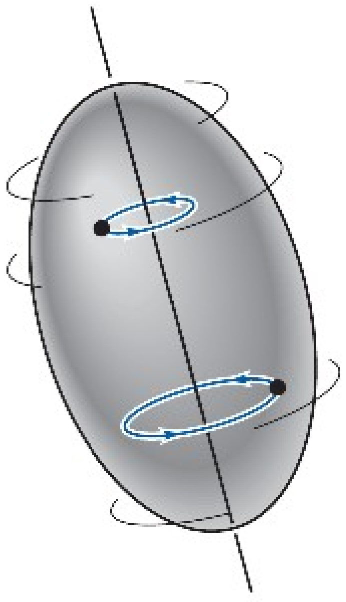
FACULTAD DE FÍSICA
PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATÓLICA DE CHILE

Dinámica (FIS1514)

Sólido rígido y momento de inercia

Felipe Isaule

felipe.isaule@uc.cl



Miércoles 15 de Noviembre de 2023

Resumen clase anterior

- Presentamos la **conservación del momentum angular** cuando no hay impulsos angulares externos.
- Revisamos la definición de momentum angular y torque para **distintos puntos de referencia**.
- Revisitamos el concepto de **centro de masa**.

Clase de hoy

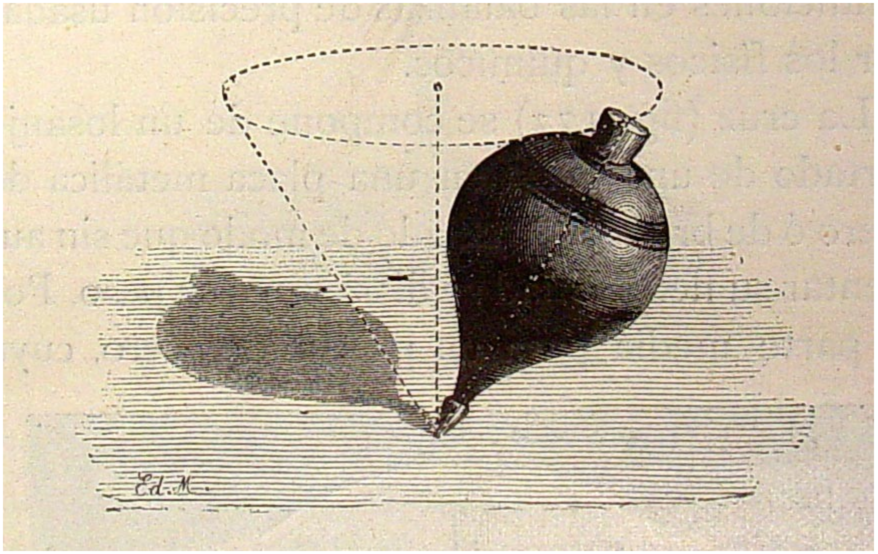
- Sólido rígido y centro de masa.
- Rotación de un sólido rígido.
- Momento de inercia

Clase de hoy

- **Sólido rígido y centro de masa.**
- Rotación de un sólido rígido.
- Momento de inercia

Sólido rígido

- Un **sólido rígido** corresponde a un cuerpo sólido (**no puntual**) que **no se deforma**.
- Es decir, las posiciones relativas de las partículas dentro del sólido permanecen constantes.



Centro de masa de un sólido rígido

- La **posición** del **centro de masa** de un sólido rígido se define como:

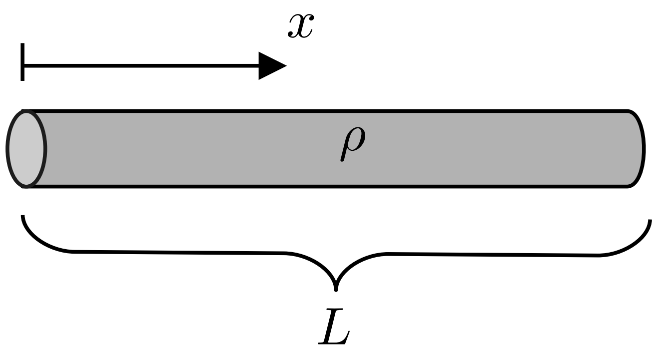
$$\boxed{\vec{r}_{\mathrm{G}} = \frac{\int \vec{r}\, dm'}{m}} \qquad \boxed{m = \int dm'}$$

- Simplemente corresponde a la **generalización al continuo** de la definición **discreta** del centro de masa.

