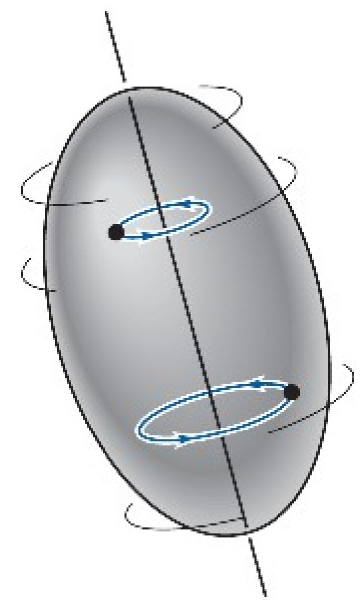
FACULTAD DE FÍSICA
PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATÓLICA DE CHILE

Dinámica (FIS1514)

Trabajo y energía de un sólido rígido

Felipe Isaule

felipe.isaule@uc.cl



Miércoles 22 de Noviembre de 2023

Resumen clase anterior

- Presentamos cómo **calcular** el **momento de inercia** de un sólido rígido.
- Presentamos el **teorema de los ejes paralelos** y el momento de inercia de **cuerpos compuestos**.
- Definimos el momento de inercia de un sistema de **partículas puntuales**.

Clase de hoy

- Energía cinética y trabajo de un sólido rígido.
- Energía potencial de un sólido rígido y conservación de la energía.

Clase de hoy

- **Energía cinética y trabajo de un sólido rígido.**
- Energía potencial de un sólido rígido y conservación de la energía.

Energía cinética de un sólido rígido

- La energía cinética de un cuerpo que se **mueve en un plano** corresponde a la **suma** de la **energía cinética traslacional** y **rotacional**

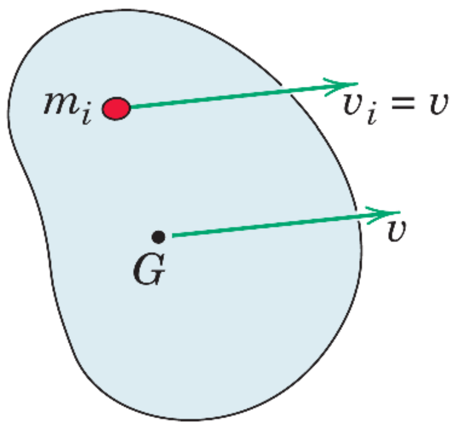
$$\boxed{T = T_t + T_r}$$

- La energía de traslación se obtiene de considerar el sólido como una **partícula puntual** y considerar la **velocidad de su centro de masa**:

$$\boxed{T_t = \frac{1}{2} M v_G^2}$$

M : Masa del sólido

v_G : Velocidad centro de masa



- Mientras que la energía cinética **rotacional**:

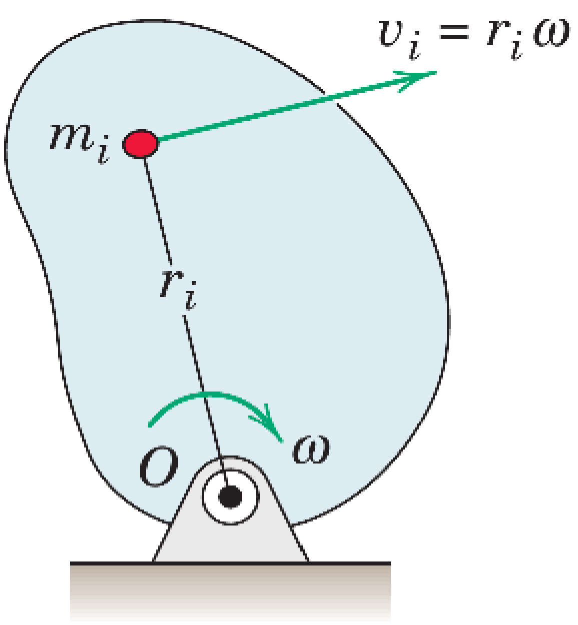
$$\boxed{T_r = \frac{1}{2} I_G \omega^2}$$

