FACULTAD DE FÍSICA
PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATÓLICA DE CHILE

Dinámica (FIS1514)

Momentum e impulso angular

Felipe Isaule

felipe.isaule@uc.cl

Miércoles 8 de Noviembre de 2023

Resumen clase anterior

- Revisamos ejemplos de **colisiones** y sistemas con **masa variable**.
- Terminamos la unidad de **impulso y momentum**.

Clase de hoy

- Momentum angular.
- Torque.
- Impulso angular.

Clase de hoy

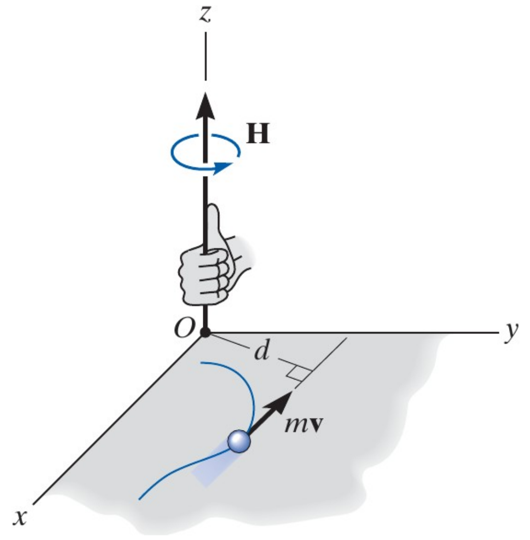
- **Momentum angular.**
- Torque.
- Impulso angular.

Momentum angular

- El **momentum** o **cantidad de movimiento angular** es el **ánalogo rotacional** del momentum lineal.
- Se define con respecto a un **punto de referencia** O.
- Su forma escalar:

$$l_Z = d\,m\,v$$

donde *d* es la **distancia** desde O al cuerpo, *m* es la **masa**, *v* es la **rapidez**, y la dirección viene dictada por la regla de la **mano derecha**.

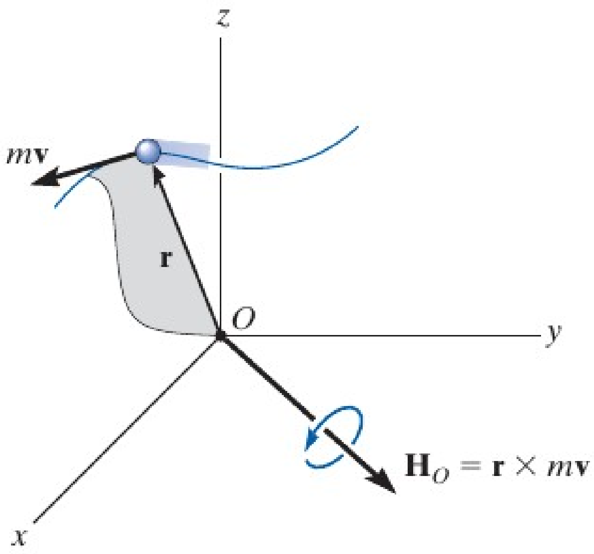


Momentum angular

- Sin embargo, el momentum angular es un **vector**.
- Su definición general es

$$\vec{l} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

donde ***r*** es el **vector de posición** que conecta *O* con el cuerpo.

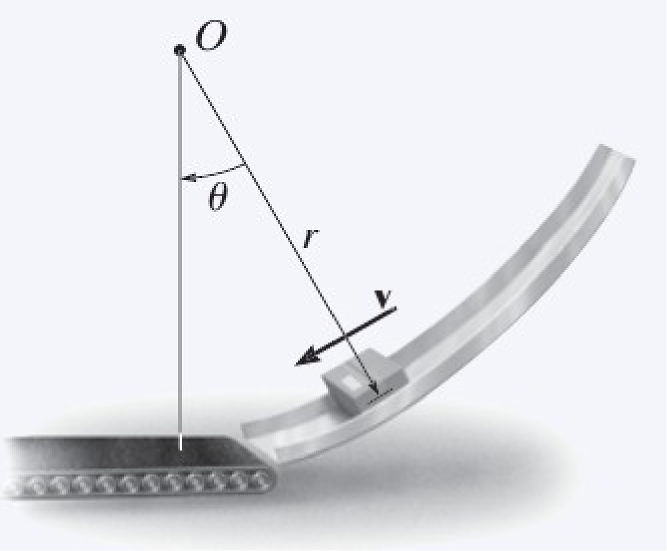


- Recordar que el producto cruz se calcula con un determinante:

$$\vec{r} \times m\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix}$$

Ejemplo 1

- La caja de la figura tiene una **masa** m y desciende por la rampa circular lisa de modo que cuando está en el **ángulo** θ su **rapidez** es v. Determine su **momentum angular** con respecto al punto O en este instante.



