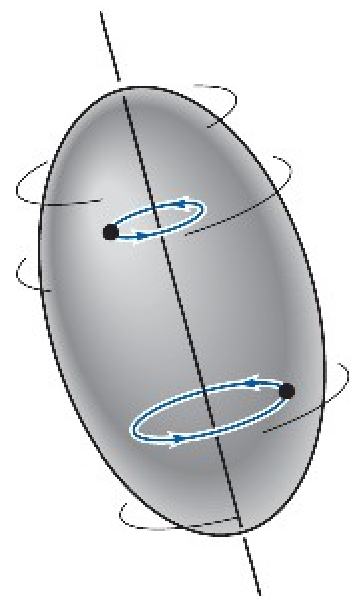
FACULTAD DE FÍSICA
PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATÓLICA DE CHILE

Dinámica (FIS1514)

Momento de inercia

Felipe Isaule

felipe.isaule@uc.cl



Lunes 20 de Noviembre de 2023

Resumen clase anterior

- Definimos un **sólido rígido**.
- Revisitamos la definición de **centro de masa** para un sólido rígido.
- Revisamos la **rotación** de un sólido rígido.
- Definimos el **momento de inercia**.

Clase de hoy

- Cálculo de momento de inercia.
- Teorema de Steiner y cuerpos compuestos.
- Momento de inercia de partículas puntuales.

Clase de hoy

- **Cálculo de momento de inercia.**
- Teorema de Steiner y cuerpos compuestos.
- Momento de inercia de partículas puntuales.

Momento de inercia

- La **ecuación de movimiento** que dicta la rotación de un sólido rígido es

$$\vec{\tau}^{(\mathrm{tot})} = I\vec{\alpha}$$

  donde I es el **momento de inercia**.

$$I = l/\omega$$

- En el SI de unidades tiene unidades de: $\mathrm{kg\,m^2}$
- El momento de inercia depende de la **forma** del sólido y del **eje de rotación**.

Momento de inercia

- El momento de inercia de un sólido que **rota en torno a un eje *z*** se define como

$$\boxed{I = \int r^2 dm}$$

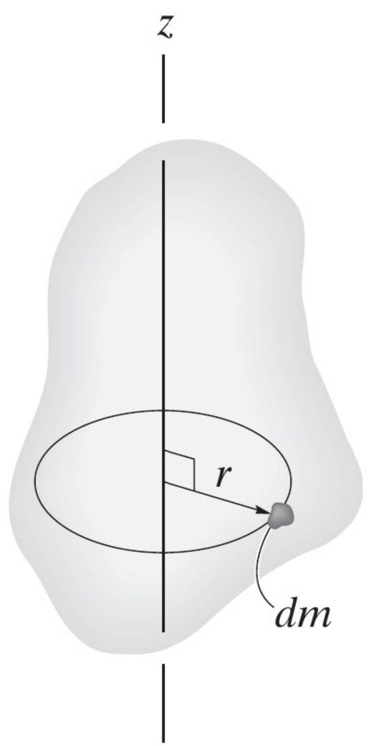
- Notar nuevamente que **depende del eje de rotación**.

- Si conocemos la **densidad** ρ del sólido:

Densidad lineal: $dm = \rho\, dx$

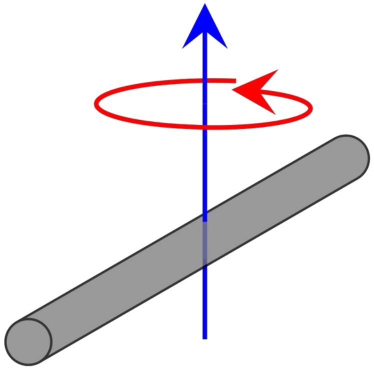
Densidad superficial: $dm = \rho\, dA$

Densidad volumétrica: $dm = \rho\, dV$



Algunos momentos de inercia

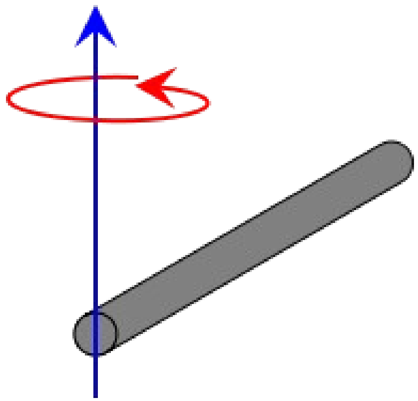
- Barra de **densidad constante** con **largo** *L* y **masa** *M* que rota en torno de su **centro**:



$$\rho = \frac{M}{L} \longrightarrow I = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \rho \, dx$$

$$\longrightarrow \boxed{I = \frac{ML^2}{12}}$$

- Barra de **densidad constante** con **largo** *L* y **masa** *M* que rota en torno de su **borde**:

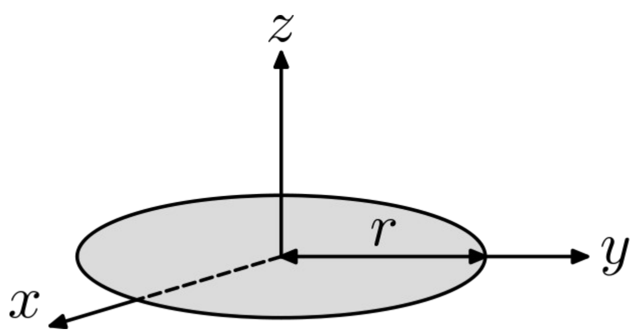


$$\rho = \frac{M}{L} \longrightarrow I = \int_{0}^{L} x^2 \rho \, dx$$

$$\longrightarrow \boxed{I = \frac{ML^2}{3}}$$

Algunos momentos de inercia

- Disco plano de **densidad constante** con **radio** *r* y **masa** *M* que rota en torno de su **centro (eje *z*)**:



$$\rho = \frac{M}{A} = \frac{M}{\pi r^2}$$

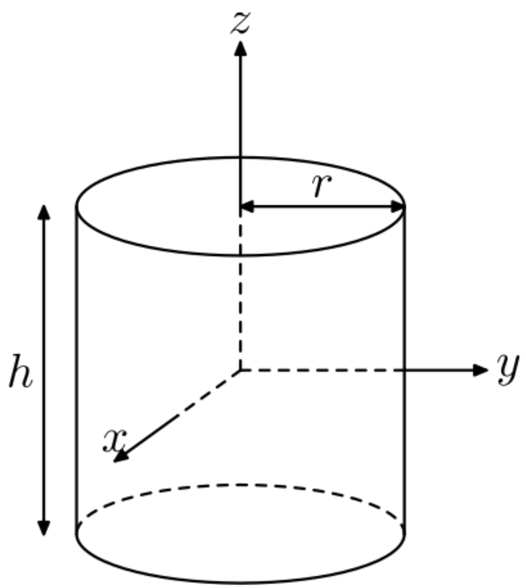
$$\longrightarrow \quad I_z = \int_A \rho\, r'^2 dA = \int_0^r r' dr' \int_0^{2\pi} d\theta \rho\, r'^2$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{I_z = \frac{M\, r^2}{2}}$$

Diferencial de área en polares: $dA = r\, dr\, d\theta$

Algunos momentos de inercia

- Cilindro de **densidad constante** con **radio** *r*, **altura** *h* y **masa** *M* que rota en torno de su **centro (eje *z*)**:



$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{h\pi r^2}$$

$$\longrightarrow I_z = \int_V \rho\, r'^2 dV = \int_0^r r' dr' \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz \rho\, r'^2$$

$$\longrightarrow \boxed{I_z = \frac{M\, r^2}{2}}$$

Diferencial de volumen en cilíndricas: $dv = r\, dr\, d\theta\, dz$

Clase de hoy

- Cálculo de momento de inercia.
- **Teorema de Steiner y cuerpos compuestos.**
- Momento de inercia de partículas puntuales.

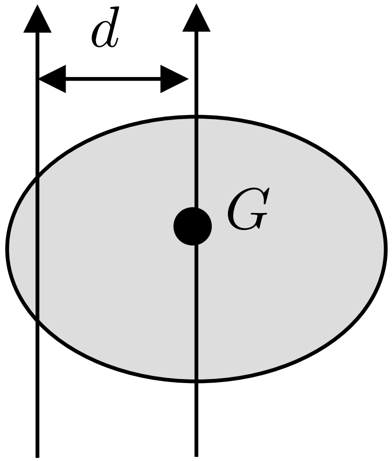
Teorema de los ejes paralelos (Steiner)

- Asumamos que conocemos el momento de inercia respecto a un eje que pasa por el **centro de masa** I_G.

