FACULTAD DE FÍSICA
PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATÓLICA DE CHILE

Dinámica (FIS1514)

Conservación del momentum angular

Felipe Isaule

felipe.isaule@uc.cl

Lunes 13 de Noviembre de 2023

Resumen clase anterior

- Definimos el **momentum angular** de un cuerpo:

$$\vec{l} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

- Definimos el **torque** aplicado a un cuerpo.

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

- Relacionamos el torque con la variación del momentum angular de **un cuerpo**:

$$\vec{\tau}_{(\mathrm{tot})} = \sum \vec{\tau} = \dot{\vec{l}}$$

- Definimos el **impulso angular** y el **principio de impulso-momentum angular**:

$$\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{\tau}_{\mathrm{tot}}\, dt \qquad\qquad \vec{J} = \Delta\vec{l}$$

$$\Delta\vec{l} = \vec{l}_2 - \vec{l}_1$$

Clase de hoy

- Conservación del momentum angular.
- Sistemas de referencias y centro de masa.

Clase de hoy

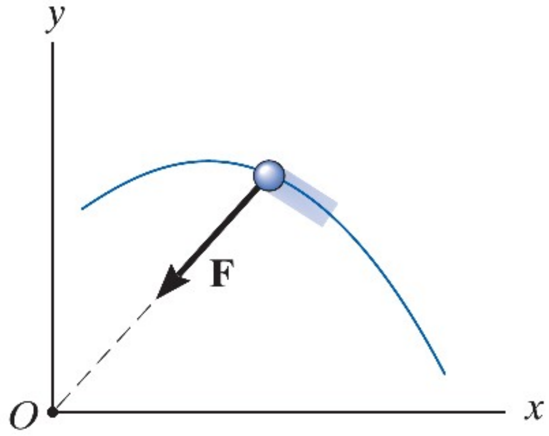
- **Conservación del momentum angular.**
- Sistemas de referencias y centro de masa.

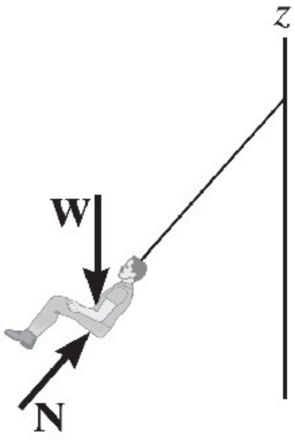
Conservación del momentum angular

- Si la suma de los **impulsos angulares** sobre un cuerpo es **cero** en un intervalo t_1 a t_2, el momentum angular se conserva

$$\vec{l}_1 = \vec{l}_2$$

- Cuando **no hay impulsos externos**, tanto el **momentum lineal como angular se conservan**.
- Sin embargo, en ciertos casos el momentum angular se puede conservar mientras que el lineal no.
- Un ejemplo son problemas con **fuerzas centrales.**



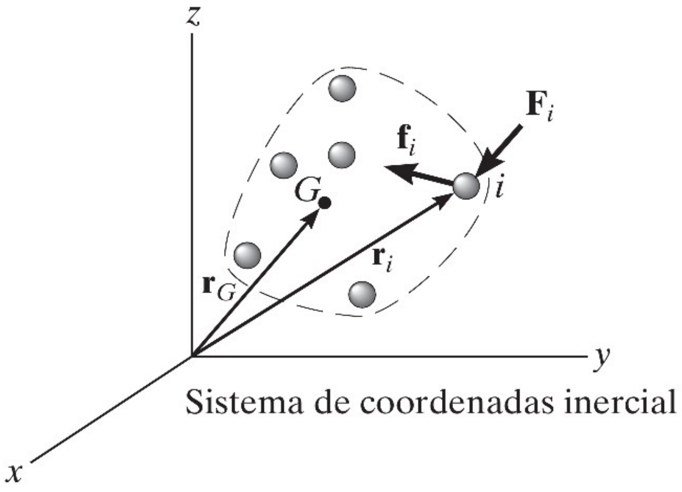


Conservación del momentum angular

- Si tenemos un **sistema de partículas** y **no hay impulso angular** debido a fuerzas (torques) **externos,** el **momentum angular total** se **conserva.**:

