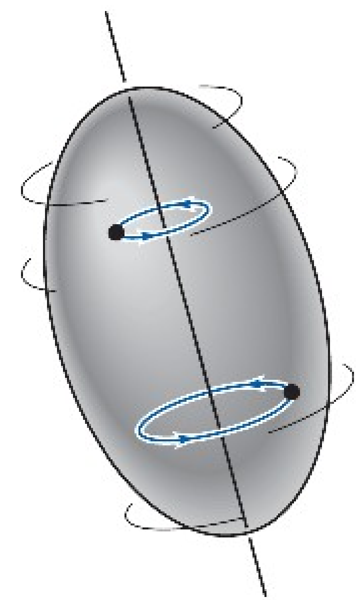
FACULTAD DE FÍSICA
PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATÓLICA DE CHILE

Dinámica (FIS1514)

Rodar sin deslizar y momentum de un sólido

Felipe Isaule

felipe.isaule@uc.cl



Lunes 27 de Noviembre de 2023

Resumen clase anterior

- Revisitamos los conceptos de **trabajo y energía** para aplicarlos a sólidos rígidos.
- Revisitamos el concepto de **conservación de la energía**.

Clase de hoy

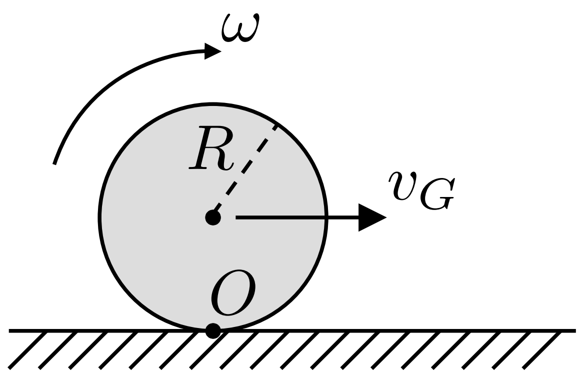
- Rodar sin deslizar.
- Momentum e impulso de un sólido rígido.

Clase de hoy

- **Rodar sin deslizar.**
- Momentum e impulso de un sólido rígido.

Rodar sin deslizar

- Cuando un sólido **rueda sin deslizar**, la distancia traslacional recorrida por el cuerpo es igual a la distancia rotado por un punto *O* en el borde:



$$d_G = R\theta$$

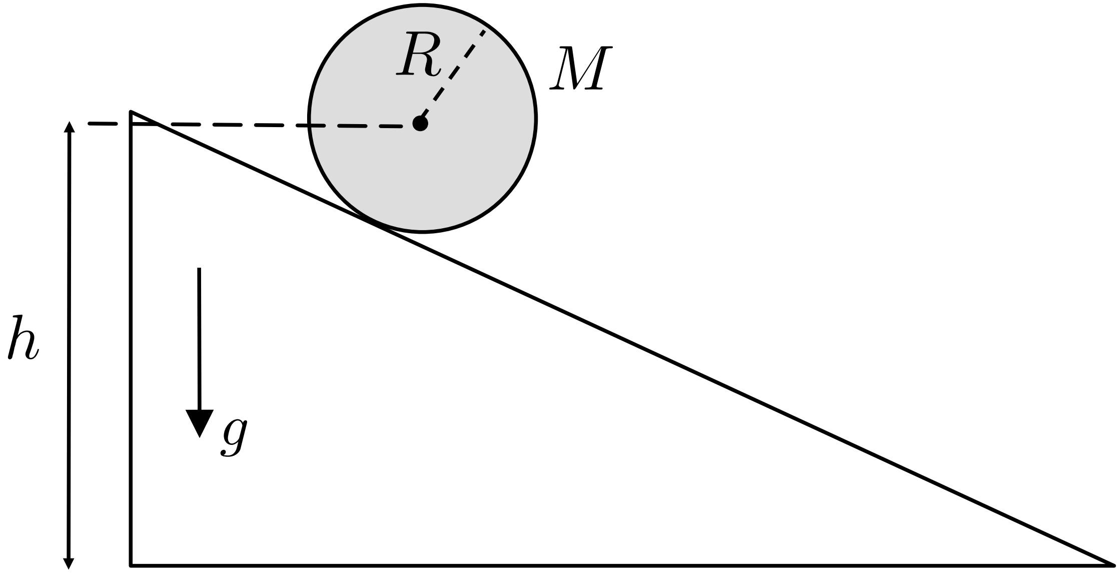
- La velocidad del centro de masa y la velocidad angular satisfacen:

$$\boxed{v_G = R\omega} \longrightarrow a_G = R\alpha$$

- Por otro lado, cuando un cuerpo **desliza** significa que **no rota**.

Ejemplo (Parte 1)

- Un **disco** de **masa** *M* y **radio** *R* es soltado desde el **reposo** a una **altura** *h* por un plano inclinado. Si el disco rueda **sin resbalar**, encuentre la **velocidad del centro de masa** del disco cuando éste llega a la **superficie**.



Ejemplo (Parte 1)

- Un **disco** de **masa** *M* y **radio** *R* es soltado desde el **reposo** a una **altura** *h* por un plano inclinado. Si el disco rueda **sin resbalar**, encuentre la **velocidad del centro de masa** del disco cuando éste llega a la **superficie**.

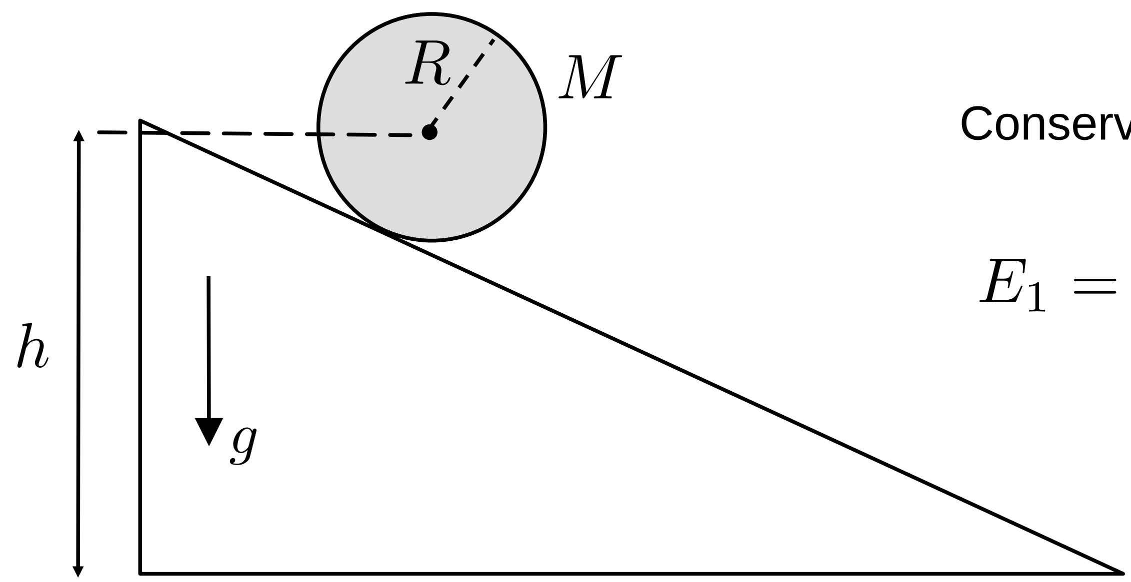
Energía inicial:

$$E_1 = Mgh$$

Energía final:

