FACULTAD DE FÍSICA
PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATÓLICA DE CHILE

Dinámica (FIS1514)

Ejemplos momentum y masa variable

Felipe Isaule

felipe.isaule@uc.cl

Lunes 6 de Noviembre de 2023

Resumen clase anterior

- Definimos el **centro de masa** de un sistema de partículas.
- Revisamos problemas con **masa variable**.

Clase de hoy

- Ejemplos colisiones oblicuas.
- Ejemplos sistemas con masa variable.

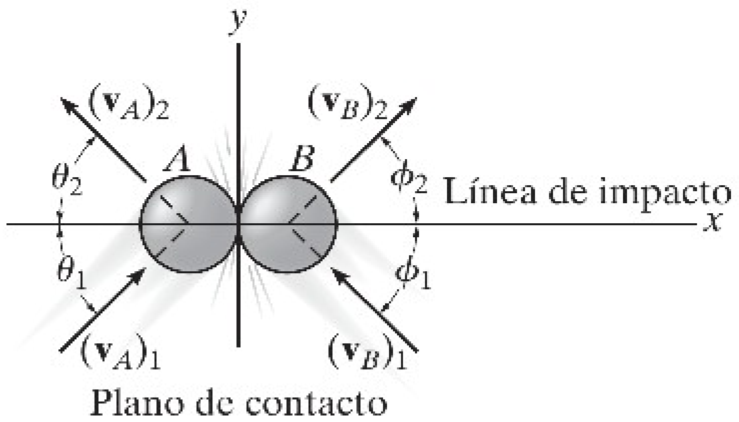
Clase de hoy

- **Ejemplos colisiones oblicuas.**
- Ejemplos sistemas con masa variable.

Impactos obliquos

- En un impacto obliquo

$$m_A \vec{v}_{A,1} + m_B \vec{v}_{B,1} = m_A \vec{v}_{A,2} + m_B \vec{v}_{B,2}$$



- El **momentum se conserva en cada coordenada**:

$$m_A v_{A,1,x} + m_B v_{B,1,x} = m_A v_{A,2,x} + m_B v_{B,2,x}$$

$$m_A v_{A,1,y} + m_B v_{B,1,y} = m_A v_{A,2,y} + m_B v_{B,2,y}$$

- Pero sólo **se produce deformación en el eje de impacto.** En el ejemplo de la figura:

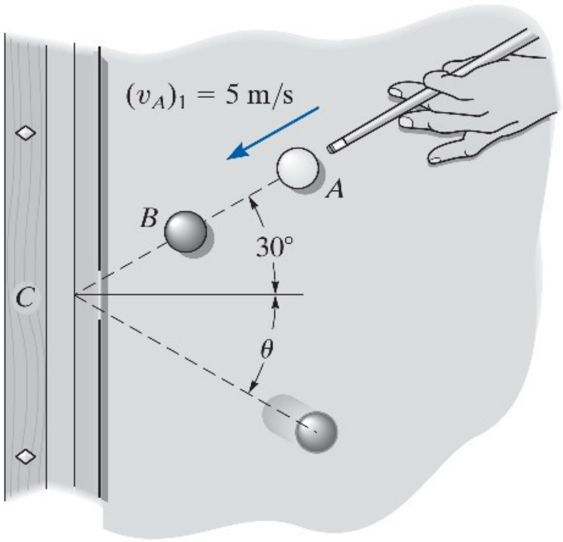
$$e = \frac{v_{B,2,x} - v_{A,2,x}}{v_{A,1,x} - v_{B,1,x}}$$

$$m_A v_{A,1,y} = m_A v_{A,2,y}$$

$$m_B v_{B,1,y} = m_B v_{B,2,y}$$

Ejemplo 1

- A la bola *A* se le confiere una **velocidad inicial** de $(v_A)_1 = 5m/s$. Si choca directamente con la bola *B* que se encuentra en **reposo** y con un **coeficiente de restitución** $e = 0.8$, determine la **velocidad** de *B* y el **ángulo** después de chocar con el borde si éste último choque tiene un **coeficiente de restitución** $e' = 0.6$. Considere que cada bola tiene una masa de 4kg .