I : Momento de inercia

ω : Velocidad angular

Energía cinética de un sólido rígido

- En el caso particular en que un sólido rota en torno a un **eje fijo** *O*:



$$T = \frac{M}{2}v_G^2 + \frac{I_G}{2}\omega^2 = \frac{1}{2}\left(Mr_G^2 + I_G\right)\omega^2$$

$$v_G = r_G\omega$$

Steiner: $I_O = Mr_G^2 + I_G$

$$\boxed{T = \frac{1}{2}I_O\omega^2}$$

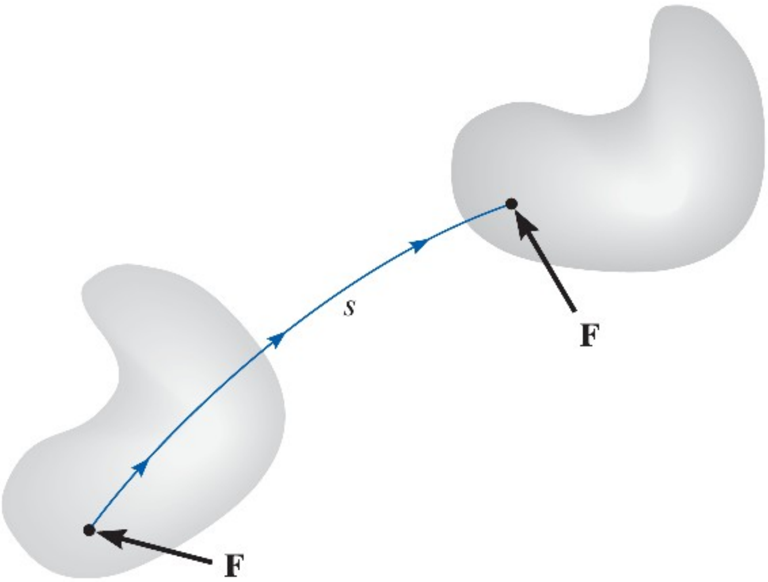
- Notar que en la rotación en torno a un eje fijo el centro de masa se mueve, pero I_O y ω incluyen su energía.

Trabajo

- Recordamos que el trabajo realizado por una fuerza sobre un cuerpo es

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

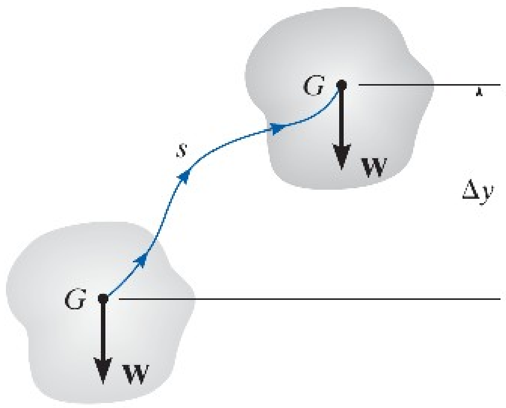
donde se integra sobre la distancia recorrida por el cuerpo.



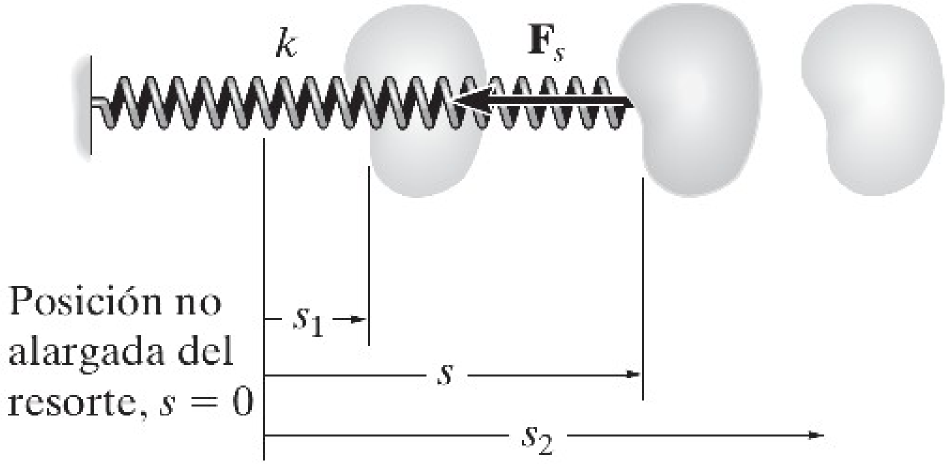
Trabajo

- El trabajo realizado por el **peso** viene dado por la diferencia en alturas del **centro de masa**:

$$W_g = -mg\Delta y_G$$



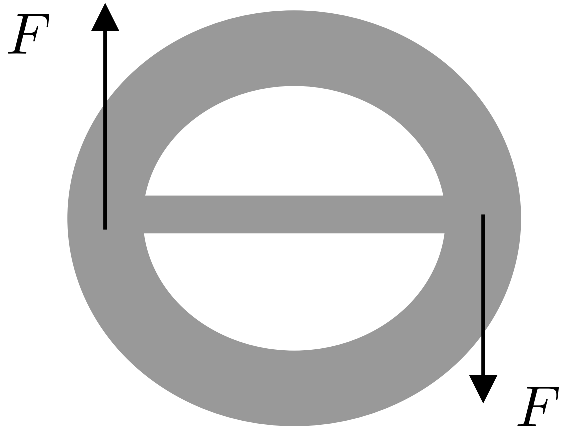
- El trabajo realizado por un **resorte** viene dado por sus **desplazamientos**:



$$W_e = -\frac{k}{2}(s_2^2 - s_1^2)$$

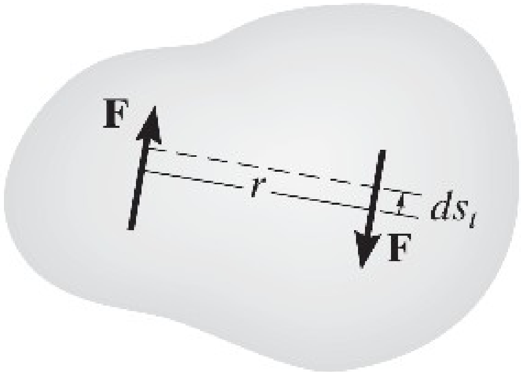
Momento par

- Consideremos **dos fuerzas** de **igual magnitud** aplicadas a un sólido en **dirección opuesta.**



- El trabajo en la dirección **traslacional** se **cancela**:

$$dW_t = F_t ds - F_t ds = 0$$

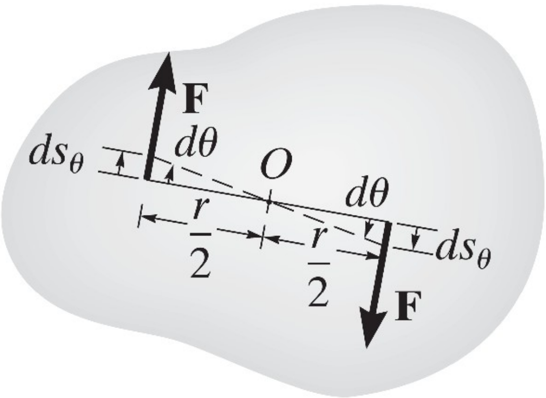


- Sin embargo el trabajo en la dirección **rotacional** es finito:

$$dW_r = F_t \left(\frac{r}{2} d\theta\right) + F_t \left(\frac{r}{2} d\theta\right) = F r d\theta$$

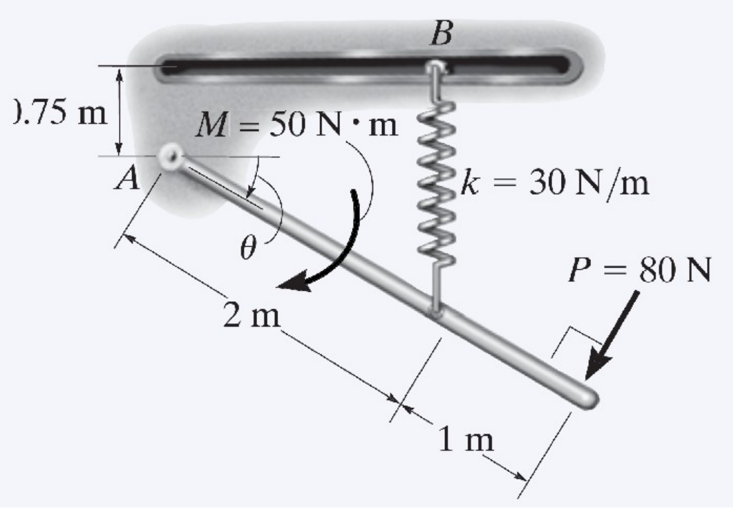
$$\longrightarrow \quad \boxed{dW_r = \tau d\theta}$$

Torque (momento) de par



Ejemplo

- La barra tiene una **masa** de m=10 kg y se somete a un **momento de par** M=50 Nm y a una **fuerza P**=80 N, la cual siempre se aplica **perpendicular** al extremo de la barra. Además, la **longitud no alargada** del resorte es de x_0=0.5 m y permanece en la posición vertical. Determine el **trabajo total** realizado por **todas las fuerzas** que actúan en la barra cuando gira hacia abajo desde θ=0° hasta θ= 90°.



