



FACULTAD DE FÍSICA
PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATÓLICA DE CHILE

Dinámica (FIS1514)

Cinemática 2D y 3D

Felipe Isaule

felipe.isaule@uc.cl

Miércoles 16 de Agosto de 2023

Resumen clase anterior

- Estudiamos el **movimiento rectilíneo (1D)**.
- Analizamos nuevamente los conceptos de **posición, velocidad, y aceleración**.
- Revisamos los conceptos básicos de resolución de **ecuaciones diferenciales** en cinemática.

Clase 3: Cinemática 2D y 3D

- Cinemática en dos dimensiones.
- Coordenadas cartesianas.
- Lanzamiento de un proyectil.
- Cinemática en tres dimensiones.

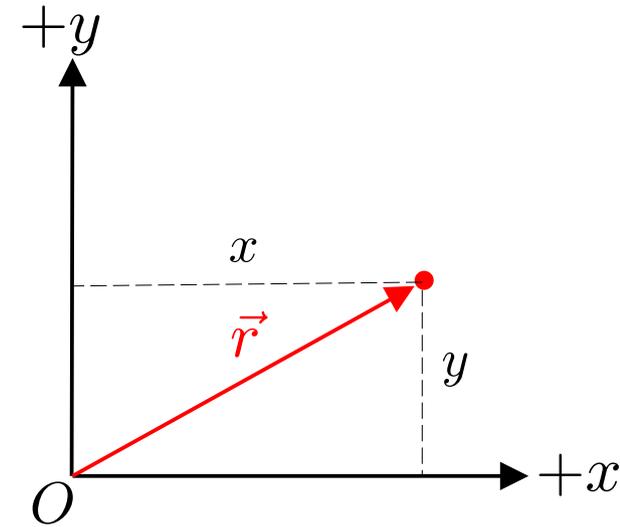
Clase 3: Cinemática 2D y 3D

- **Cinemática en dos dimensiones.**
- Coordenadas cartesianas.
- Lanzamiento de un proyectil.
- Cinemática en tres dimensiones.

Cinemática 2D

- Nos referimos como **movimiento plano curvilíneo** a un movimiento confinado a un plano (**dos dimensiones**).
- En **coordenadas cartesianas**, el vector **posición** está dado por

