine la **velocidad máxima** que alcanza el cohete. El cohete se lanza **verticalmente** desde el punto de **reposo**.

Integramos para obtener la velocidad en función del tiempo:

$$\int_0^v dv' = \int_0^t \left(-g + \frac{uc}{m_0 - ct'}\right) dt'$$

$$\longrightarrow \qquad v(t) = u \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - ct}\right) - gt$$

La velocidad máxima se alcanza cuando se agota todo el combustible:

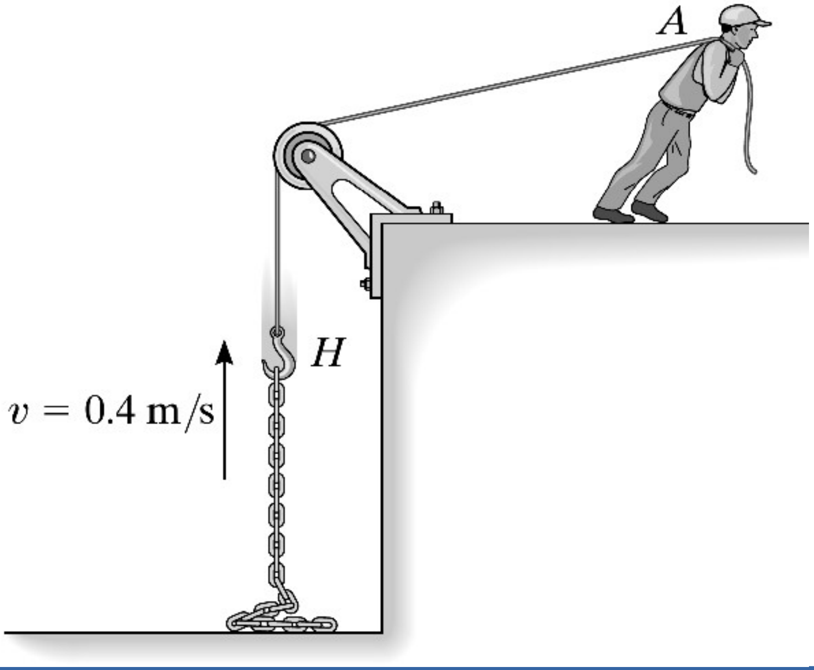
$$m_f = \frac{dm_e}{dt} t^* = ct^* \qquad \longrightarrow \qquad t^* = m_f/c$$

Entonces, la velocidad máxima:

$$\longrightarrow \qquad \boxed{v(t) = u \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - m_f}\right) - g\frac{m_f}{c}}$$

Ejemplo 2

- Determine la **fuerza en función del tiempo** con que se debe levantar una cadena con **densidad** $\rho = 2$ kg/m para que suba a una **velocidad** v =0.4 m/s **constante**.

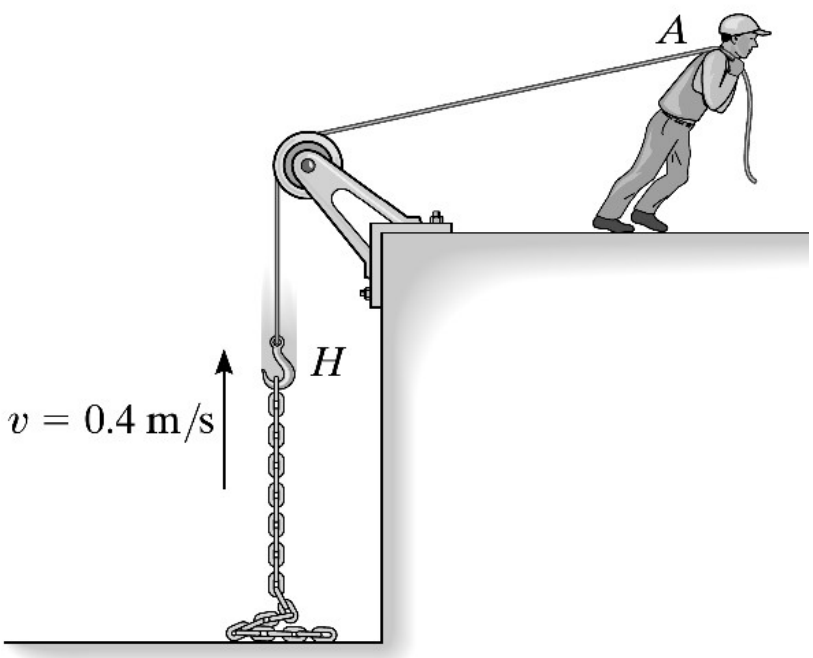


Ejemplo 2

- Determine la **fuerza en función del tiempo** con que se debe levantar una cadena con **densidad** $\rho = 2$ kg/m para que suba a una **velocidad** v =0.4 m/s **constante**.

Las fuerzas externas aplicadas sobre la parte levantada de la cadena:

$$F_{\text{ext}} = T - m(t)g = F - m(t)g$$



La masa de la cadena:

$$m(t) = \rho h(t) = \rho v t$$

La ecuación de movimiento:

$$F_{\text{ext}} + v_{\text{rel}}\dot{m} = m\cancelto{0}{a}$$

Usamos que: $\dot{m} = \rho v$ $\quad v_{\text{rel}} = -v$

Obtenemos

$$\boxed{F = \rho v(tg + v)}$$

$$F = \left(0.32 + 7.84t\frac{1}{\text{s}}\right)\text{N}$$

Resumen

- Definimos el **centro de masa** de un sistema de partículas.
- Estudiamos sistemas con **masa variable**.
- Próxima clase:
  - ➔ Sólido rígido..