Ejemplo

- Una vara de **largo** *L* tiene una densidad constante *ρ* (en unidades de masa/largo), encuentre el **centro de masa** de la vara.

La masa total de la vara:



$$m = \int dm' = \int_0^L \rho\, dx = \rho\, L$$

El centro de masa

$$\vec{r}_G = \frac{\int \vec{r}\, dm'}{m} = \frac{1}{\rho\, L}\int_0^L (x\hat{i})(\rho\, dx) = \frac{1}{\rho\, L}\frac{\rho L^2}{2}\hat{i}$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\vec{r}_G = \frac{L}{2}\hat{i}}$$

El centro de masa está al centro de la vara, como es esperable.

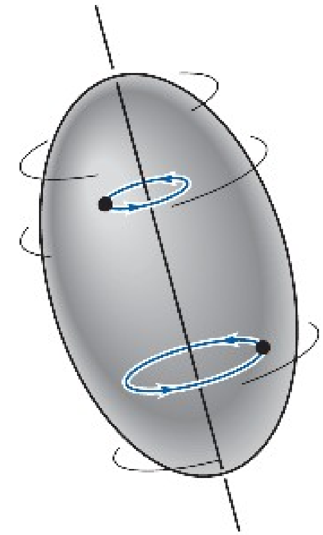
Clase de hoy

- Sólido rígido y centro de masa.
- **Rotación de un sólido rígido.**
- Momento de inercia

Rotación de un sólido rígido

- En general, un sólido rígido puede experimentar **traslación** y **rotación**.

- Por ahora nos centraremos en rotación alrededor de un **eje fijo**.



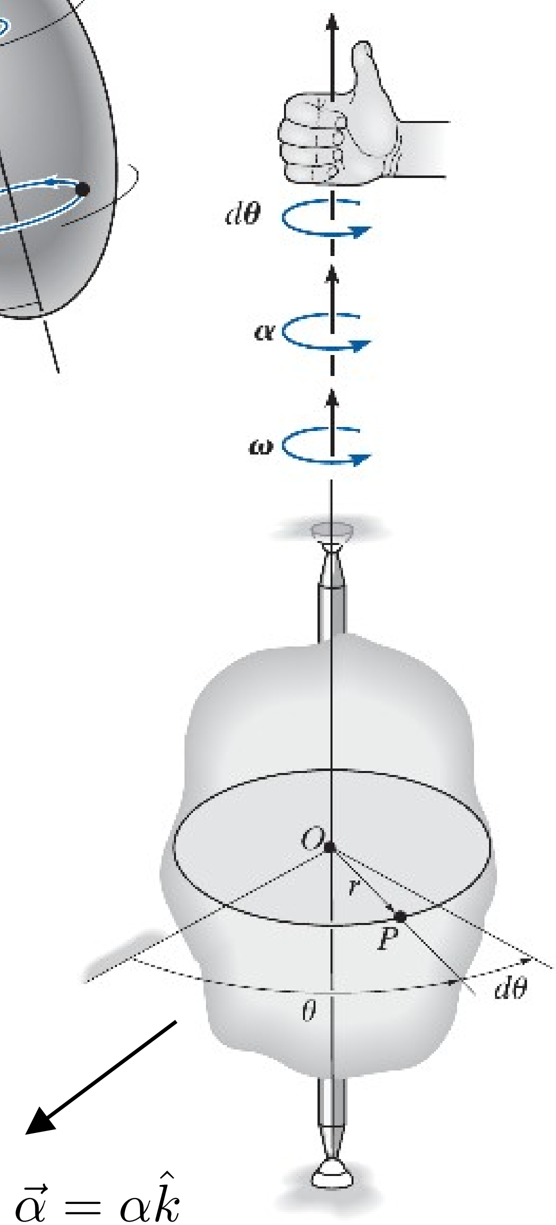
- La **velocidad angular** del sólido es:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

- Mientras que la **aceleración angular**:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

- En sus **formas vectoriales**, la velocidad y aceleración angular van en la **dirección del eje de rotación**.