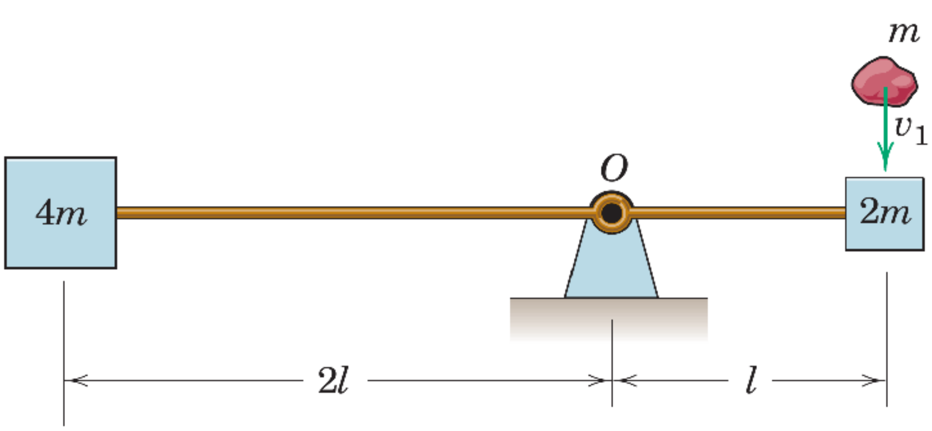
$$\boxed{\sum_i \vec{l}_{i,1} = \sum_i \vec{l}_{i,2}}$$

- Totalmente análogo a la conservación de momentum lineal examinado en clases anteriores.



Ejemplo

- La vara de la figura se encuentra inicialmente en **reposo** en posición **horizontal** con dos masas a los extremos. La masa de la derecha es impactada por un cuerpo de **masa** m con una **rapidez** v_1. Si ambos cuerpos quedan **pegados después de la colisión**, encuentre la **velocidad angular** de la barra después de la colisión.



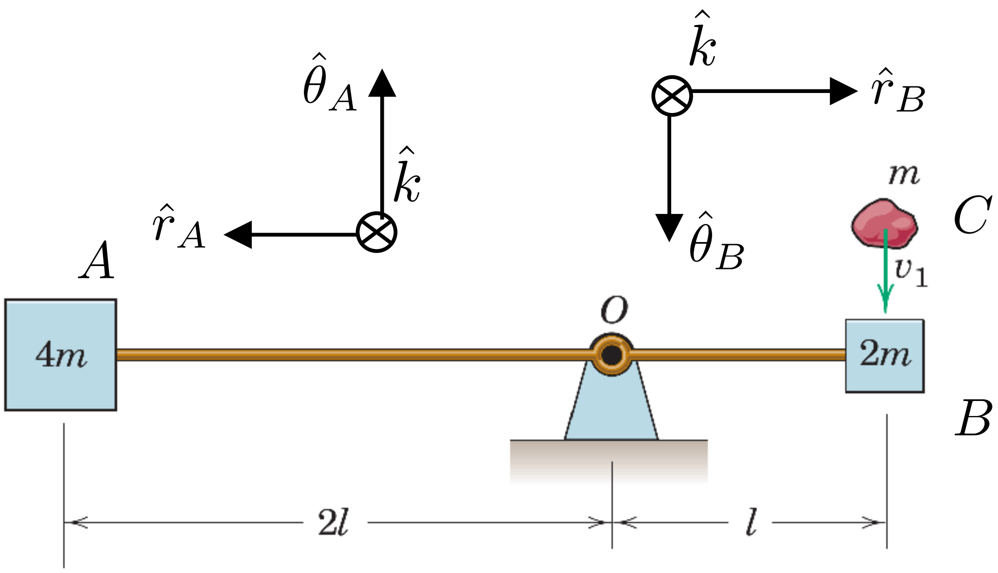
Ejemplo

- La vara de la figura se encuentra inicialmente en **reposo** en posición **horizontal** con dos masas a los extremos. La masa de la derecha es impactada por un cuerpo de **masa** *m* con una **rapidez** v_1. Si ambos cuerpos quedan **pegados después de la colisión**, encuentre la **velocidad angular** de la barra después de la colisión.

Conservación del momentum angular:

$$\vec{l}_A + \vec{l}_B + \vec{l}_C = \vec{l}'_A + \vec{l}'_{BC}$$

Todos los momentum angular van en z.