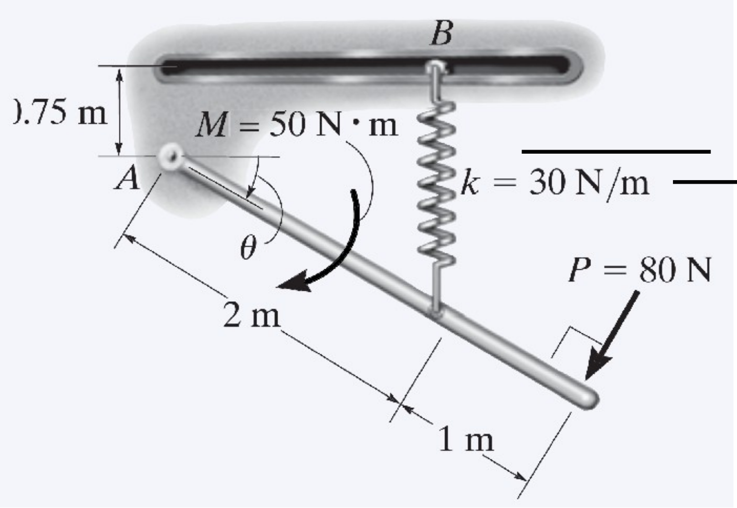
Ejemplo

- La barra tiene una **masa** de *m*=10 kg y se somete a un **momento de par** *M*=50 Nm y a una **fuerza** *P*=80 N, la cual siempre se aplica **perpendicular** al extremo de la barra. Además, la **longitud no alargada** del resorte es de x_0=0.5 m y **permanece en la posición vertical**. Determine el **trabajo total** realizado por **todas las fuerzas** que actúan en la barra cuando gira hacia abajo desde θ=0° hasta θ= 90°.

El trabajo realizado por el peso:

$$W_{\text{peso}} = mg\Delta y_G = 147\,\text{J}$$

$$\Delta y_G = 1.5\,\text{m}$$



Momento par:

$$W_{\text{par}} = M\Delta\theta \approx 78.5\,\text{J}$$

$$M = 50\,\text{Nm} \qquad \Delta\theta = \pi/2$$

Resorte:

$$h = 0$$

$$W_{\text{e}} = -\frac{k}{2}(s_2^2 - s_1^2) = -75\,\text{J}$$

$$s_1 = (0.75 - 0.5)\text{m} = 0.25\,\text{m}$$

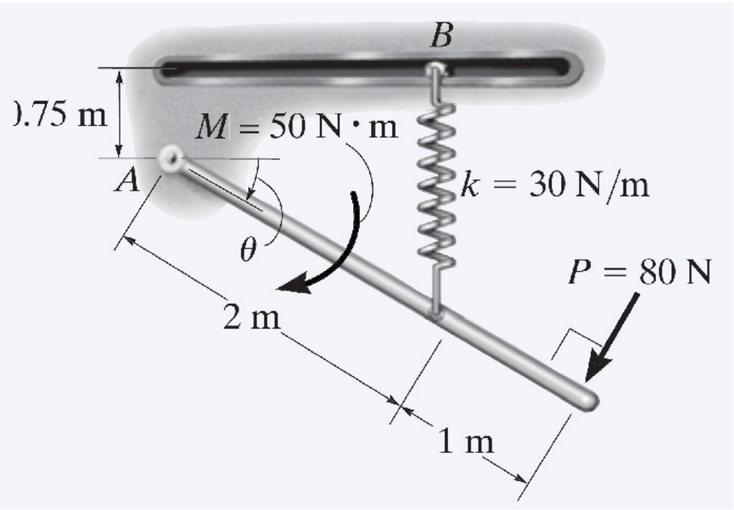
$$s_2 = (0.75 + 2 - 0.5)\text{m} = 2.25\,\text{m}$$

Ejemplo

- La barra tiene una **masa** de m=10 kg y se somete a un **momento de par** M=50 Nm y a una **fuerza** P=80 N, la cual siempre se aplica **perpendicular** al extremo de la barra. Además, la **longitud no alargada** del resorte es de x_0=0.5 m y **permanece en la posición vertical**. Determine el **trabajo total** realizado por **todas las fuerzas** que actúan en la barra cuando gira hacia abajo desde θ=0° hasta θ= 90°.