Ejemplo 1

- A la bola *A* se le confiere una **velocidad inicial** de $(v_A)_1 = 5 m/s$. Si choca directamente con la bola *B* que se encuentra en **reposo** y con un **coeficiente de restitución** $e = 0.8$, determine la **velocidad** de *B* y el **ángulo** después de chocar con el borde si éste último choque tiene un **coeficiente de restitución** $e' = 0.6$. Considere que cada bola tiene una masa de 4kg .

Primero analizamos el choque *AB*.
Este choque es central.

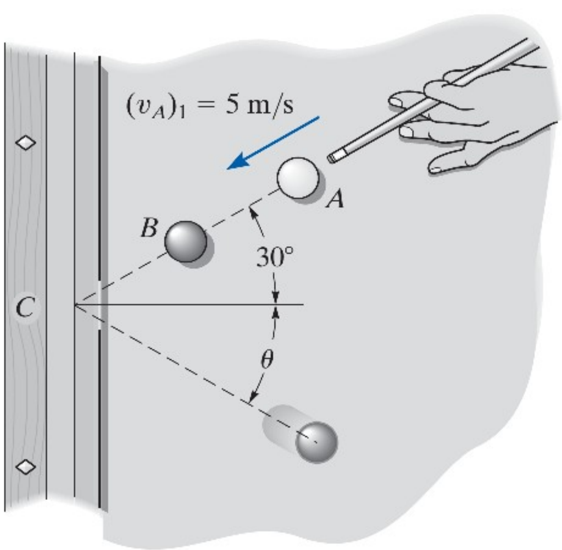
Conservación del momentum:

$$m_A(v_A)_1 = m_A(v_A)_2 + m_B(v_B)_2$$

Utilizando coeficiente de restitución:

$$e = \frac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{(v_A)_1}$$

$$\longrightarrow \quad (v_A)_2 = (v_B)_2 - e(v_A)_1$$



$$m_A(v_A)_1 = m_A(v_B)_2 - m_A e(v_A)_1 + m_B(v_B)_2$$

$$\longrightarrow \quad (v_B)_2 = \frac{m_A(1+e)}{m_A + m_B}(v_A)_1 = 4.5\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\longrightarrow \quad (v_A)_2 = 0.5\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

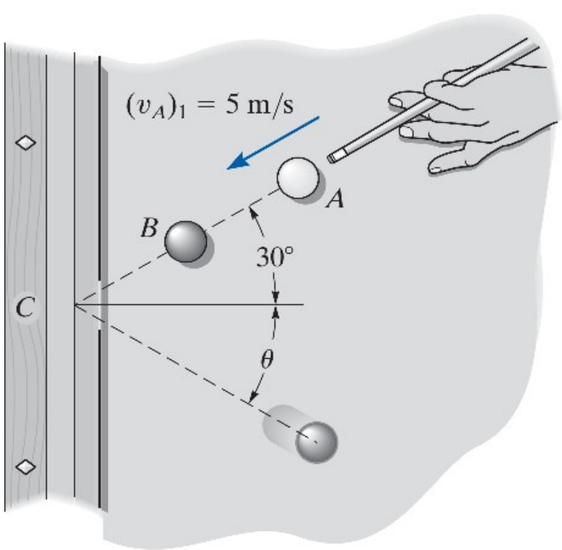
Ejemplo 1

- A la bola *A* se le confiere una **velocidad inicial** de $(v_A)_1 = 5m/s$. Si choca directamente con la bola *B* que se encuentra en **reposo** y con un **coeficiente de restitución** $e = 0.8$, determine la **velocidad** de *B* y el **ángulo** después de chocar con el borde si éste último choque tiene un **coeficiente de restitución** $e' = 0.6$. Considere que cada bola tiene una masa de 4kg.

Ahora analizamos el choque *AC*.
Este choque es oblicuo.