$$\vec{\omega} = \omega\hat{k} \qquad \vec{\alpha} = \alpha\hat{k}$$

Rotación de un sólido rígido

- La **cinemática** de rotación es análoga a la cinemática rectilínea.
- De las definiciones anteriores, tenemos que:

$$\alpha\, d\theta = \omega\, d\omega$$

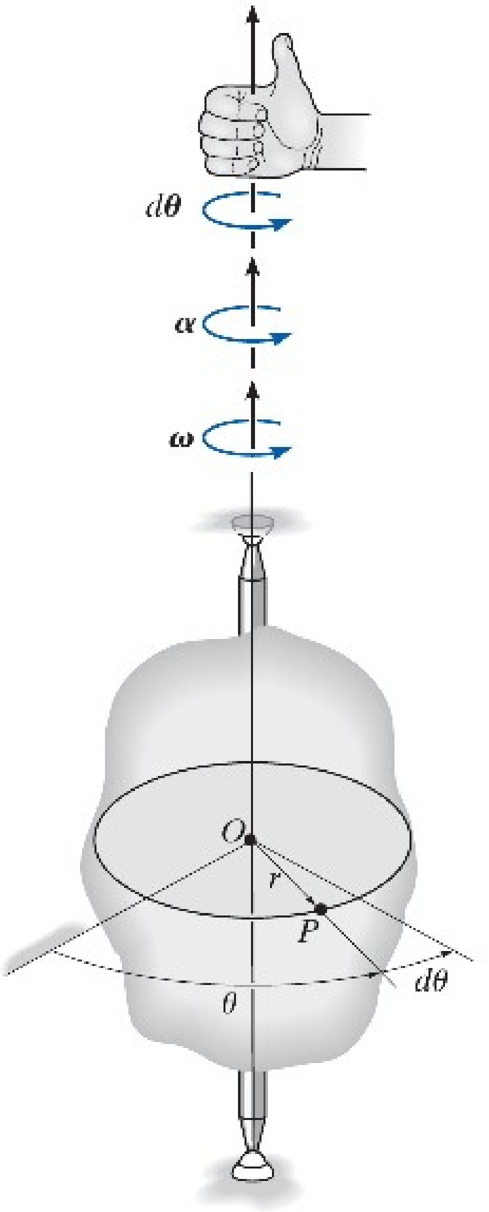
- Si la **aceleración angular** α es **constante**:

$$\omega = \omega_0 + \alpha\, t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0\, t + \frac{1}{2}\alpha\, t^2$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

$$\theta_0 = \theta(t=0) \qquad \omega_0 = \omega(t=0)$$



Rotación de un sólido rígido

- La **posición** de un **punto *P*** en el sólido viene dado por su **distancia** r al eje y su **ángulo** θ .

- La **velocidad** y **aceleración** de un punto *P*:

$$\vec{v}_P = \underbrace{\omega\, r}_{v_t}\, \hat{\theta} \qquad \vec{a}_P = \underbrace{-\omega^2\, r}_{a_n}\hat{r} + \underbrace{\alpha\, r}_{a_t}\hat{\theta}$$

- De manera más general, podemos escribir:

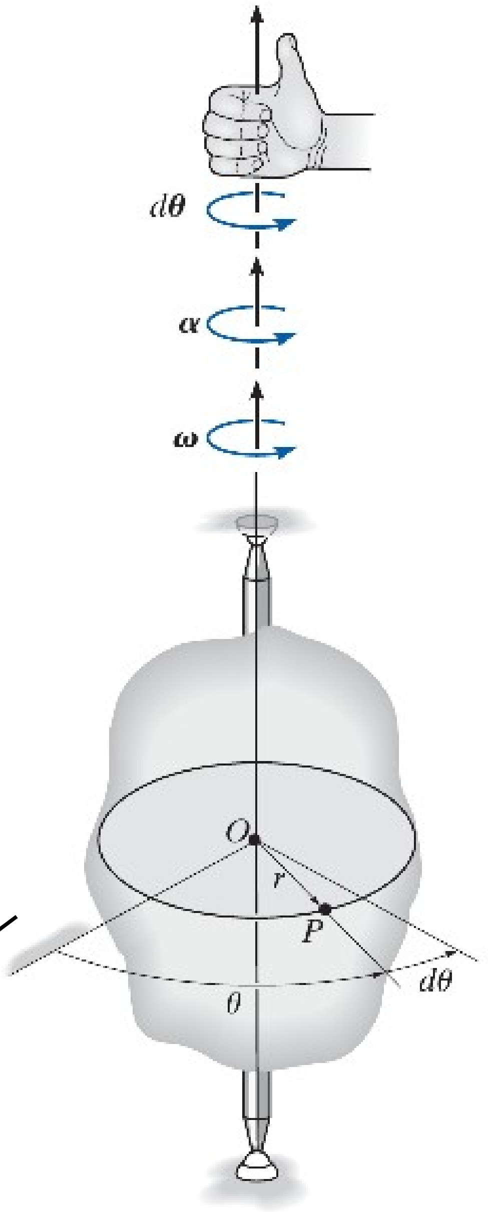
$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{a}_{P,t} = \vec{\alpha} \times \vec{r}$$