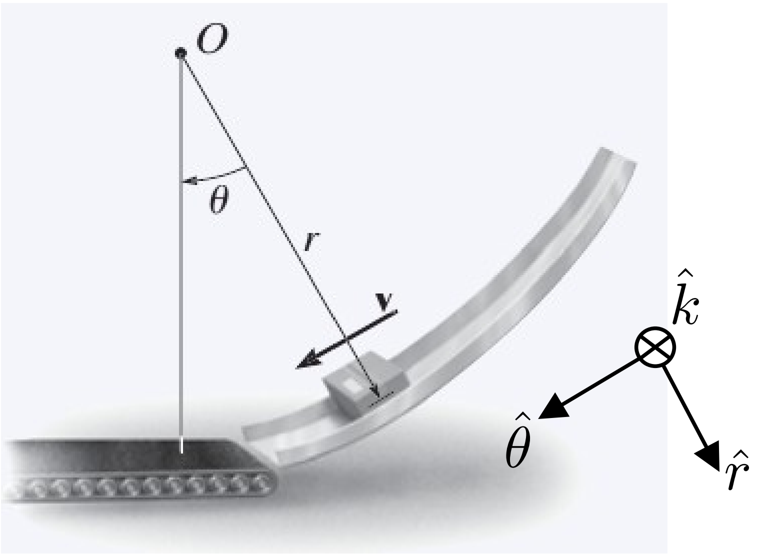
Ejemplo 1

- La caja de la figura tiene una **masa** m y desciende por la rampa circular lisa de modo que cuando está en el **ángulo** *θ* su **rapidez** es *v*. Determine su **momentum angular** con respecto al punto *O* en este instante.

Como la velocidad es tangente a la trayectoria, podemos simplemente escribir:

$$l_Z = r\,m\,v$$

Hacia "adentro" de la pantalla.



De manera más rigurosa, utilizando polares:

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

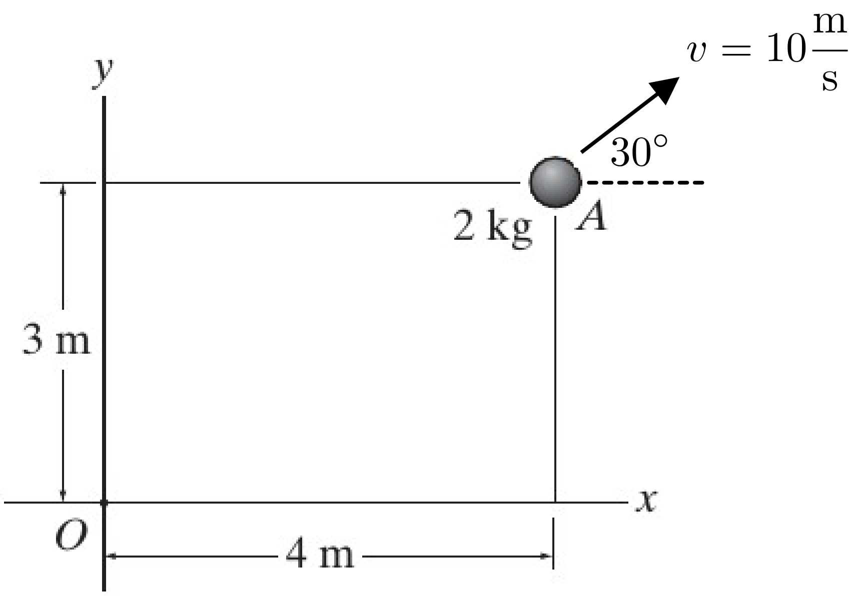
$$\vec{v} = v\hat{\theta}$$

$$\longrightarrow \qquad \vec{l} = (r\hat{r}) \times m(v\hat{\theta}) = m\,r\,v\,\hat{k}$$

Donde el vector unitario *k* "entra" a la pantalla.