$$E_2 = \frac{M}{2}v_G^2 + \frac{I}{2}\omega^2 = \frac{3M}{4}v_G^2$$

$$I = \frac{MR^2}{2} \qquad \omega = v_G/R$$



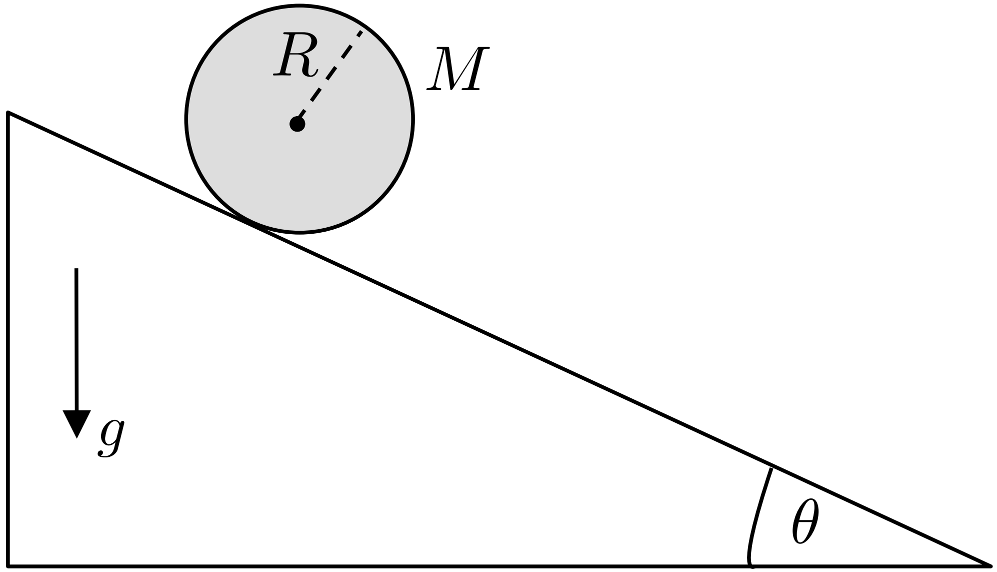
Conservación de la energía:

$$E_1 = E_2 \qquad \longrightarrow \qquad \boxed{v_G = 2\sqrt{\frac{gh}{3}}}$$

¿Qué hace rodar la rueda?

Ejemplo (Parte 2)

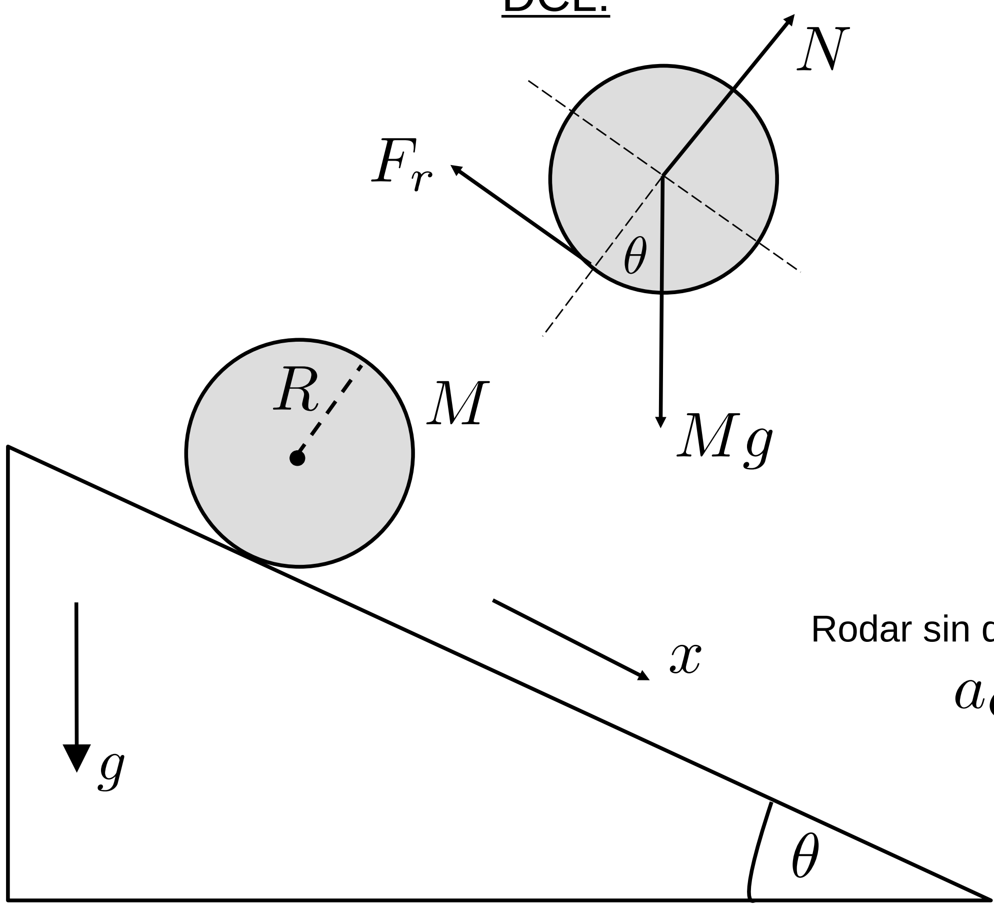
- Un **disco** de **masa** *M* y **radio** *R* se encuentra en un plano inclinado que forma un ángulo θ con la horizontal. Si el plano ejerce una **fuerza de fricción** sobre el disco que lo hace **rodar sin deslizar**, encuentre la **aceleración angular** del disco.