$$\vec{a}_{P,n} = -\omega^2 \vec{r}$$

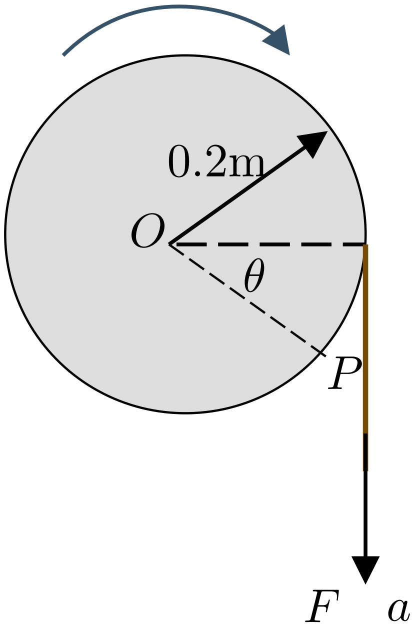
$$\vec{\omega} = \omega \hat{k}$$

$$\vec{\alpha} = \alpha \hat{k}$$



Ejemplo

- Se enrolla una cuerda alrededor de la rueda mostrada en la figura , la cual **inicialmente** está en **reposo** cuando $\theta = 0$. Si se aplica una fuerza a la cuerda y se le imparte una **aceleración** $a = (4t)\mathrm{m/s^3}$, , determine:
  - ➔ La **velocidad angular** de la rueda.
  - ➔ La **posición angular** de la línea *OP*.



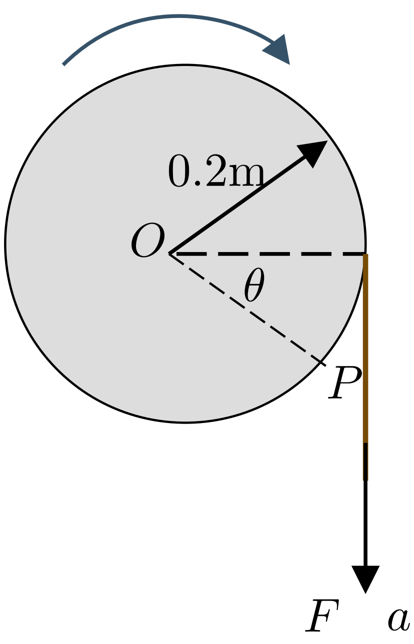
Ejemplo

- Se enrolla una cuerda alrededor de la rueda mostrada en la figura , la cual **inicialmente** está en **reposo** cuando $\theta=0$. Si se aplica una fuerza a la cuerda y se le imparte una **aceleración** $a=(4t)\mathrm{m/s^3}$, , determine:
  - ➔ La **velocidad angular** de la rueda.

La aceleración tangencial de la rueda:

$$a_t = \alpha\, r \quad \longrightarrow \quad \alpha = \frac{a_t}{r} = \frac{4t\,\mathrm{m/s}^3}{0.2\mathrm{m}}$$

$$\longrightarrow \quad \alpha = 20t\,\frac{\mathrm{rad}}{s^3}$$



La velocidad angular:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \quad \longrightarrow \quad \int_0^{\omega} d\omega' = \int_0^t \alpha\, dt'$$

$$\omega = 20\frac{\mathrm{rad}}{s^3}\int_0^t t'\, dt'$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\omega = 10t^2\,\frac{\mathrm{rad}}{s^3}}$$