Momentum angular inicial:

$$l_A = l_B = 0 \qquad l_C = l\,m\,v_1$$

Momentum angular final:

$$l'_A = (2l)(4m)v'_A = (2l)(4m)(2l\dot{\theta}')$$

$$= 16l^2m\dot{\theta}'$$

$$l'_{BC} = l(2m+m)v'_{BC} =$$

$$= l(2m+m)(l\dot{\theta}') = 3ml^2\dot{\theta}'$$

Donde $\dot{\theta}'$ es la velocidad angular final de la vara.

Ejemplo

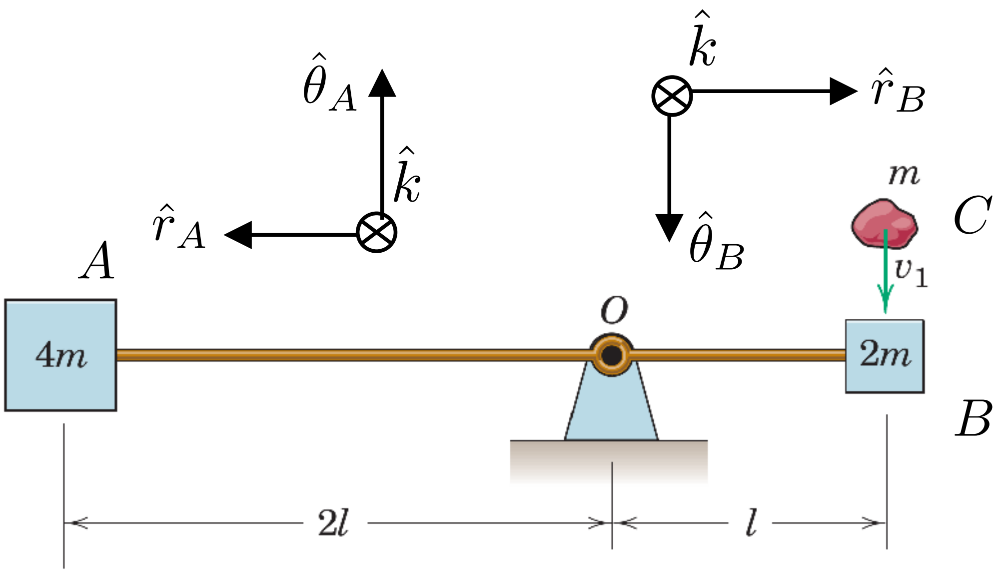
- La vara de la figura se encuentra inicialmente en **reposo** en posición **horizontal** con dos masas a los extremos. La masa de la derecha es impactada por un cuerpo de **masa** *m* con una **rapidez** v_1. Si ambos cuerpos quedan **pegados después de la colisión**, encuentre la **velocidad angular** de la barra después de la colisión.

Conservación del momentum angular:

$$\vec{l}_A + \vec{l}_B + \vec{l}_C = \vec{l}\,'_A + \vec{l}\,'_{BC} \longrightarrow lmv_1 = 16l^2 m\dot{\theta}' + 3ml^2\dot{\theta}'$$

Todos los momentum angular van en z.

$$v_1 = 19l\dot{\theta}'$$



$$\longrightarrow \boxed{\dot{\theta}' = \frac{v_1}{19l}}$$

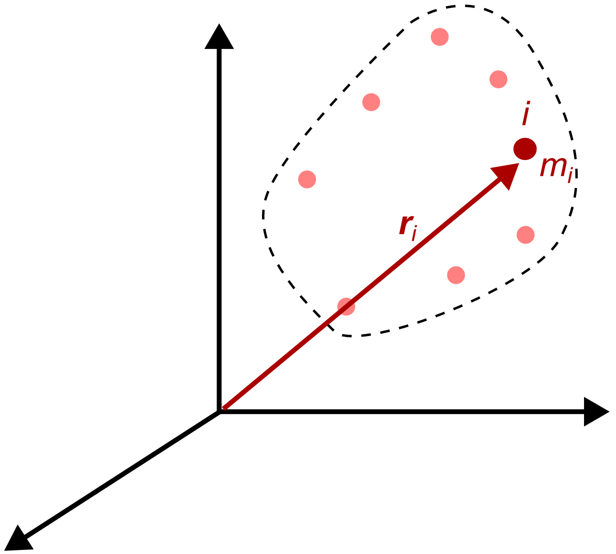
Clase de hoy

- Conservación del momentum angular.
- **Sistemas de referencias y centro de masa.**