Conservación del momentum eje *y*:

$$m_B (v_B)_2 \sin 30° = m_B (v_B)_3 \sin\theta$$



Utilizando coeficiente de restitución eje *x*:

$$e' = \frac{[-(v_B)_3 \cos\theta]}{-(v_B)_2 \cos 30°}$$

$$(v_B)_3 \cos\theta = e'(v_B)_2 \cos 30° \approx 2.34 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$(v_B)_3 \sin\theta = (v_B)_2 \sin 30° = 2.25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

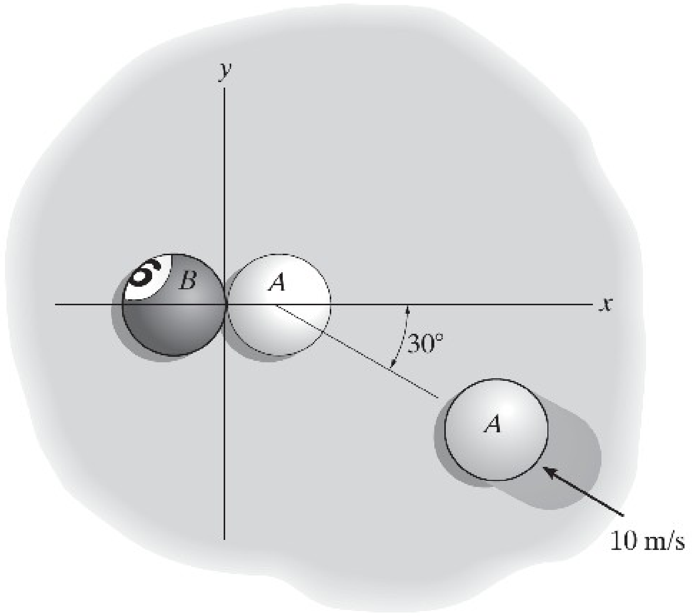
Despejando desde ambas ecuaciones:

$$\tan\theta = \frac{1}{e'} \tan 30° \longrightarrow \boxed{\theta = \arctan\left(\frac{1}{e'} \tan 30°\right) \approx 44°}$$

$$\longrightarrow \quad (v_B)_3 = \frac{(v_B)_2 \sin 30°}{\sin\theta} \boxed{\approx 3.24 \frac{\text{m}}{\text{s}}}$$

Ejemplo 2

- La bola de *A* se desplaza a una **velocidad** de $(v_A)_1$=10 m/s justo antes de golpear la bola *B*, la cual está en **reposo**. Si las **masas** de *A* y *B* son de *m*=200 g y el **coeficiente de restitución** entre ellas es *e*=0.8, determine la **velocidad** de las dos bolas justo **después del impacto**.



Ejemplo 2

- La bola de *A* se desplaza a una **velocidad** de $(v_A)_1$=10 m/s justo antes de golpear la bola *B*, la cual está en **reposo**. Si las **masas** de *A* y *B* son de *m*=200 g y el **coeficiente de restitución** entre ellas es *e*=0.8, determine la **velocidad** de las dos bolas justo **después del impacto**.

Conservación momentum eje *x*:

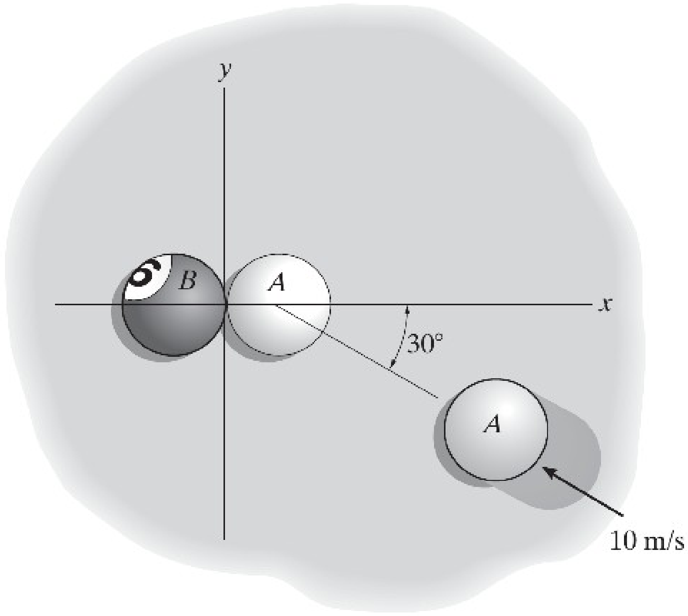
$$m(v_A)_1 \cos 30^\circ = m(v_A)_2 \cos\theta_A + m(v_B)_2 \cos\theta_B$$