Ejemplo (Parte 2)

- Un **disco** de **masa** *M* y **radio** *R* se encuentra en un plano inclinado que forma un ángulo θ con la horizontal. Si el plano ejerce una **fuerza de fricción** sobre el disco que lo hace **rodar sin deslizar**, encuentre la **aceleración angular** del disco.

DCL:



La fuerza de roce provoca la rotación:

$$\tau_G = I_G \alpha$$

$$\tau_G = R\,F_r$$

$$I_G = \frac{MR^2}{2} \quad \longrightarrow \quad \alpha = \frac{2F_r}{MR}$$

Ecuación de movimiento eje *x*:

$$Mg\sin\theta - F_r = Ma_G$$

Rodar sin deslizar:

$$a_G = R\alpha \quad \longrightarrow \quad F_r = M(g\sin\theta - R\alpha)$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\alpha = \frac{2g\sin\theta}{3R}}$$

Rodar sin deslizar

- En el ejemplo anterior, la fuerza de roce es responsible de ejercer un **torque**, el que genera una **aceleración angular**.

- La fuerza de roce es **estática**.

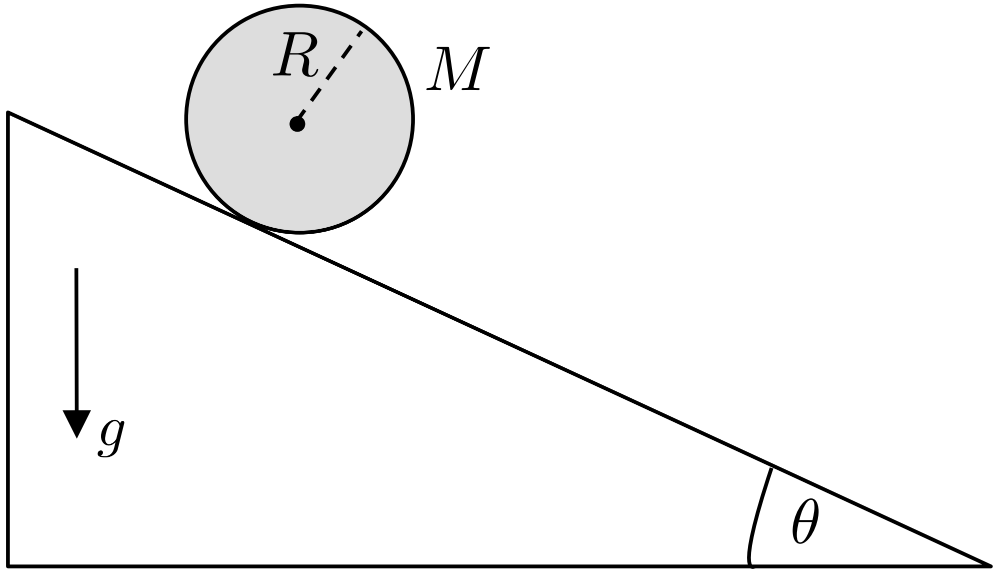
- Esto es porque el **punto de contacto** del cuerpo con la superficie está en **reposo con respecto a la superficie**:

$$\vec{v}_O = -\vec{v}_G$$

- El punto *O* en contacto con la superficie se llama **centro instantáneo de velocidad cero**.