Puntos de referencias y sistemas de partículas

- Hasta ahora hemos utilizando un **eje <u>fijo</u> de rotación** como punto de referencia para el momentum angular.
- En un sistema de partículas, la derivada temporal del momentum angular total es igual al torque **externo** total:

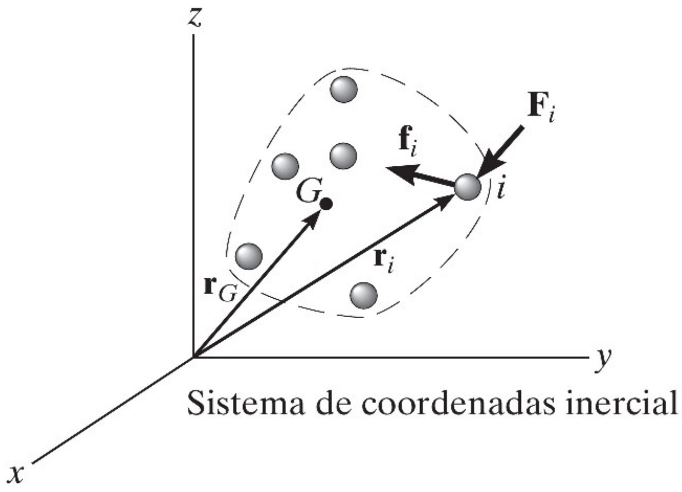
$$\boxed{\sum_i \vec{\tau}_{i,\mathcal{O}}^{(\mathrm{ext})} = \dot{\vec{l}}_{\mathcal{O}} = \sum_i \dot{\vec{l}}_{i,\mathcal{O}}}$$



- El torque y momentum angular deben ser definidos desde **el mismo punto de referencia <u>fijo</u>**.

Centro de masa

- Recordemos que la posición del **centro de masa** de un sistema de partículas se define como:



$$\boxed{\vec{r}_{\mathrm{G}} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{m}}$$

donde m es la masa total del sistema

$$m = \sum_i m_i$$

- Las **velocidades** y **aceleraciones** del centro de masa:

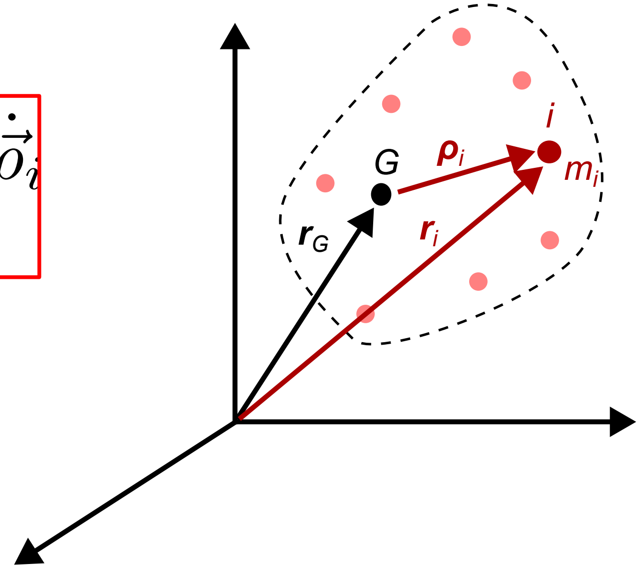
$$\vec{v}_{\mathrm{G}} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{m} \qquad \vec{a}_{\mathrm{G}} = \frac{\sum_i m_i \vec{a}_i}{m}$$

Momentum angular y centro de masa

- El momentum angular **total** con respecto al **centro de masa**:

$$\vec{l}_{i,G} = \vec{\rho}_i \times m_i \dot{\vec{r}}_i = \vec{\rho}_i \times m_i(\dot{\vec{r}}_G + \dot{\vec{\rho}}_i)$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\vec{l}_G = \sum_i \vec{\rho}_i \times m_i \dot{\vec{\rho}}_i}$$



- La derivada del momentum angular total con respecto al centro de masa:

$$\dot{\vec{l}}_G = \sum_i \left(\dot{\vec{\rho}}_i \times m_i \dot{\vec{r}}_i + \vec{\rho}_i \times m_i \ddot{\vec{r}}_i \right)$$

$$= \sum_i \left(\cancel{\dot{\vec{\rho}}_i \times m(\dot{\vec{r}}_G + \dot{\vec{\rho}}_i)}^{\,0} + \vec{\rho}_i \times \overbrace{m\ddot{\vec{r}}_i}^{\vec{F}_{\text{int}} + \vec{F}_{\text{ext}}} \right)$$