Ejemplo 2

- La partícula *A* de **masa** *m*=2 kg tiene la **velocidad** que se muestra en la figura. Determine su **momentum angular** con respecto al punto ***O***.



Ejemplo 2

- La partícula *A* de **masa** *m*=2 kg tiene la **velocidad** que se muestra en la figura. Determine su **momentum angular** con **respecto al punto *O***.

Escribimos los vectores:

$$\vec{r} = 4\text{m}\hat{i} + 3\text{m}\hat{j} \longrightarrow \vec{l} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

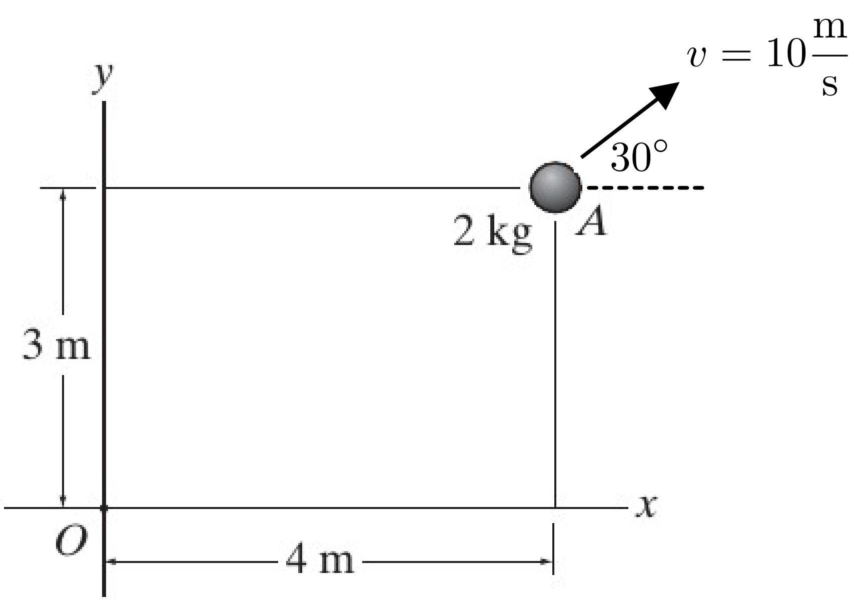
$$\vec{v} = 10\cos 30^\circ \frac{\text{m}}{\text{s}}\hat{i} + 10\sin 30^\circ \frac{\text{m}}{\text{s}}\hat{j}$$

$$= 5\sqrt{3}\frac{\text{m}}{\text{s}}\hat{i} + 5\frac{\text{m}}{\text{s}}\hat{j}$$

$$= (4\hat{i} + 3\hat{j})\text{m} \times 2\text{kg}(5\sqrt{3}\hat{i} + 5\hat{j})\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$= \left(40\hat{k} - 30\sqrt{3}\hat{k}\right)\ \text{kg}\frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

$$\approx -12\hat{k}\,\text{kg}\frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$



Clase de hoy

- Momentum angular.
- **Torque.**
- Impulso angular.

Torque

- De la segunda ley de Newton:

$$\sum \vec{F} = m\dot{\vec{v}} \qquad \longrightarrow \qquad \vec{r} \times \sum \vec{F} = \vec{r} \times m\dot{\vec{v}} = \dot{\vec{l}}$$

- El **torque** producido por una fuerza a un cuerpo con respecto a un punte de referecia O es:

$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}}$$

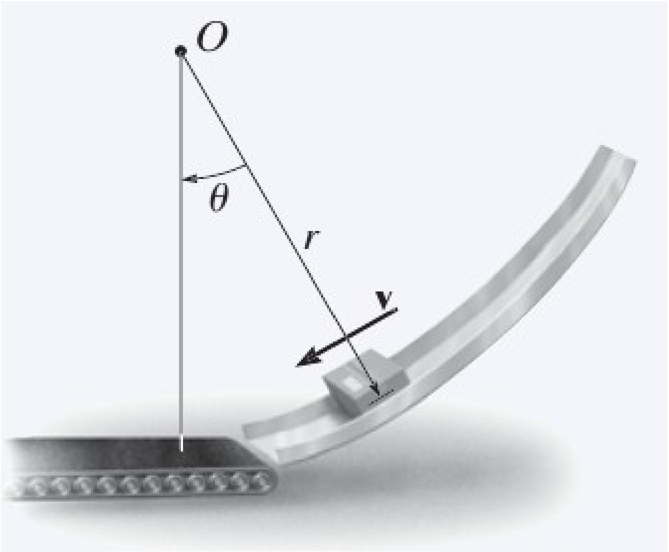
- La primera ecuación la podemos escribir como:

$$\boxed{\sum \vec{\tau} = \dot{\vec{l}}}$$

- Que corresponde al **análogo rotacional** de la segunda Ley de Newton.