Conservación momentum eje *y*:

$$m(v_A)_1 \sin 30^\circ = m(v_A)_2 \sin\theta_A$$

$$0 = m(v_B)_2 \sin\theta_B$$

$$\longrightarrow \quad \theta_B = 0$$



Coeficiente de restitución:

$$e = \frac{(v_B)_2 \cos\theta_B - (v_A)_2 \cos\theta_A}{(v_A)_1 \cos 30^\circ}$$

Obtenemos tres ecuaciones para las tres incógnitas:

$$\longrightarrow \quad m(v_A)_2 \cos\theta_A = m(v_A)_1 \cos 30^\circ - m(v_B)_2$$

$$\longrightarrow \quad m(v_A)_2 \sin\theta_A = m(v_A)_1 \sin 30^\circ$$

$$\longrightarrow \quad (v_A)_2 \cos\theta_A = (v_B)_2 - e(v_A)_1 \cos 30^\circ$$

Ejemplo 2

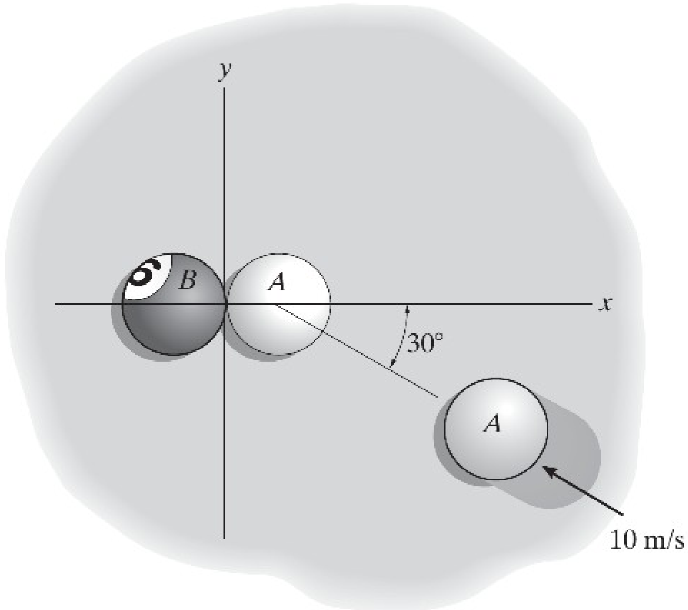
- La bola de *A* se desplaza a una **velocidad** de $(v_A)_1$=10 m/s justo antes de golpear la bola *B*, la cual está en **reposo**. Si las **masas** de *A* y *B* son de *m*=200 g y el **coeficiente de restitución** entre ellas es *e*=0.8, determine la **velocidad** de las dos bolas justo **después del impacto**.

Obtenemos tres ecuaciones para las tres incógnitas:

$$\longrightarrow \quad m(v_A)_2 \cos\theta_A = m(v_A)_1 \cos 30^\circ - m(v_B)_2$$

$$\longrightarrow \quad m(v_A)_2 \sin\theta_A = m(v_A)_1 \sin 30^\circ$$

$$\longrightarrow \quad (v_A)_2 \cos\theta_A = (v_B)_2 - e(v_A)_1 \cos 30^\circ$$



Despejando:

$$(v_B)_2 - e(v_A)_1 \cos 30^\circ = (v_A)_1 \cos 30^\circ - (v_B)_2$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{(v_B)_2 = \frac{(v_A)_1}{2} \cos 30^\circ (1+e) \approx 7.8 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$$

$$\longrightarrow \quad \tan\theta_A = \frac{(v_A)_1 \sin 30^\circ}{(v_B)_2 - e(v_A)_1 \cos 30^\circ} \quad \longrightarrow \quad \theta_A \approx 80.1^\circ$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{(v_A)_2 = \frac{(v_A)_1 \sin 30^\circ}{\sin\theta_A} \approx 5.08 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$$