- El **teorema de los ejes paralelos** (o de **Steiner**) permite obtener el momento de inercia I con respecto a un **eje paralelo** al centro de masa:

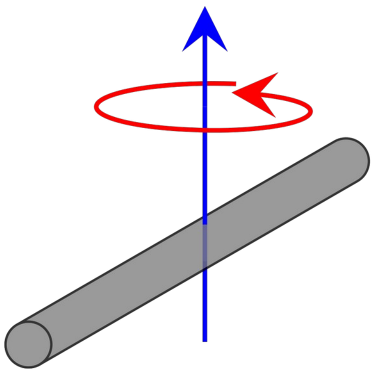
$$\boxed{I = I_G + Md^2}$$

donde *M* es la **masa** del sólido y *d* es la **distancia** entre el **centro de masa y el nuevo eje**.



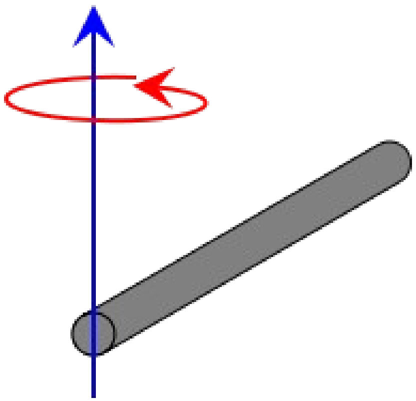
Ejemplo

- Utilizando el teorema de los ejes paralelos, calcule el momento de inercia de rotación de una barra que rota en torno a su borde:



$$I_G = \frac{ML^2}{12}$$

$$\longrightarrow \quad I = I_G + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{ML^2}{12} + \frac{ML^2}{4}$$

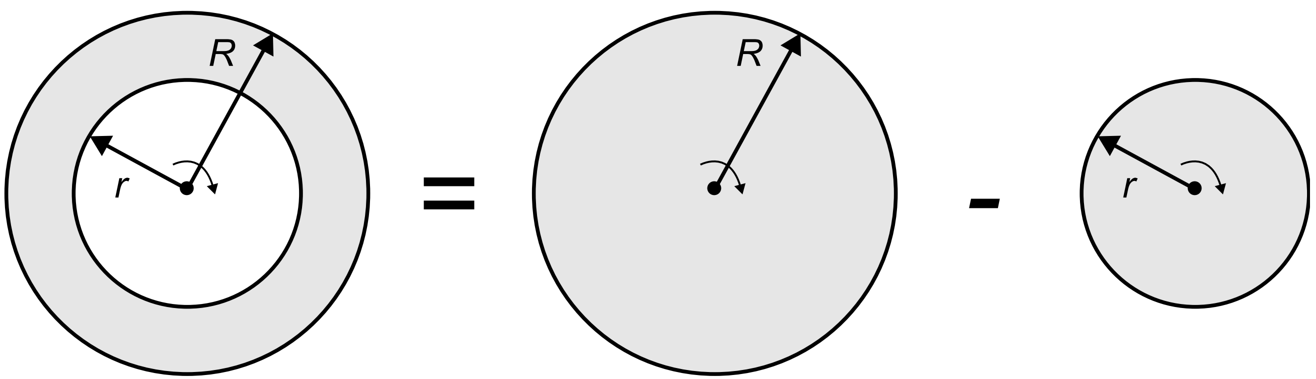


$$\longrightarrow \quad \boxed{I = \frac{ML^2}{3}}$$

Momento de inercia de cuerpos compuestos

- Si un sólido se **compone** de **varios cuerpos simples**, su momento de inercia con respecto a un **eje** es igual a la **suma** de los momentos de inercia de los cuerpos simples.