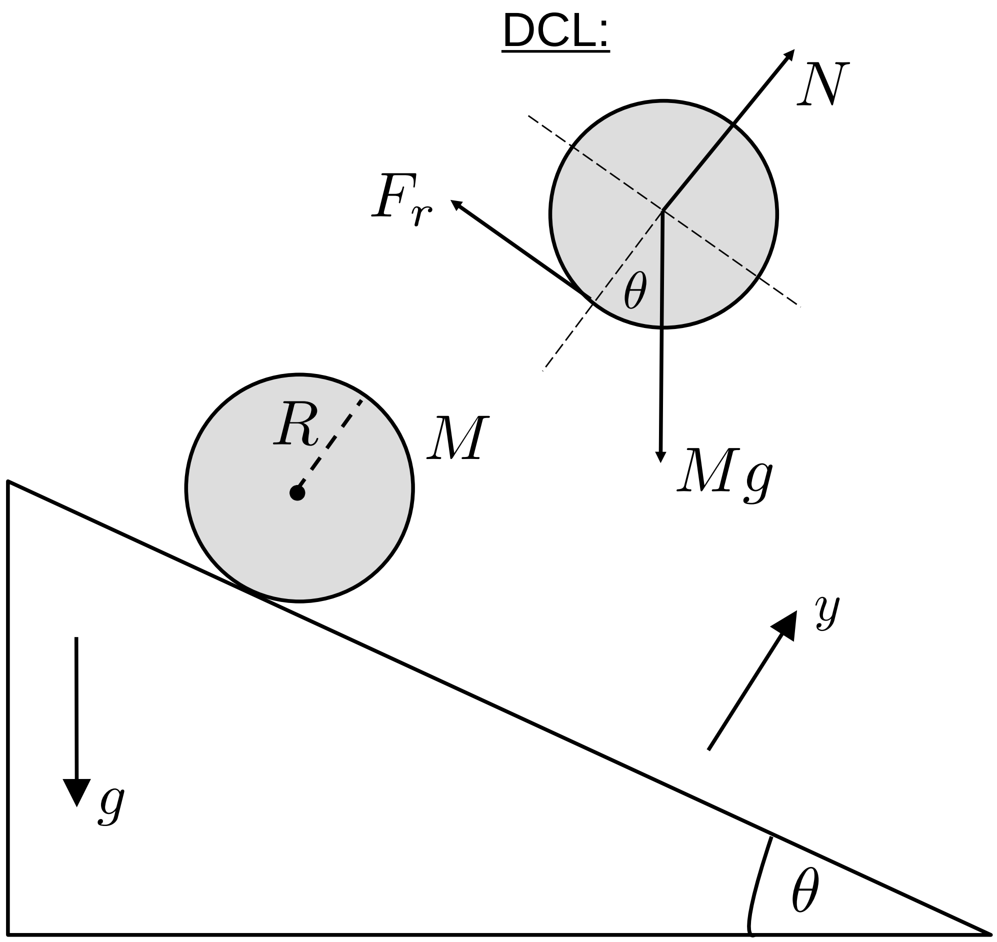
Ejemplo (Parte 3)

- Un **disco** de **masa** *M* y **radio** *R* se encuentra en un plano inclinado que forma un ángulo θ con la horizontal. Si el plano ejerce una **fuerza de fricción estática** sobre el disco, qué **condición** debe satisfacer el **coeficiente de roce** μ_e para que el disco **deslice**.



Ejemplo (Parte 3)

- Un **disco** de **masa** *M* y **radio** *R* se encuentra en un plano inclinado que forma un ángulo θ con la horizontal. Si el plano ejerce una **fuerza de fricción estática** sobre el disco, qué **condición** debe satisfacer el **coeficiente de roce** μ_e para que el disco **deslice**.