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$$



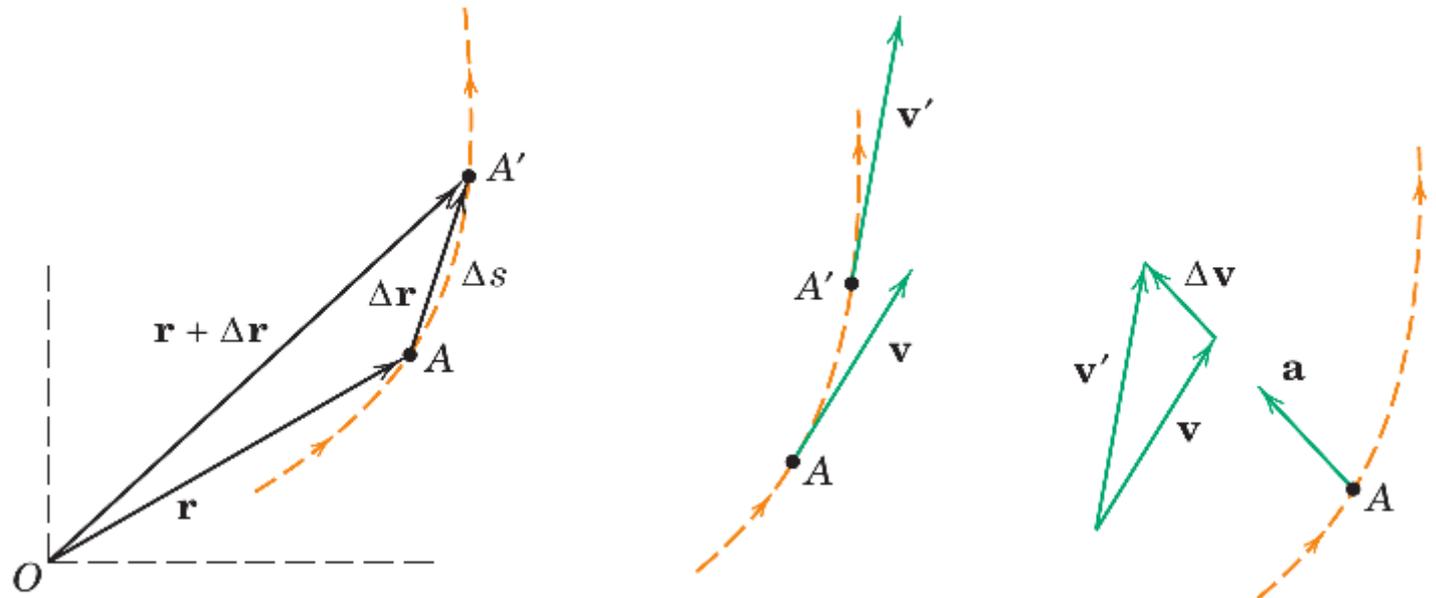
Cinemática 2D

- Para una partícula en movimiento, podemos definir el **vector desplazamiento** $\Delta\vec{r}$ y la **distancia** recorrida Δs ,

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \quad \Delta s = \|\Delta\vec{r}\|$$

- La **velocidad promedio** \vec{v} , **velocidad instantánea** \vec{v} , y **rapidez** v ,

$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}, \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} \quad v = \|\vec{v}\| = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$



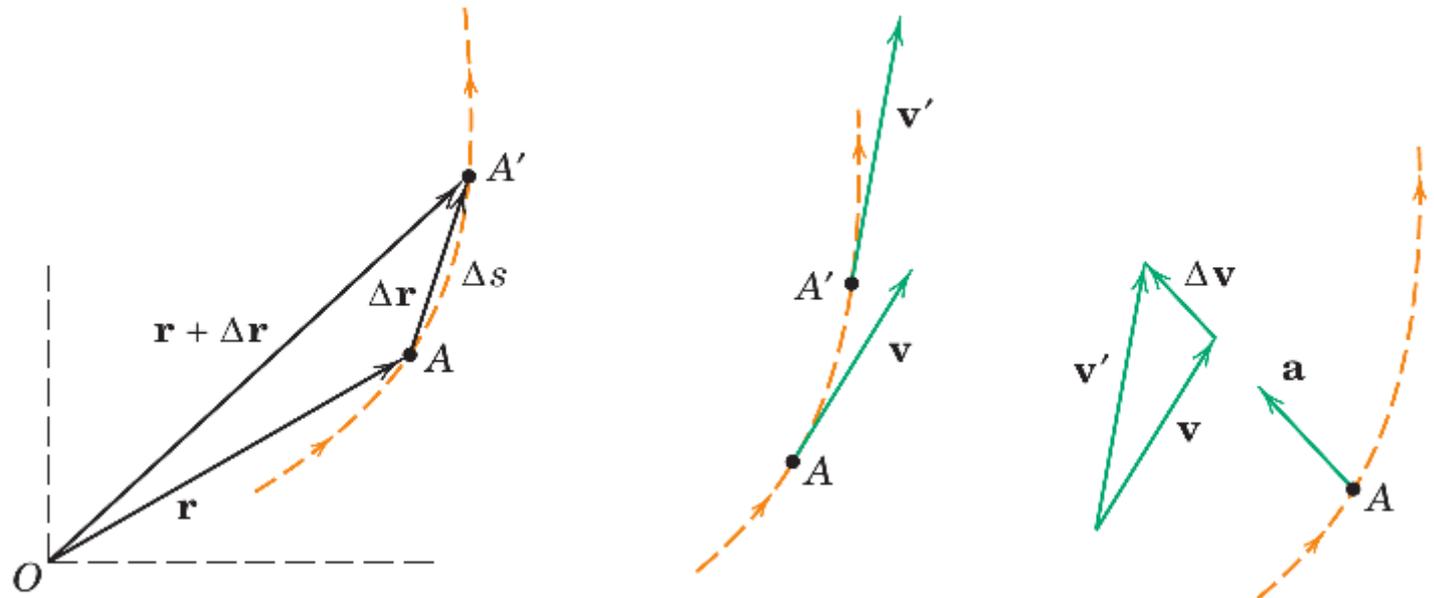
Cinemática 2D

- La **velocidad promedio** \vec{v} , **velocidad instantánea** \vec{v} , y **rapidez** v ,