- Ejemplo: Si el disco de la figura tiene una densidad superficial constante ρ , el momento de inercia respecto a su centro:



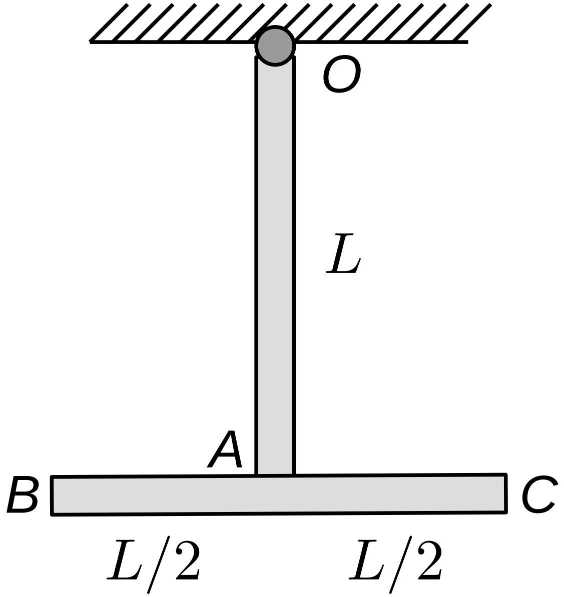
$m_R = \rho \pi R^2$ $\qquad$ $m_R = \rho \pi r^2$

$$\longrightarrow \quad I = I_M - I_m = \frac{MR^2}{2} - \frac{mr^2}{2} = \frac{\rho\pi R^4}{2} - \frac{\rho\pi r^4}{2}$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{I = \frac{\rho\pi(R^4 - r^4)}{2}}$$

Ejemplo

- El péndulo de la figura se compone de **dos barras** (*OA* y *BC*) de igual **masa** *M* y **largo** *L*. Determine el **momento de inercia** del péndulo con respecto al:
  - ➔ Punto *O*.
  - ➔ Centro de masa *G*.

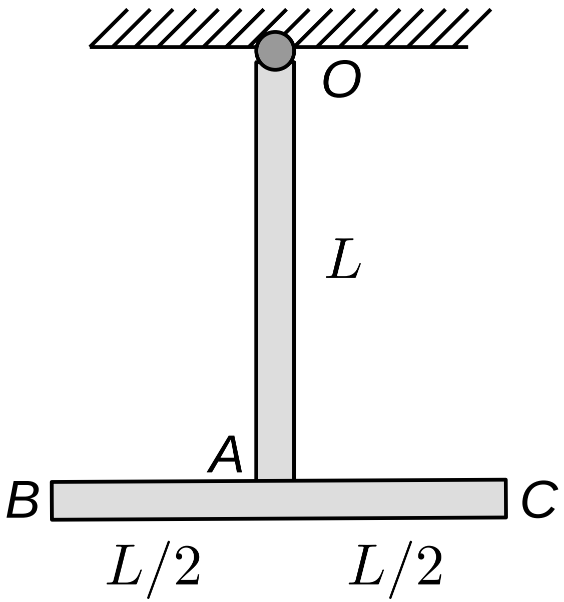


Ejemplo

- El péndulo de la figura se compone de **dos barras** (*OA* y *BC*) de igual **masa** *M* y **largo** *L*. Determine el **momento de inercia** del péndulo con respecto al:
  - ➔ Punto *O*.

El momento de inercia de la barra OA *en* torno a *O*:

$$I_{OA,O} = \frac{ML^2}{3}$$



El momento de inercia de la barra *BC* en torno a *A*:

$$I_{BC,A} = \frac{ML^2}{12}$$

Usando Steiner, el momento de inercia de la barra *BC* en torno a *O*:

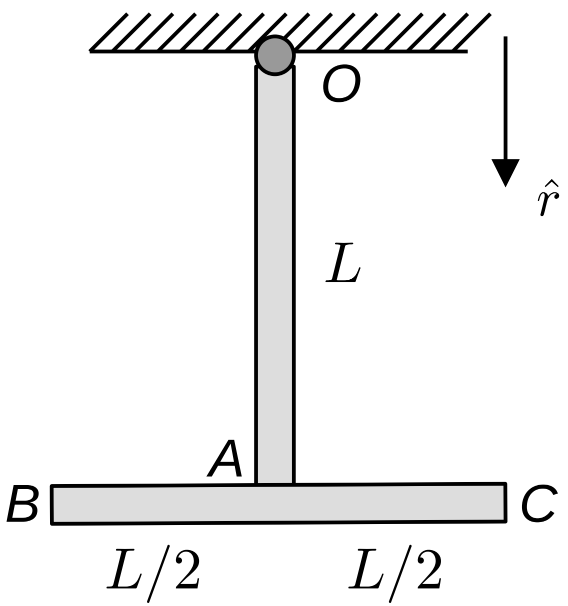
$$I_{BC,O} = I_{BC,A} + ML^2 = \frac{13ML^2}{12}$$