Fuerza P:

$$W_P = P\Delta s = P\underbrace{R}_{R=3\,\mathrm{m}}\underbrace{\Delta\theta}_{\Delta\theta=\pi/2} \approx 377\,\mathrm{J}$$



Entonces el trabajo total es la suma de los trabajos ya calculados:

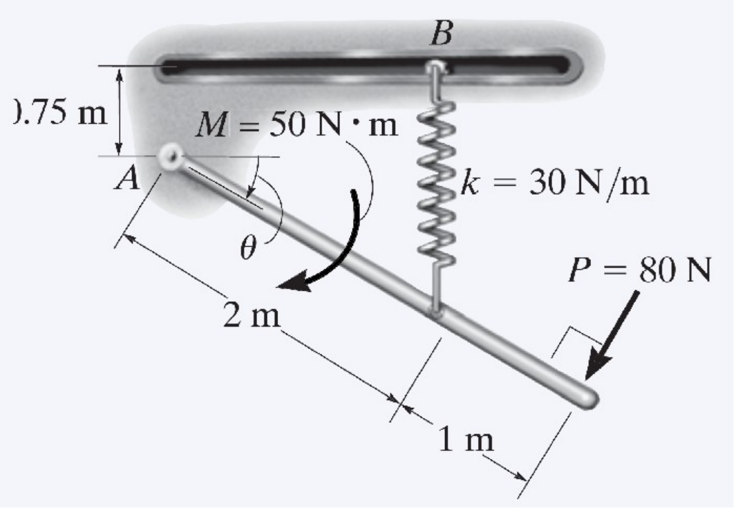
$$\boxed{W \approx 528\,\mathrm{J}}$$

Ejemplo

- La barra tiene una **masa** de m=10 kg y se somete a un **momento de par** M=50 Nm y a una **fuerza** P=80 N, la cual siempre se aplica **perpendicular** al extremo de la barra. Además, la **longitud no alargada** del resorte es de x_0=0.5 m y **permanece en la posición vertical**. Determine el **trabajo total** realizado por **todas las fuerzas** que actúan en la barra cuando gira hacia abajo desde θ=0° hasta θ= 90°.

Tarea:

¿Cuál es la energía cinética de la barra para θ=0° y θ= 90°?



Clase de hoy

- Energía cinética y trabajo de un sólido rígido.
- **Energía potencial de un sólido rígido y conservación de la energía.**

Energía potencial

- La **energía potencial gravitatoria** de un sólido es:

$$\boxed{U_g = Mgh_G}$$

M : Masa del sólido

h_G : Altura centro de masa

- Mientras que la **energía potencial elástica** es:

$$\boxed{U_e = \frac{1}{2}k(\Delta s)^2}$$

Δs : Estiramiento resorte

Principio de trabajo y energía

- Al igual que con partículas puntuales, el **principio de trabajo y energía** para un sólido toma la forma

$$\boxed{T_1 + U_1 + W' = T_2 + U_2}$$

  donde *T* incluye energía traslacional y rotacional y *W'* es el trabajo realizado por fuerzas no conservativas.

- Cuando sólo hay fuerzas conservativas, la **energía se conserva**:

$$\boxed{T_1 + U_1 = T_2 + U_2}$$

Potencia

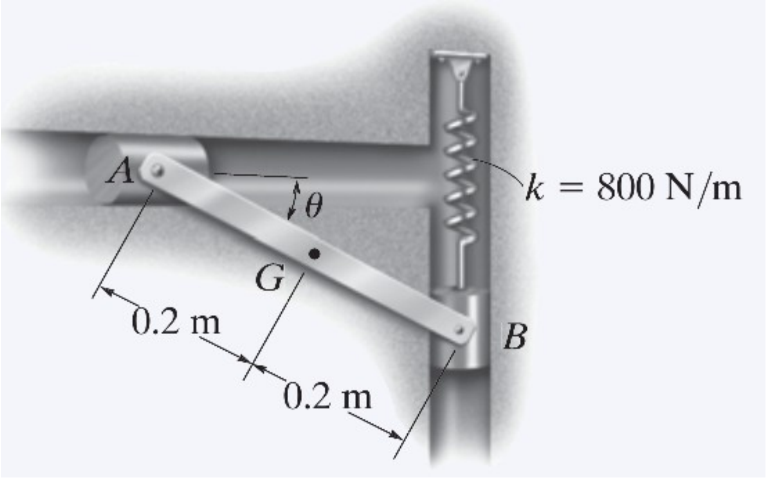
- Como es esperable, la **potencia** se puede también separar en potencia traslacional y rotacional

$$\boxed{P = \vec{F} \cdot \vec{v}_G + \vec{\tau} \cdot \vec{\omega}}$$

donde el primer término considera fuerzas que generan traslación, y el segundo a torques que generan rotación.

Ejemplo

- La barra *AB* de **masa** m=10kg está **restringida** de modo que sus extremos se mueven en las ranuras horizontal y vertical. La **constante** del resorte es k=800N/m y **no está alargado** cuando θ=0°. Determine la **velocidad angular** de **AB** cuando θ=0°, si la barra se suelta desde el **reposo** cuando θ=30°.

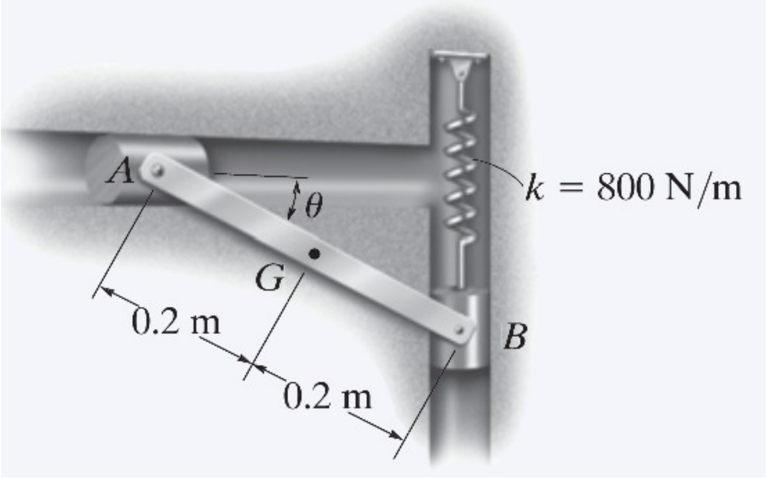


Ejemplo

- La barra *AB* de **masa** *m*=10kg está **restringida** de modo que sus extremos se mueven en las ranuras horizontal y vertical. La **constante** del resorte es *k*=800N/m y **no está alargado** cuando *θ*=0°. Determine la **velocidad angular** de **AB** cuando *θ*=0°, si la barra se suelta desde el **reposo** cuando *θ*=30°.

Instante 1: *θ*=30°.

Instante 2: *θ*=0°.



Energía potencial resorte:

$$U_{e,1} = \frac{k}{2}(\Delta s_1)^2 = 16\,\mathrm{J}$$

$$\Delta s_1 = 0.4\sin(30^\circ)\mathrm{m} = 0.2\,\mathrm{m}$$

Energía potencial gravitatoria:

$$U_{g,1} = Mgh_{G,1} = -9.8\,\mathrm{J}$$

$$h_{G,1} = 0.2\sin(30^\circ)\mathrm{m} = -0.1\,\mathrm{m}$$

Energía total inicial:

Reposo

$$E_1 = U_{e,1} + U_{g,1} + \cancel{T_1} = 6.2\,\mathrm{J}$$

Ejemplo

- La barra *AB* de **masa** m=10kg está **restringida** de modo que sus extremos se mueven en las ranuras horizontal y vertical. La **constante** del resorte es k=800N/m y **no está alargado** cuando θ=0°. Determine la **velocidad angular** de **AB** cuando θ=0°, si la barra se suelta desde el **reposo** cuando θ=30°.

Instante 1: θ=30°.

Instante 2: θ=0°.

No hay energía potencial elástica en θ=0° (largo natural).