- Debido a que las fuerzas externas se cancelan, se obtiene que:

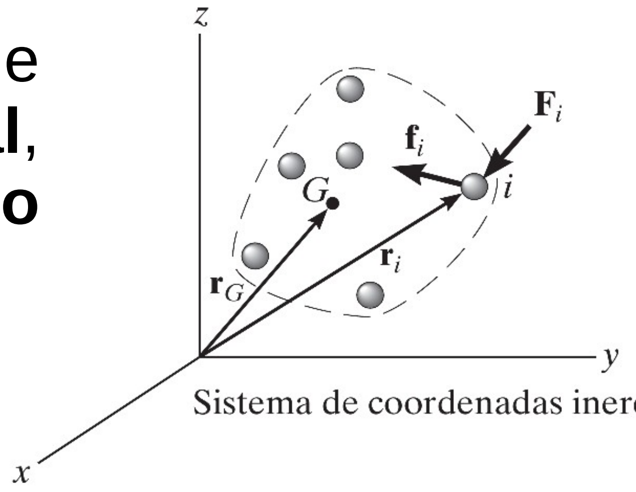
$$\boxed{\sum_i \vec{\tau}^{(\text{ext})}_{i,G} = \dot{\vec{l}}_G} \qquad \tau^{(\text{ext})}_{i,G} = \vec{\rho}_i \times \vec{F}^{(\text{ext})}_i$$

Momentum angular y centro de masa

- Utilizar el centro de masa como sistema de referencia es conveniente, tanto para cálculos de momentum lineal como angular.

- Sin embargo, también podemos estudiar la **dinámica externa** de un sistema de partículas si entendemos el centro de masa como el punto donde se **concentra** la masa.

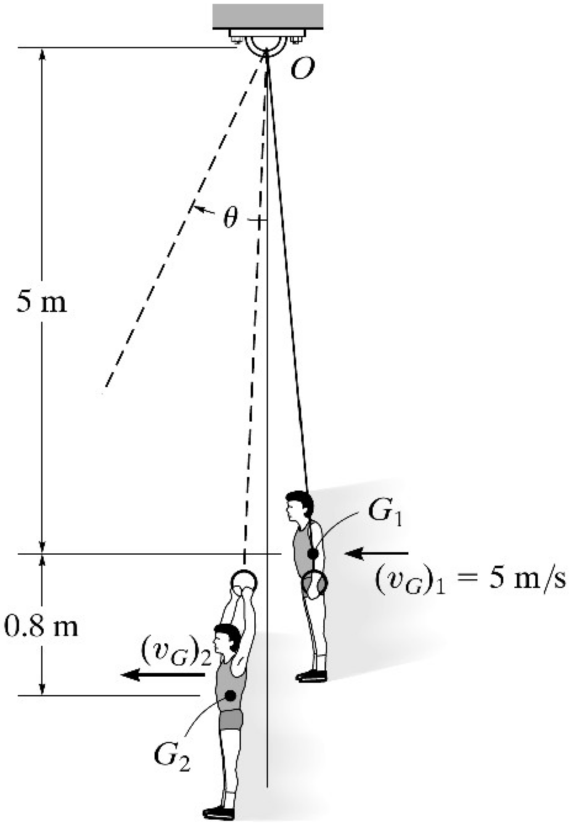
- Podemos aproximar un sistema de partículas como una **particula puntual**, donde su posición viene dada por su **centro de masa**.