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}, \quad v = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} \quad v = \|\vec{v}\| = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

- La **aceleración promedio** \vec{a} y **aceleración instantánea** \vec{a} ,

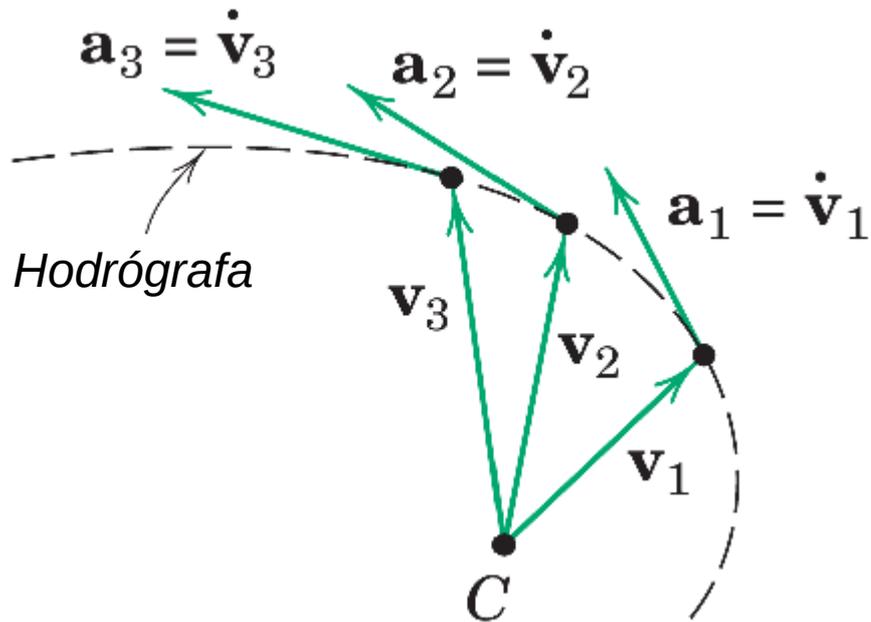
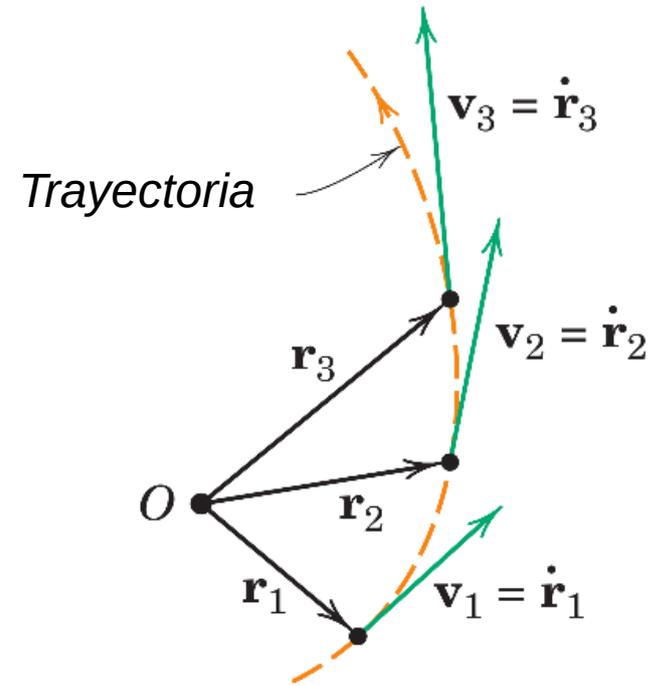
$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}, \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$$



Visualización del movimiento

- La velocidad es **tangente** a la posición

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$



- La aceleración es **tangente** a la velocidad

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Clase 3: Cinemática 2D y 3D

- Cinemática en dos dimensiones.
- **Coordenadas cartesianas.**
- Lanzamiento de un proyectil.
- Cinemática en tres dimensiones.