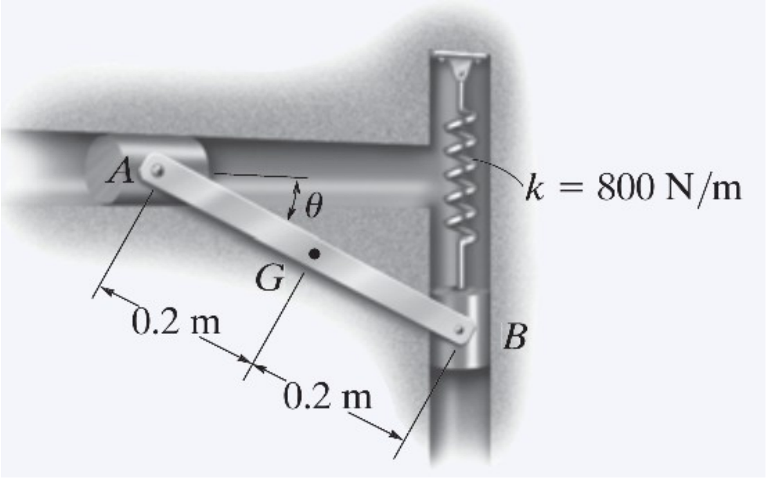
Tampoco hay gravitatoria porque h=0 en θ=0° .

Energía cinética:

$$T_2 = \frac{M}{2} v_{G,2}^2 + \frac{I_G}{2}\omega_2^2 = \frac{M}{2}\left(r_{AG}^2 + \frac{r_{AB}^2}{12}\right)\omega_2^2$$

$$v_{G,2}^2 = r_{AG}\omega_2 \qquad \text{Momento inercia barra : } I_G = \frac{ML^2}{12}$$

$$r_{AG} = 0.2\text{m} \qquad L = r_{AB} = 0.4\text{m}$$



$$\longrightarrow \qquad E_2 = T_2 \approx 0.27\omega_2^2\,\text{kg m}^2$$

Ejemplo

- La barra *AB* de **masa** m=10kg está **restringida** de modo que sus extremos se mueven en las ranuras horizontal y vertical. La **constante** del resorte es k=800N/m y **no está alargado** cuando θ=0°. Determine la **velocidad angular** de **AB** cuando θ=0°, si la barra se suelta desde el **reposo** cuando θ=30°.

Instante 1: θ=30°.

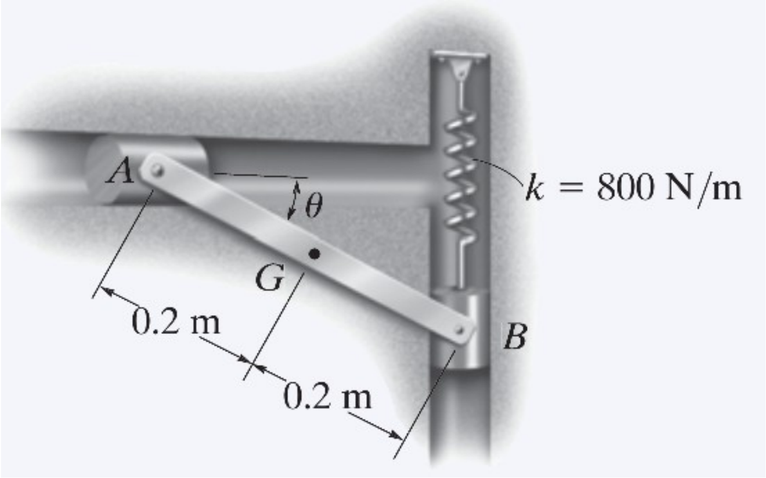
Instante 2: θ=0°.

Imponiendo conservación de la energía:

$$E_1 = E_2$$

$$6.2\,\mathrm{J} = 0.27\omega_2^2\,\mathrm{kg\ m}^2$$

$$\longrightarrow \qquad \boxed{\omega_2 \approx 4.8\,\mathrm{rad/s}}$$



Resumen

- Generalizamos los conceptos de **trabajo y energía** a un sólido rígido.
- Definimos la **energía cinética rotacional**.
- Próxima clase:
  - ➔ Momentum e impulso de un sólido rígido.
  - ➔ Rodar sin deslizar.
  - ➔ Más rotación y traslación de un sólido rígido.