Clase de hoy

- Ejemplos colisiones oblicuas.
- **Ejemplos sistemas con masa variable.**

Sistemas de masa variable

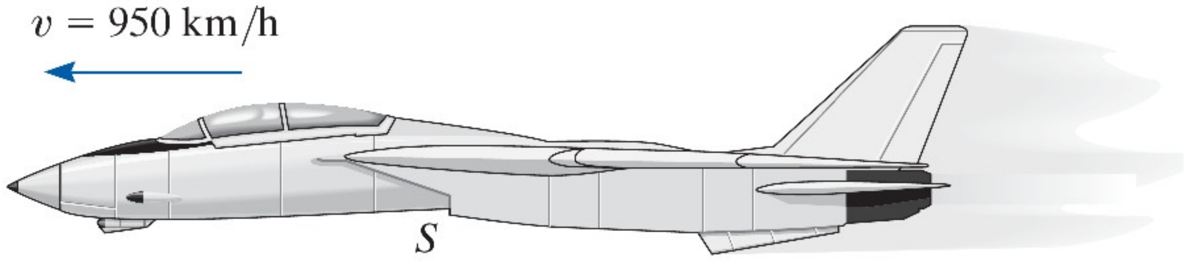
- Si un cuerpo presenta una masa variable, su movimiento es descrito por

$$\boxed{\sum \vec{F}_{\text{ext}} + \vec{v}_{\text{rel}}\dot{m} = m\vec{a}} \qquad \dot{m} = \frac{dm}{dt}$$

donde son F_{ext} son las **fuerzas externas**, y v_{rel} es la **velocidad relativa** con que la masa está escapando (o ingresando) del cuerpo.

Ejemplo 3

- Un jet de **masa** M=12 Mg vuela a una **rapidez constante** de v=950 km/h a lo largo de una línea recta horizontal. El aire **entra** por las cavidades de admisión a una **tasa** de s=50 m^3/s. Si el motor quema el combustible a una **tasa** de α=0.4 kg/s y el gas (aire y combustible) es expulsado con respecto al avión con una **rapidez** de u=450 m/s, determine la **fuerza de resistencia** al avance ejercida **sobre el avión** por el aire. Suponga que éste tiene una **densidad constante** de ρ=1.22 kg/m^3.



Ejemplo 3

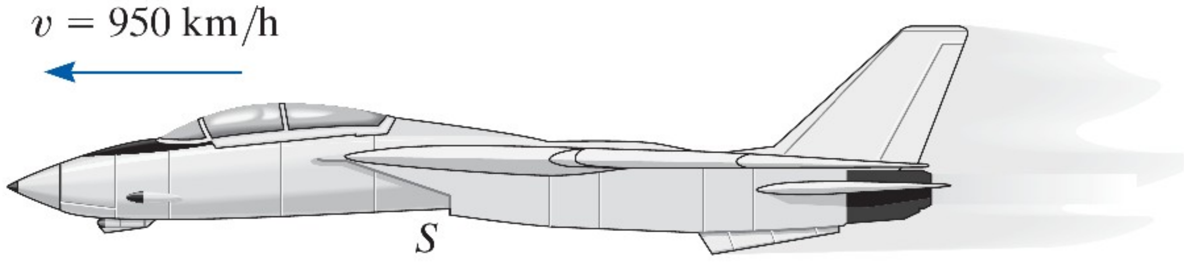
- Un jet de **masa** *M*=12 Mg vuela a una **rapidez constante** de *v*=950 km/h a lo largo de una línea recta horizontal. El aire **entra** por las cavidades de admisión a una **tasa** de *s*=50 m^3/s. Si el motor quema el combustible a una **tasa** de α=0.4 kg/s y el gas (aire y combustible) es expulsado con respecto al avión con una **rapidez** de *u*=450 m/s, determine la **fuerza de resistencia** al avance ejercida **sobre el avión** por el aire. Suponga que éste tiene una **densidad constante** de ρ=1.22 kg/m^3.