Finalmente, el momento de inercia del sistema compuesto:

$$I_O = I_{OA,O} + I_{BC,O} \boxed{= \frac{17ML^2}{12}}$$

Ejemplo

- El péndulo de la figura se compone de **dos barras** (*OA* y *BC*) de igual **masa** *M* y **largo** *L*. Determine el **momento de inercia** del péndulo con respecto al:
  - ➔ Centro de masa *G*.



La posición del centro de masa respecto a O es la suma del centro de masa de cada barra:

$$\vec{r}_G = \vec{r}_{OA,G} + \vec{r}_{BC,G} = \frac{L}{2}\hat{r} + L\hat{r} = \frac{3L}{4}\hat{r}$$

El momento de inercia con respecto a *G* se obtiene con Steiner:

$$I_G = I_O - M\left(\frac{3L}{4}\right)^2 = \frac{17ML^2}{12} - \frac{9ML^2}{16}$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{I_G = \frac{41ML^2}{48}}$$

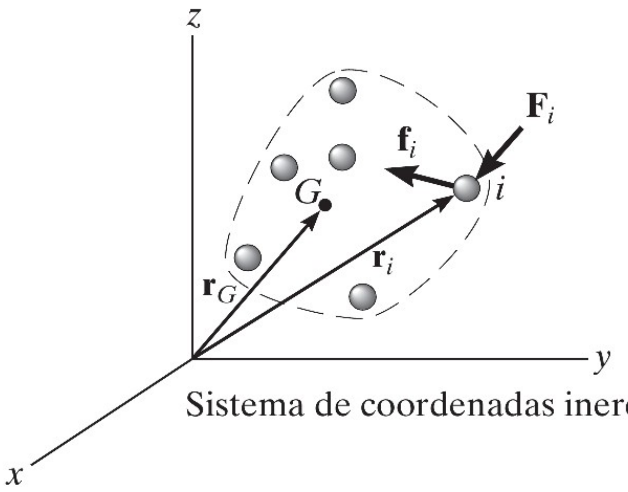
Clase de hoy

- Cálculo de momento de inercia.
- Teorema de Steiner y cuerpos compuestos.
- **Momento de inercia de partículas puntuales.**

Momento de inercia de partículas puntuales

- Aunque el momento de inercia es principalmente utilizado en cuerpos sólidos, se puede utilizar para **partículas puntuales**.
- El momento de inercia de un sistema de partículas se define como:

$$\boxed{I = \sum_i r_i^2 m_i}$$



Sistema de coordenadas inercial

Ejemplo 1

- El momento de inercia de un péndulo:

$$I = ml^2$$

- La ecuación de movimiento utilizando torque y momento de inercia:

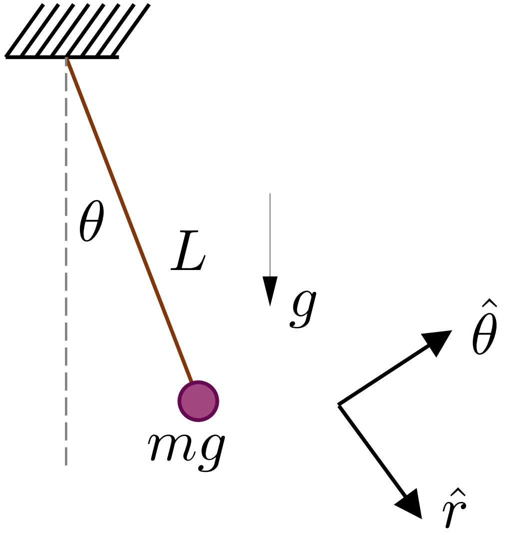
$$\vec{\tau} = l\hat{r} \times mg(\cos\theta\hat{r} - \sin\theta\hat{\theta})$$
$$= -lmg\sin\theta\hat{k}$$