Ejemplo

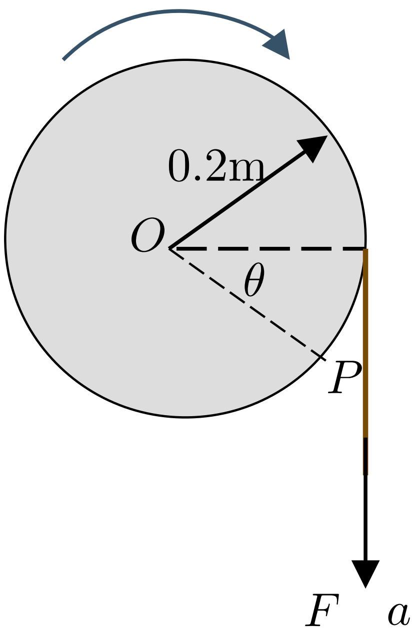
- Se enrolla una cuerda alrededor de la rueda mostrada en la figura , la cual **inicialmente** está en **reposo** cuando $\theta=0$. Si se aplica una fuerza a la cuerda y se le imparte una **aceleración** $a=(4t)\mathrm{m/s^3}$, , determine:
  - ➔ La **posición angular** de la línea *OP*.

Para la posición angular (ángulo) volvemos a integrar:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad \longrightarrow \quad \int_0^\theta d\theta' = \int_0^t \omega\, dt'$$

$$\theta = 10\frac{\text{rad}}{s^3}\int_0^t t'^2\, dt'$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\theta \approx 3.3t^3\,\frac{\text{rad}}{s^3}}$$



Clase de hoy

- Sólido rígido y centro de masa.
- Rotación de un sólido rígido.
- **Momento de inercia**

Ecuación de movimiento de rotación

- La **ecuación de movimiento** que dicta la **rotación** de un **sólido rígido** corresponde a

$$\boxed{\vec{\tau}^{(\mathrm{tot})} = I\vec{\alpha}}$$

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

  donde I es el **momento de inercia** de un cuerpo y α es la aceleración angular.

- Como todas las cantidades rotacionales, hay que ser consistente con la elección del punto de referencia.

- En particular, el **momento de inercia depende del eje de rotación**.

$$\vec{\tau}_O^{(\mathrm{tot})} = I_O\vec{\alpha}_O$$

Ecuación de movimiento de rotación

- El momento de inercia corresponde a la "***resistencia***" que presenta un cuerpo para rotar.

- El momento de inercia es el **análogo rotacional** a la **masa inercial**:

$$\vec{F}^{(\mathrm{tot})} = m\vec{a} = \dot{\vec{p}} \longrightarrow \vec{\tau}^{(\mathrm{tot})} = I\vec{\alpha} = \dot{\vec{l}}$$

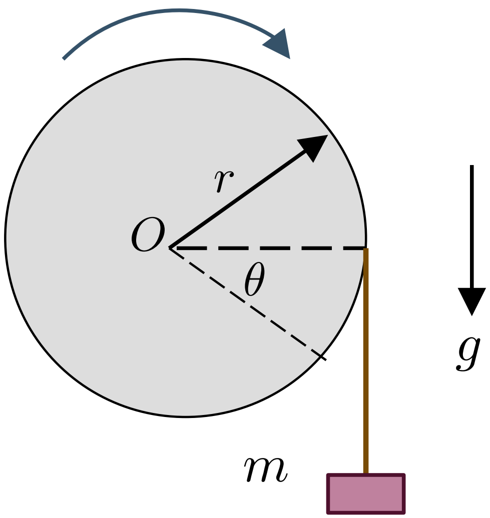
- Podemos definir el momentum angular de un cuerpo:

$$\boxed{\vec{l} = I\vec{\omega}}$$

que nuevamente es el análogo rotacional de la definición de momentum lineal $\vec{p} = m\vec{v}$.

Ejemplo

- Se enrolla una cuerda alrededor del **disco fijo** mostrado en la figura. De la cuerda cuelga un bloque de **masa** *m* que es afectado por la **gravedad**. Si sistema se encuentra **inicialmente** en el **reposo**, y el disco tiene un **momento de inercia** de rotación **alrededor de *O*** de $I = Mr^2/2$, con M la masa del disco, encuentre la velocidad angular del disco en función del tiempo.