Como entra y sale masa en el eje x, podemos escribir:

$$F_x + v_{\mathrm{rel,in}}\dot{m}_{\mathrm{in}} + v_{\mathrm{rel,out}}\dot{m}_{\mathrm{out}} = ma$$

La velocidad del jet:

$$v \approx 264\,\mathrm{m/s} \quad \longrightarrow \quad a = 0$$



La velocidad con que entra aire al jet:

$$v_{\mathrm{rel,in}} = -v$$

La velocidad con que sale aire y combustible:

$$v_{\mathrm{rel,out}} = -u$$

La masa entrante (aire):

$$m_{\mathrm{in}} = \rho\, s\, t \quad \longrightarrow \quad \dot{m}_{\mathrm{in}} = \rho\, s$$

La masa saliente (aire y combustible):

$$m_{\mathrm{out}} = m_{\mathrm{fuel}} - \alpha\, t - \rho\, s\, t$$

$$\longrightarrow \quad \dot{m}_{\mathrm{out}} = -\alpha - \rho\, s$$

Ejemplo 3

- Un jet de **masa** *M*=12 Mg vuela a una **rapidez constante** de *v*=950 km/h a lo largo de una línea recta horizontal. El aire **entra** por las cavidades de admisión a una **tasa** de *s*=50 m^3/s. Si el motor quema el combustible a una **tasa** de α=0.4 kg/s y el gas (aire y combustible) es expulsado con respecto al avión con una **rapidez** de *u*=450 m/s, determine la **fuerza de resistencia** al avance ejercida **sobre el avión** por el aire. Suponga que éste tiene una **densidad constante** de ρ=1.22 kg/m^3.

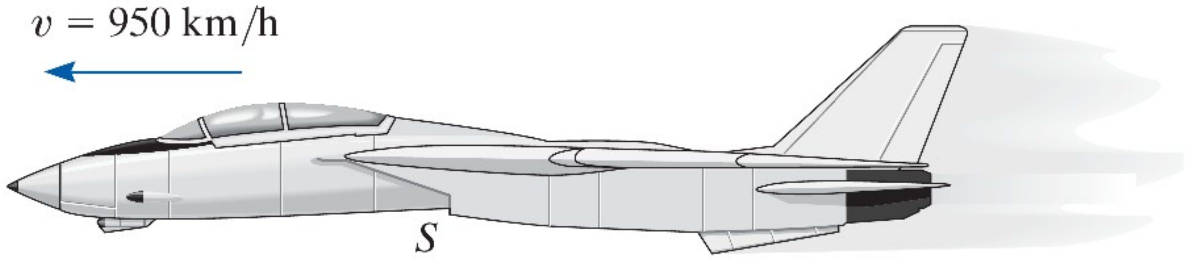
Remplazando en la ecuación de movimiento:

$$F_x + v_{\mathrm{rel,in}}\dot{m}_{\mathrm{in}} + v_{\mathrm{rel,out}}\dot{m}_{\mathrm{out}} = ma$$

$$\longrightarrow \qquad F_x = -v_{\mathrm{rel,in}}\dot{m}_{\mathrm{in}} - v_{\mathrm{rel,out}}\dot{m}_{\mathrm{out}}$$

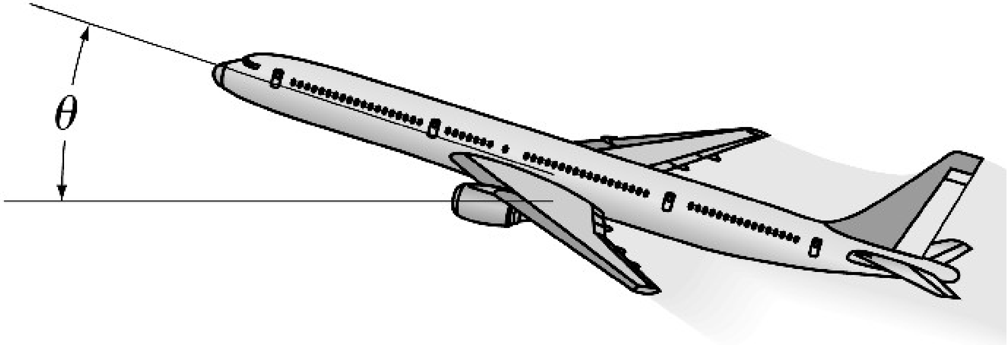
$$= -(-v)\,\rho\, s - (-u)(-\alpha - \rho\, s)$$

$$\longrightarrow \qquad \boxed{F_x = v\,\rho\, s - u(\alpha + \rho\, s) \approx -11526\,\mathrm{N}}$$



Ejemplo 4

- Un avión tiene una **masa** de M=150 Mg y vuela a una **velocidad** de crucero constante de v_1=850 km/h en vuelo nivelado (θ=0°). Si cada uno de los **dos** motores **aspira** aire a una **tasa** constante de β=1000 kg/s y lo **expulsa** a u=900 m/s con **respecto al avión.** Determine el **ángulo** de inclinación al cual el avión puede volar a una **velocidad constante** de v_2=750 km/h. Suponga que la **resistencia del aire** viene dada por $F_D=cv^2$, donde c es una constante **a determinar**. Los motores operan con la **misma potencia en ambos casos**. Ignore la cantidad de combustible consumido.