$$\longrightarrow$$

$$\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$$

$$-lmg\sin\theta = ml^2\ddot{\theta}$$

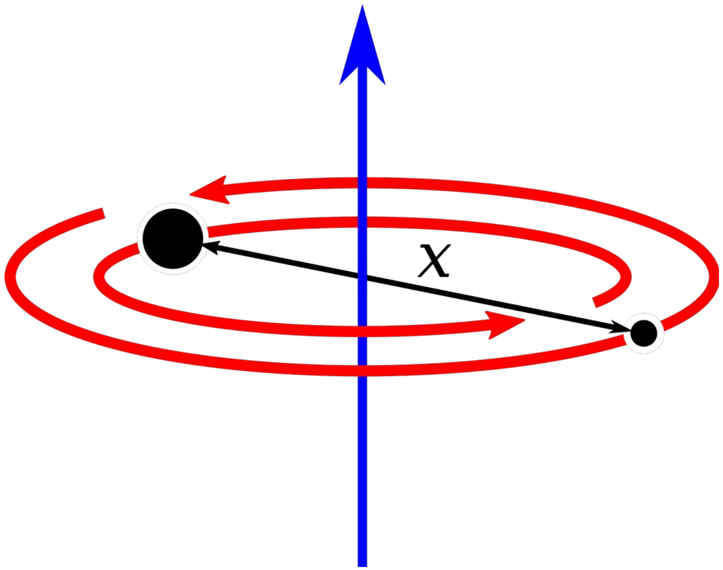
$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0}$$



Corresponde a la ecuación ya conocida de un Péndulo simple.

Ejemplo 2

- Si dos partículas de **masas** *m* y *M* están separadas por una **distancia** *R*, calcule el **momento de inercia** del sistema con respecto al **centro de masa**.

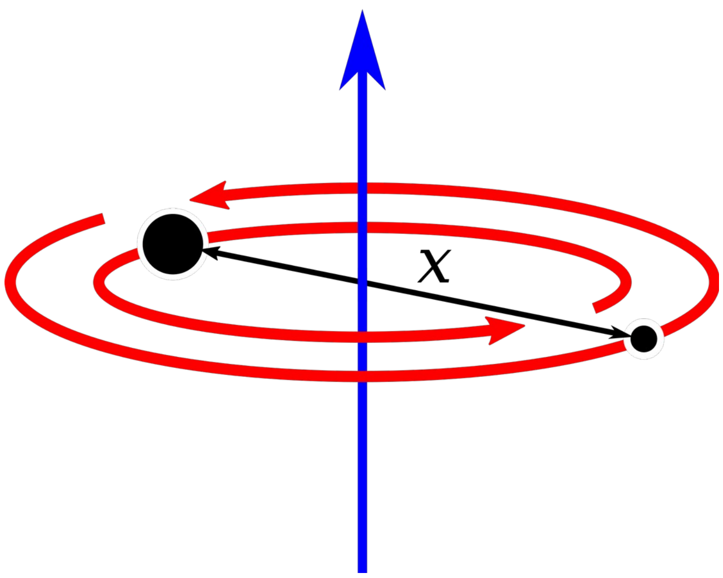


Ejemplo 2

- Si dos partículas de **masas** *m* y *M* están separadas por una **distancia** *R*, calcule el **momento de inercia** del sistema con respecto al **centro de masa**.

El centro de masa desde la masa *M*:

$$r_G = \frac{M(0) + mR}{m+M} = \frac{mR}{m+M}$$



El momento de inercia en torno a *G*:

$$I_G = \sum_i r_i^2 m_i = r_{M,G}^2 M + r_{m,G}^2 m$$

$$= \frac{m^2R^2}{(m+M)^2} M + \frac{M^2R^2}{(m+M)^2} m$$

$$= \frac{mM(m+M)R^2}{(m+M)^2} = \frac{mMR^2}{m+M}$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{I_G = \mu R^2}$$

Masa reducida: $\mu = \dfrac{mM}{m+M}$

Resumen

- Presentamos cómo **calcular** el momento de inercia de un **sólido**.
- Presentamos el **teorema de ejes paralelos** para calcular fácilmente momentos de inercia respecto a cualquier eje.
- Revisamos momentos de inercia de **objetos compuestos**.
- Definimos el momento de inercia para **partículas puntuales**.
- Próxima clase:
  - ➔ Momentum angular y energía rotacional.