Para que el disco deslice:

$$F_r \leq \mu_e N$$

De la ecuación de movimiento en *y*:

$$N = M g \cos\theta$$

De las partes anteriores del ejemplo:

$$F_r = M(g\sin\theta - R\alpha) = \frac{M g \sin\theta}{3}$$

$$\alpha = \frac{2g\sin\theta}{3R}$$

Juntando todo obtenemos:

$$\boxed{\mu_e \leq \frac{\tan\theta}{3}}$$

Deslizar: $\leq$
No deslizar: $\geq$

Clase de hoy

- Rodar sin deslizar.
- **Momentum e impulso de un sólido rígido.**

Momentum de un sólido rígido

- El **momentum lineal** de un sólido rígido se obtiene considerando la velocidad del **centro de masa**:

$$\boxed{\vec{p} = M\vec{v}_G}$$

M : Masa del sólido

- Por otra parte, el **momentum angular** de un sólido rígido que rota respecto a su **centro de masa**, es

$$\boxed{\vec{l}_G = I_G\vec{\omega}_G}$$

I : Momento de inercia

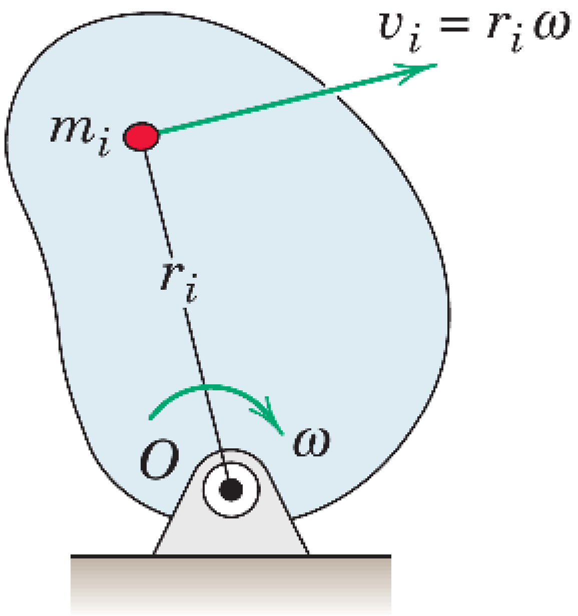
ω : Velocidad angular

Momentum de un sólido rígido

- De manera similar a la energía cinética, si un cuerpo **rota** en torno a un **eje fijo** *O*, el momentum angular total del sólido:

$$\vec{l} = \vec{l}_G + r_G \times \vec{p}_G = \left(I_G + MR_G^2\right)\vec{\omega}$$

$$v_G = r_G\omega$$



Steiner: $I_O = Mr_G^2 + I_G$

$$\boxed{\vec{l} = I_O\vec{\omega}}$$

Impulso y momentum

- Los **principios de impulso y momentum lineal y angular** se generalizan para sólidos rígidos

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}^{(\text{tot})} = M\vec{v}_{2,G} - M\vec{v}_{1,G}$$

$$J_O = \int_{t_1}^{t_2} \vec{\tau}_O^{(\text{tot})} = I_O\vec{\omega}_{2,O} - I_O\vec{\omega}_{1,O}$$

Conservación del momentum

- De igual manera, si no hay impulsos lineales externos, el **momentum lineal se conserva**

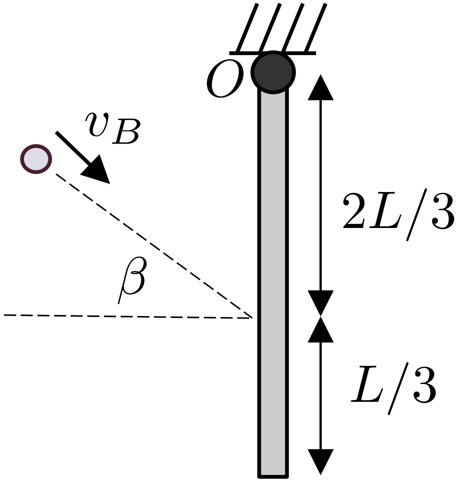
$$\boxed{\vec{p}_1 = \vec{p}_2}$$

- Y si no hay impulsos rotacionales externos, el **momentum angular se conserva**