Ejemplo 4

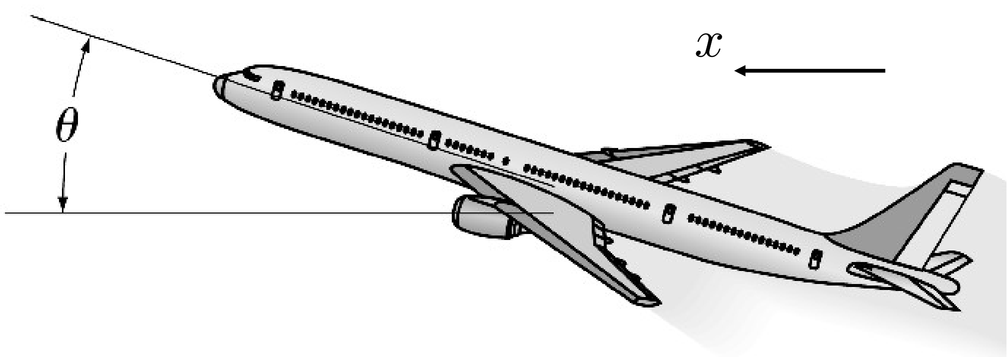
- Un avión tiene una **masa** de M=150 Mg y vuela a una **velocidad** de crucero constante de v_1=850 km/h en vuelo nivelado (θ=0°). Si cada uno de los **dos** motores **aspira** aire a una **tasa** constante de β=1000 kg/s y lo **expulsa** a u=900 m/s con **respecto al avión.** Determine el **ángulo** de inclinación al cual el avión puede volar a una **velocidad constante** de v_2=750 km/h. Suponga que la **resistencia del aire** viene dada por $F_D=cv^2$, donde c es una constante **a determinar**. Los motores operan con la **misma potencia en ambos casos**. Ignore la cantidad de combustible consumido.

Para el vuelo horizontal:

$$F_x + v_{\mathrm{rel,in}}\dot{m}_{\mathrm{in}} + v_{\mathrm{rel,out}}\dot{m}_{\mathrm{out}} = ma$$

La velocidad del avión:

$$v_1 \approx 236.11\,\mathrm{m/s} \quad \longrightarrow \quad a = 0$$



La velocidad con que entra aire al avión:

$$v_{\mathrm{rel,in}} = -v_1$$

La velocidad con que sale aire:

$$v_{\mathrm{rel,out}} = -u$$

Dos motores

La masa entrante (aire):

$$m_{\mathrm{in}} = 2\beta\, t \quad \longrightarrow \quad \dot{m}_{\mathrm{in}} = 2\beta$$

La masa saliente (aire):

$$m_{\mathrm{out}} = M - 2\beta\, t \quad \longrightarrow \quad \dot{m}_{\mathrm{out}} = -2\beta$$