Ejemplo

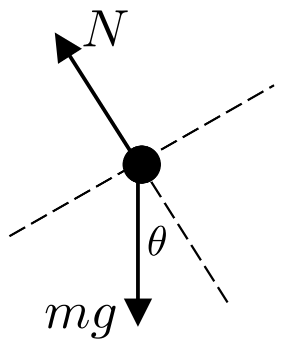
- La caja de la figura tiene una **masa** *m* y desciende por la rampa circular lisa de modo que cuando está en el **ángulo** θ su **rapidez** es *v*. Determine la **aceleración tangencial** en ese instante.



Ejemplo

- La caja de la figura tiene una **masa** *m* y desciende por la rampa circular lisa de modo que cuando está en el **ángulo** *θ* su **rapidez** es *v*. Determine la **aceleración tangencial** en ese instante.

DLC:



Momentum angular:

$$\vec{l} = m\,r\,v\,\hat{k}$$

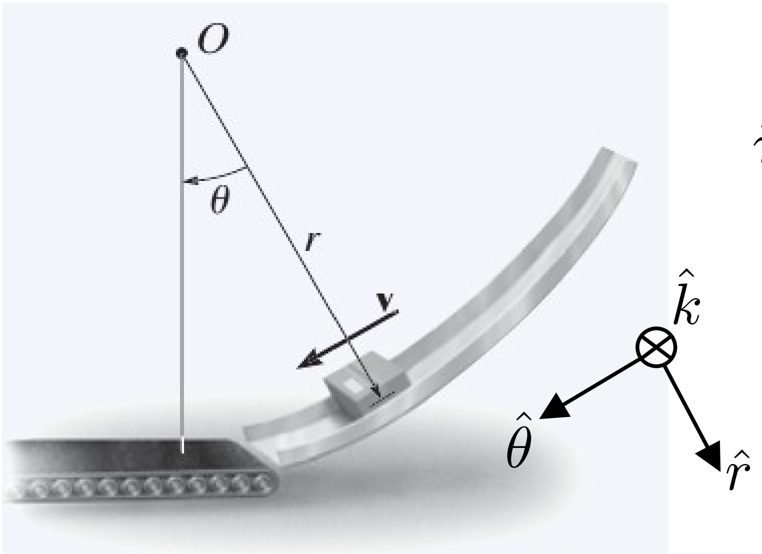
Fuerzas:

$$\vec{F} = -N\hat{r} + mg\cos\theta\hat{r} + mg\sin\theta\hat{\theta}$$

Torque:

$$\vec{\tau} = r\hat{r} \times m(-N\hat{r} + mg\cos\theta\hat{r} + mg\sin\theta\hat{\theta})$$

$$\vec{\tau} = mrg\sin\theta\hat{k}$$



Ecuación de movimiento:

$$\vec{\tau} = \dot{\vec{l}} \quad \longrightarrow \quad mrg\sin\theta = \frac{d}{dt}(m\,r\,v)$$

$$mrg\sin\theta = mr\dot{v} = mra_t$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{a_t = g\sin\theta}$$

Clase de hoy

- Momentum angular.
- Torque.
- **Impulso angular.**

Impulso angular

- En analogía al impulso lineal, el **impulso angular** es definido como la **integral en el tiempo del torque**:

$$\boxed{\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{\tau}_{\mathrm{tot}}\, dt}$$