Coordenadas rectangulares (cartesianas)

- En coordenadas rectangulares

$$\vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j},$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x} \hat{i} + \dot{y} \hat{j},$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{x} \hat{i} + \ddot{y} \hat{j}.$$

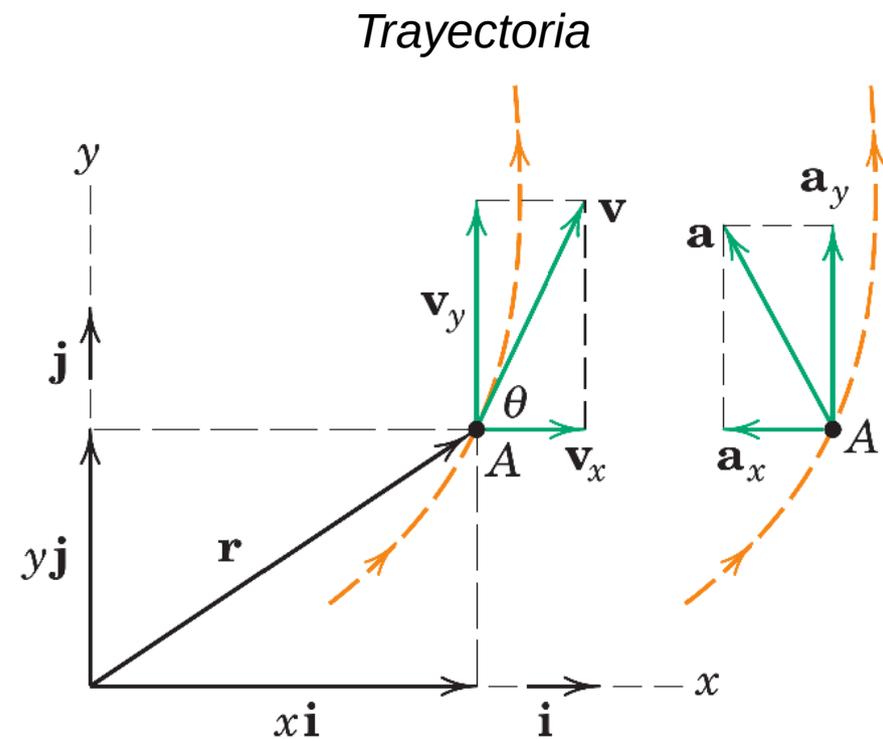
- Los **componentes** de la velocidad y aceleración

$$v_x = \dot{x} \quad v_y = \dot{y} \quad \tan \theta = \frac{v_y}{v_x}$$

$$a_x = \ddot{x} \quad a_y = \ddot{y}$$

- Las magnitudes de la velocidad (**rapidez**) y aceleración

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}.$$

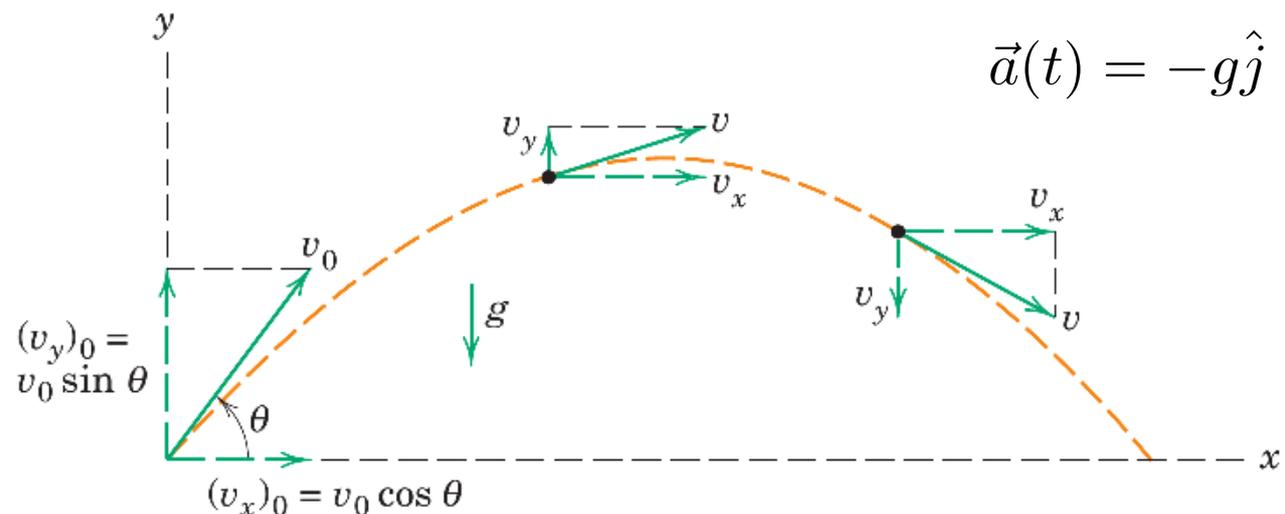


Clase 3: Cinemática 2D y 3D

- Cinemática en dos dimensiones.
- Coordenadas cartesianas.
- **Lanzamiento de un proyectil.**
- Cinemática en tres dimensiones.