Ejemplo 4

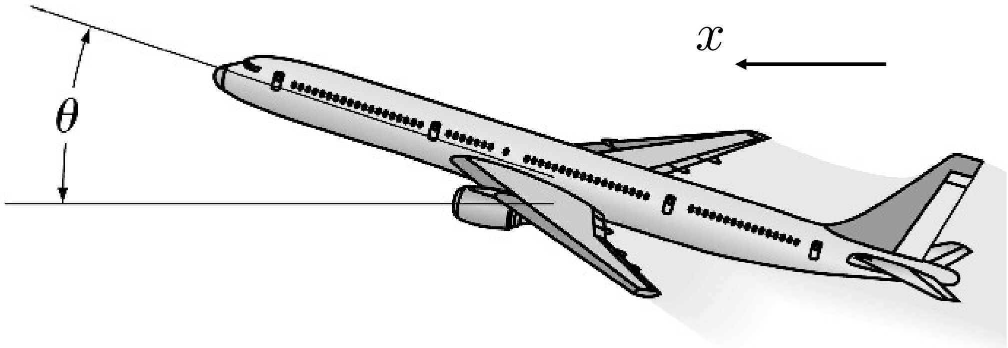
- Un avión tiene una **masa** de M=150 Mg y vuela a una **velocidad** de crucero constante de v_1=850 km/h en vuelo nivelado (θ=0°). Si cada uno de los **dos** motores **aspira** aire a una **tasa** constante de β=1000 kg/s y lo **expulsa** a u=900 m/s con **respecto al avión.** Determine el **ángulo** de inclinación al cual el avión puede volar a una **velocidad constante** de v_2=750 km/h. Suponga que la **resistencia del aire** viene dada por $F_D=cv^2$, donde c es una constante **a determinar**. Los motores operan con la **misma potencia en ambos casos**. Ignore la cantidad de combustible consumido.

Remplazando en la ecuación de movimiento:

$$F_x + (-v_1)(2\beta) + (-u)(-2\beta) = 0 \qquad \longrightarrow \qquad c = \frac{2\beta(u - v_1)}{v_1^2} \approx 23.82\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}}$$

$$\longrightarrow \qquad -cv_1^2 = 2\beta(v_1 - u)$$

$$F_x = -cv^2$$



Ejemplo 4

- Un avión tiene una **masa** de M=150 Mg y vuela a una **velocidad** de crucero constante de v_1=850 km/h en vuelo nivelado (θ=0°). Si cada uno de los **dos** motores **aspira** aire a una **tasa** constante de β=1000 kg/s y lo **expulsa** a u=900 m/s con **respecto al avión.** Determine el **ángulo** de inclinación al cual el avión puede volar a una **velocidad constante** de v_2=750 km/h. Suponga que la **resistencia del aire** viene dada por $F_D=cv^2$, donde c es una constante **a determinar**. Los motores operan con la **misma potencia en ambos casos**. Ignore la cantidad de combustible consumido.

Para el vuelo diagonal:

$$F_x + v_{\mathrm{rel,in}}\dot{m}_{\mathrm{in}} + v_{\mathrm{rel,out}}\dot{m}_{\mathrm{out}} = ma$$

La velocidad del avión:

$$v_2 \approx 208.33\,\mathrm{m/s} \quad \longrightarrow \quad a = 0$$

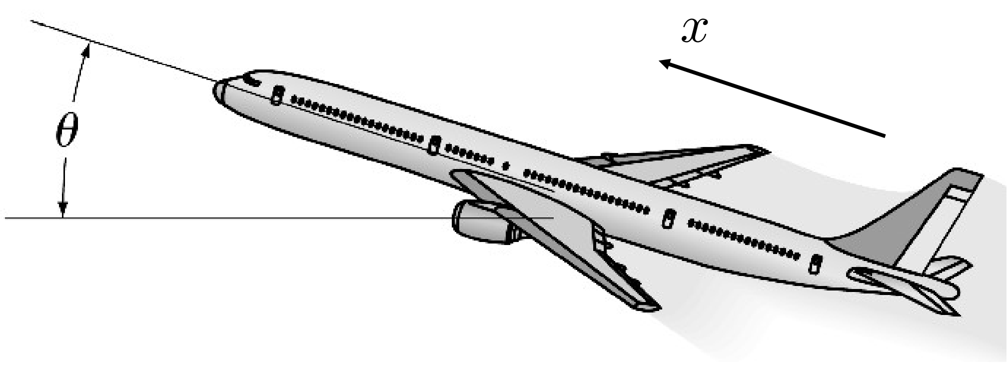
Las fuerzas en x:

$$F_x = -cv_2^2 - mg\sin\theta$$

Remplazando en la ecuación de movimiento:

$$F_x + (-v_2)(2\beta) + (-u)(-2\beta) = 0$$

$$\longrightarrow \quad mg\sin\theta = 2\beta(u - v_2) - cv_2^2$$



$$\longrightarrow \quad \boxed{\theta = \arcsin\left(\frac{2\beta(u - v_2) - cv_2^2}{mg}\right) \approx 13^\circ}$$

Proxima clase

➔ Sólido rígido: Momentum angular