$$\boxed{\vec{l}_1 = \vec{l}_2}$$

Ejemplo

- Una **barra** de **masa** M y **largo** L es impactada por una bala de **masa** m con una **velocidad** v_B como muestra la figura. Si la bala queda **incrustada** en la barra, encuentre la **velocidad angular** de la barra **después de la colisión**.



Ejemplo

- Una **barra** de **masa** M y **largo** L es impactada por una bala de **masa** m con una **velocidad** v_B como muestra la figura. Si la bala queda **incrustada** en la barra, encuentre la **velocidad angular** de la barra **después de la colisión**.

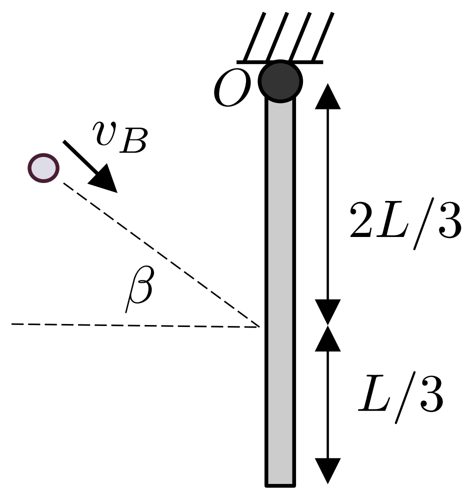
Momentum angular <u>respecto</u> a *O* antes de la colisión:

Velocidad ortogonal al radio.

$$l_1 = \frac{2L}{3} m v_B \cos\beta$$

Distancia a *O*.

Sólo la bala tiene momentum angular antes de la colisión.



Momentum angular <u>respecto</u> a *O* después de la colisión:

$$l_2 = \frac{2L}{3} m v_{B,2} + I_O \omega$$

$$I_O = \frac{ML^2}{3}$$

Como la bala queda incrustada a la barra:

$$v_{B,2} = \frac{2L}{3}\omega$$

Obtenemos:

$$l_2 = \frac{L^2}{9}(4m + 3M)\omega$$

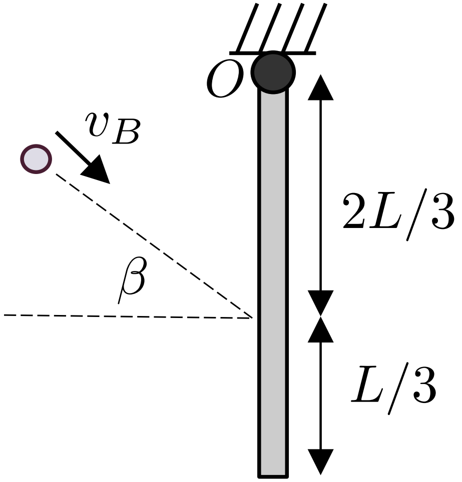
Ejemplo

- Una **barra** de **masa** M y **largo** L es impactada por una bala de **masa** m con una **velocidad** v_B como muestra la figura. Si la bala queda **incrustada** en la barra, encuentre la **velocidad angular** de la barra **después de la colisión**.

Conservación del momentum angular:

$$l_1 = l_2$$

$$\frac{2L}{3} m v_B \cos\beta = \frac{L^2}{9}(4m + 3M)\omega$$



$$\longrightarrow \quad \boxed{\omega = \frac{6 m v_B \cos\beta}{L(4m+3M)}}$$

Resumen

- Estudiamos el movimiento de un cuerpo que **rueda sin deslizar**.
- Revisitamos los conceptos de **momentum** para extenderlos a un sólido rígido.
- Ya hemos extendido todos los conceptos de cinemática, dinámica, trabajo y energía, y momentum al caso de sólidos rígidos.