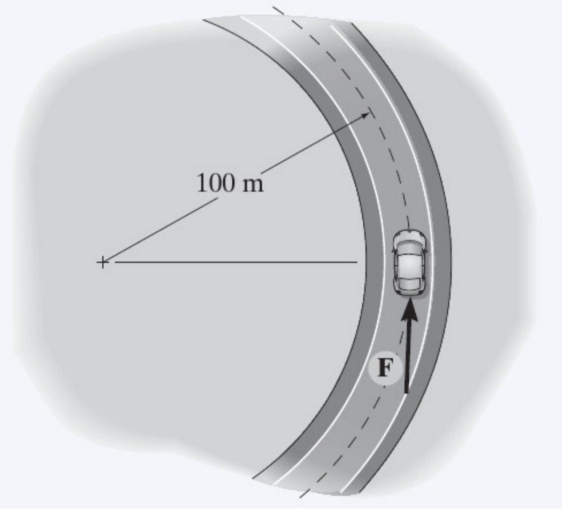
- El **principio de impulso-momentum angular**:

$$\boxed{\vec{J} = \Delta \vec{l}} \qquad \Delta \vec{l} = \vec{l}_2 - \vec{l}_1$$

- Nos dice que el impulso angular en un intervalo de tiempo es igual a la diferencia de momentum angular.

Ejemplo

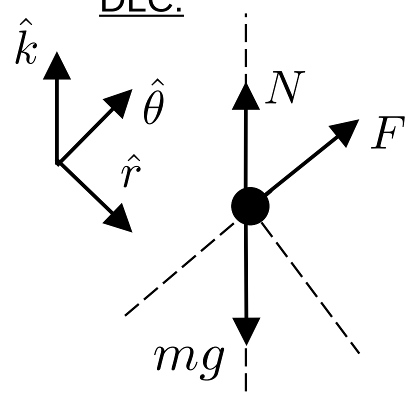
- El auto de **masa** m=1.5 Mg se desplaza por la curva como se muestra en la figura. Si la fuerza de tracción de las ruedas en la carretera es $F=(150t^2)$ N, donde t está en segundos, determine la **rapidez** del automóvil cuando t=5 s. En un principio el auto viaja a una **rapidez** de 5 m/s.



Ejemplo

- El auto de **masa** m=1.5 Mg se desplaza por la curva como se muestra en la figura. Si la fuerza de tracción de las ruedas en la carretera es F=(150t^2) N, donde t está en segundos, determine la **rapidez** del automóvil cuando t=5 s. En un principio el auto viaja a una **rapidez** de 5 m/s.

DLC:



Torque respecto al centro del círculo:

$$\vec{\tau} = r\hat{r} \times \vec{F} \quad \longrightarrow \quad \tau_z = rF = 15000t^2 \,\mathrm{N\ m}$$

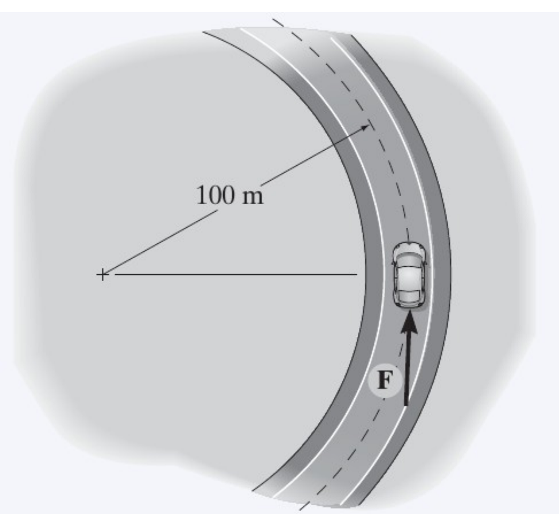
Principio impulso-momentum angular:

$$\int_{t_1}^{t_2} \tau_z dt = l_{z,2} - l_{z,1} \qquad\qquad l_{i,z} = mrv_i$$

$$\int_0^{5\mathrm{s}} 15000t^2 dt \,\mathrm{N\ m} = 1500\mathrm{kg}\,100\mathrm{m}\left(v_2 - 5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)$$

$$15000\frac{5^3\mathrm{s}^3}{3}\,\mathrm{N\ m} = 1500\mathrm{kg}\,100\mathrm{m}\left(v_2 - 5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{v_2 = 9.17\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$$



Resumen

- Definimos el **momentum angular**.
- Conectamos el momentum angular con el concepto de fuerzas y definimos el **torque**.
- Definimos el **impulso angular** y revisamos el **principio de impulso-momentum angular**.
- Próxima clase:
  - ➔ Conservación del momentum angular.