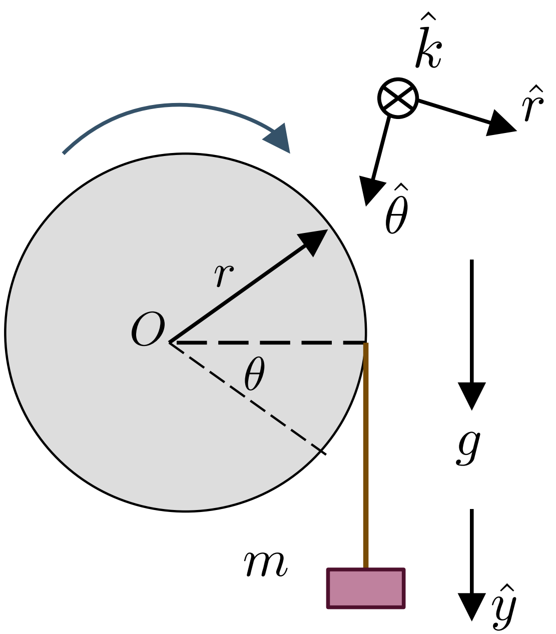


Ejemplo

- Se enrolla una cuerda alrededor del **disco fijo** mostrado en la figura. De la cuerda cuelga un bloque de **masa** *m* que es afectado por la **gravedad**. Si sistema se encuentra **inicialmente** en el **reposo**, y el disco tiene un **momento de inercia** de rotación **alrededor de *O*** de $I = Mr^2/2$, con M la **masa** del disco, encuentre la velocidad angular del disco en función del tiempo.

Ecuación de movimiento bloque:

$$ma_y = mg - T$$



Ecuación de movimiento disco:

$$I\alpha = rT \quad \longrightarrow \quad Mr^2\alpha = rT$$

$$\longrightarrow \quad Mr\alpha = m(g - a_y)$$

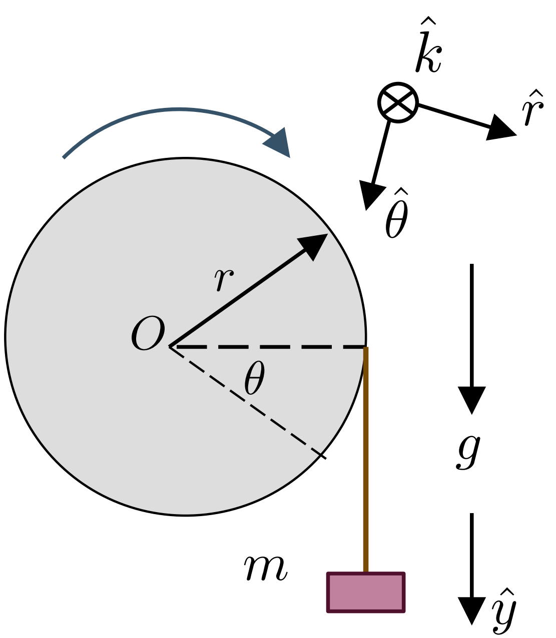
Si la cuerda no resbala:

$$a_y = r\,\alpha \quad \longrightarrow \quad Mr\alpha = m(g - r\alpha)$$

$$\longrightarrow \quad \alpha = \frac{mg}{r(m+M)}$$

Ejemplo

- Se enrolla una cuerda alrededor del **disco fijo** mostrado en la figura. De la cuerda cuelga un bloque de **masa** *m* que es afectado por la **gravedad**. Si sistema se encuentra **inicialmente** en el **reposo**, y el disco tiene un **momento de inercia** de rotación **alrededor de *O*** de $I{=}Mr^2/2$, con M la **masa** del disco, encuentre la velocidad angular del disco en función del tiempo.



La aceleración angular es constante:

$$\alpha = \frac{mg}{r(m+M)}$$

La velocidad angular es simplemente:

$$\longrightarrow \quad \boxed{\omega = \frac{mg}{r(m+M)}t}$$

Resumen

- Definimos un **sólido rígido**.
- Generalizamos el **centro de masa** de un sistema de partículas discretos a un **sólido contínuo**.
- Estudiamos la cinemática de rotación.
- Definimos el **momento de inercia**.
- Próxima clase:
  - ➔ Cálculo de momentos de inercia.