Sistema de coordenadas inercial

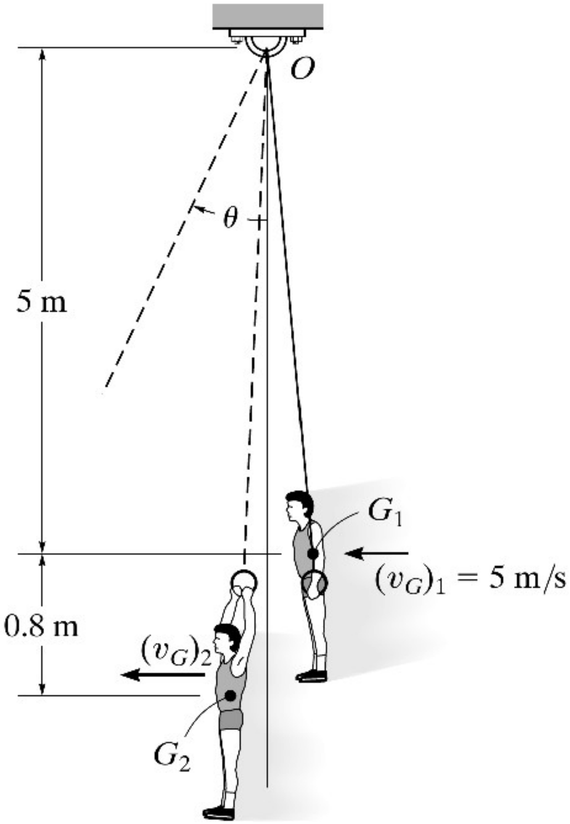
Ejemplo

- Un gimnasta de m=80 kg de **masa** se sostiene en los dos aros con sus brazos abajo en la posición mostrada mientras oscila hacia abajo. Su **centro de masa** está en el punto G_1. Cuando está en la posición más baja de su oscilación, su velocidad es $(v_G)_1$ = 5 m/s. En esta posición, de repente deja sus brazos arriba y su **centro de masa cambia** a la posición G_2. Determine su **nueva velocidad** en la oscilación hacia arriba y el **ángulo** θ al cual oscila antes de detenerse momentáneamente.



Ejemplo

- Un gimnasta de m=80 kg de **masa** se sostiene en los dos aros con sus brazos abajo en la posición mostrada mientras oscila hacia abajo. Su **centro de masa** está en el punto G_1. Cuando está en la posición más baja de su oscilación, su velocidad es $(v_G)_1$ = 5 m/s. En esta posición, de repente deja sus brazos arriba y su **centro de masa cambia** a la posición G_2. Determine su **nueva velocidad** en la oscilación hacia arriba y el **ángulo** θ al cual oscila antes de detenerse momentáneamente.



Tratamos al gimnasta como una partícula puntual, con su posición dictada por su centro de masa.

Conservación del momentum angular:

$$l_1 = l_2 \qquad \longrightarrow \qquad (r_G)_1 m (v_G)_1 = (r_G)_2 m (v_G)_2$$

Instante 1 es θ=0 *con* G_1*, e instante 2 es* θ=0 *con* G_2.

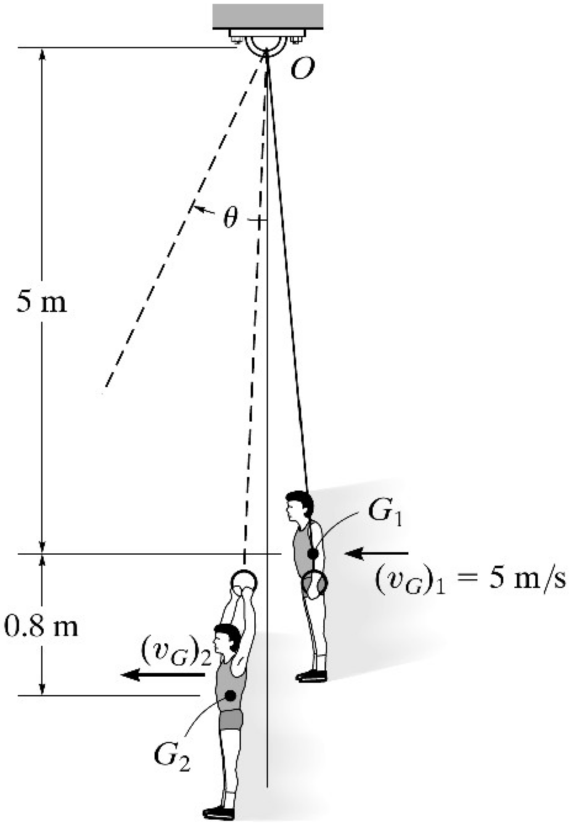
$$(r_G)_1 = 5\text{m}$$

$$(r_G)_2 = 5.8\text{m} \qquad \longrightarrow \qquad \boxed{(v_G)_2 \approx 4.31\frac{\text{m}}{\text{s}}}$$

$$(v_G)_1 = 5\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ejemplo

- Un gimnasta de m=80 kg de **masa** se sostiene en los dos aros con sus brazos abajo en la posición mostrada mientras oscila hacia abajo. Su **centro de masa** está en el punto G_1. Cuando está en la posición más baja de su oscilación, su velocidad es $(v_G)_1$ = 5 m/s. En esta posición, de repente deja sus brazos arriba y su **centro de masa cambia** a la posición G_2. Determine su **nueva velocidad** en la oscilación hacia arriba y el **ángulo** θ al cual oscila antes de detenerse momentáneamente.



Tratamos al gimnasta como una partícula puntual, con su posición dictada por su centro de masa.

Conservación de la energía:

$$T_2 + U_2 = T_3 + U_3 \quad \longrightarrow \quad \frac{m}{2}(v_G)_2^2 = mgh_\theta$$

Instante 3 es cuando alcanza el ángulo máximo θ al detenerse.

Tomamos como h=0 el punto más bajo del gimnasta (instante 2).

$$h_\theta = (r_G)_2 - (r_G)_2 \cos\theta$$

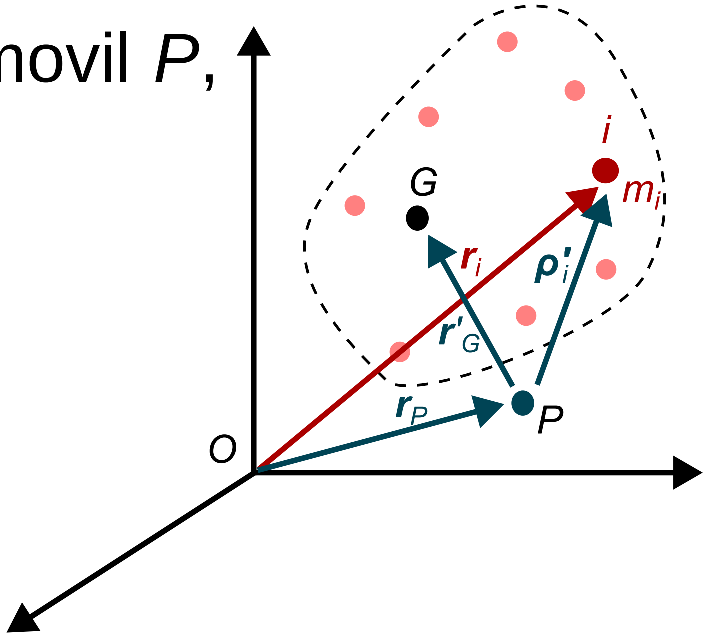
$$\longrightarrow \cos\theta = \frac{2g(r_G)_2 - (v_G)_2^2}{2g(r_G)_2}$$

$$\longrightarrow \boxed{\theta \approx 33^\circ}$$

Sistema de referencia movil

- Si consideramos un punto de referencia movil P, el momentum angular de una partícula:

$$\vec{l}_{i,P} = \rho_i' \times m_i \dot{\vec{r}}_i$$



- El **momentum angular total**:

$$\boxed{\vec{l}_P = \vec{l}_G + \vec{r}'_G \times m\vec{v}'_G}$$

$$\vec{v}'_G = \dot{\vec{r}}'_G$$

$$m = \sum_i m_i$$

- La **suma** de los **torques externos** con respecto a P:

$$\boxed{\sum_i \vec{\tau}_{i,P}^{(\text{ext})} = \dot{\vec{l}}_G + \vec{r}'_G \times m\vec{a}'_G}$$

$$\vec{a}'_G = \ddot{\vec{r}}'_G$$

- De manera equivalente:

$$\sum_i \vec{\tau}_{i,P}^{(\text{ext})} = (\dot{\vec{l}}_P)_{\text{rel}} + \vec{\rho}'_G \times m\vec{a}_P$$

$$(\vec{l}_P)_{\text{rel}} = \sum_i \vec{\rho}'_i \times m_i \dot{\vec{\rho}}'_i$$

$$\vec{a}_P = \ddot{\vec{r}}_P$$

Resumen

- Presentamos la **conservación del momentum angular**.
- Definimos la ecuación de movimiento rotacional de un sistema de partículas en términos de torque y momentum angular.
- Revisitamos el concepto de **centro de masa**.
- Próxima clase:
  - ➔ Cuerpo rígido y momento de inercia.