Movimiento de un proyectil

- Una **partícula** es lanzada con un **ángulo** θ respecto a la superficie con una **rapidez inicial** v_0 . Si la partícula está sujeta a la gravedad,
 - ¿Cuál es su **trayectoria** y **velocidad**?
 - ¿A qué **altura** llega la partícula? Asuma que la partícula es lanzada desde el **origen**.
 - ¿Qué **distancia** recorre la partícula al tocar nuevamente la superficie?



Movimiento de un proyectil

- Una **partícula** es lanzada con un **ángulo** θ respecto a la superficie con una **rapidez inicial** v_0 . Si la partícula está sujeta a la gravedad,
 - ¿Cuál es su **trayectoria y velocidad**?

$$a_x = 0, \quad a_y = -g$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{v_x = v_{x,0}} \quad \boxed{v_y = v_{y,0} - gt}$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{x = x_0 + v_{x,0} t} \quad \boxed{y = y_0 + v_{y,0} t - gt^2/2}$$

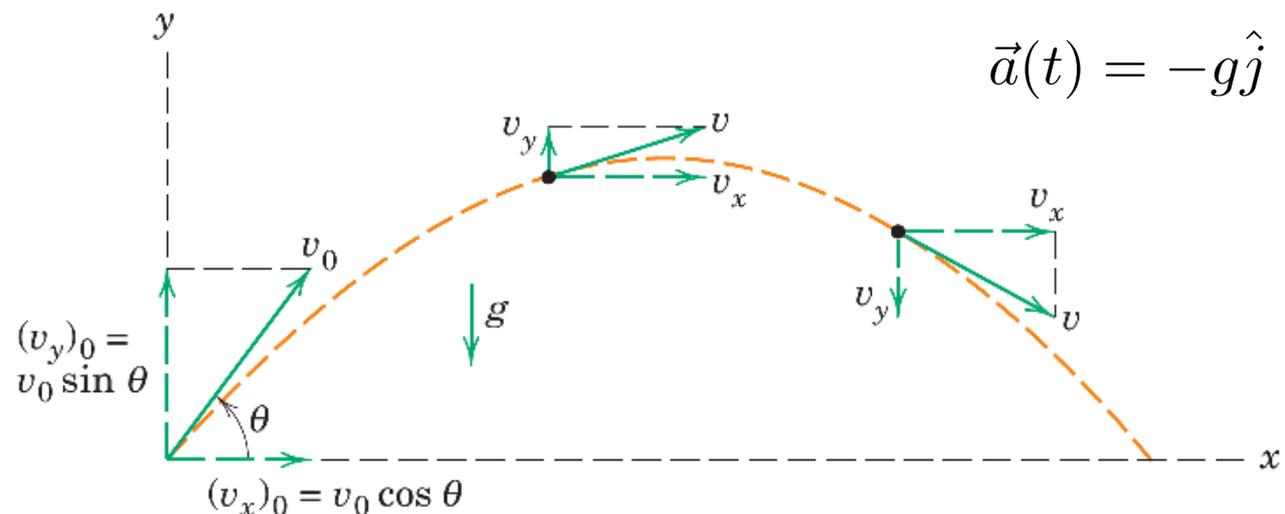
$$\longrightarrow \quad \boxed{v_y^2 = v_0^2 - 2g(y - y_0)}$$

donde

$$v_{x,0} = v_0 \cos \theta$$

$$v_{y,0} = v_0 \sin \theta$$

$$x_0 = y_0 = 0$$



Movimiento de un proyectil

- Una **partícula** es lanzada con un **ángulo** θ respecto a la superficie con una **rapidez inicial** v_0 . Si la partícula está sujeta a la gravedad,
- ¿A qué **altura** llega la partícula? Asuma que la partícula es lanzada desde el **origen**.

$$v_y^2 = v_{y,0}^2 - 2g(y - y_0)$$

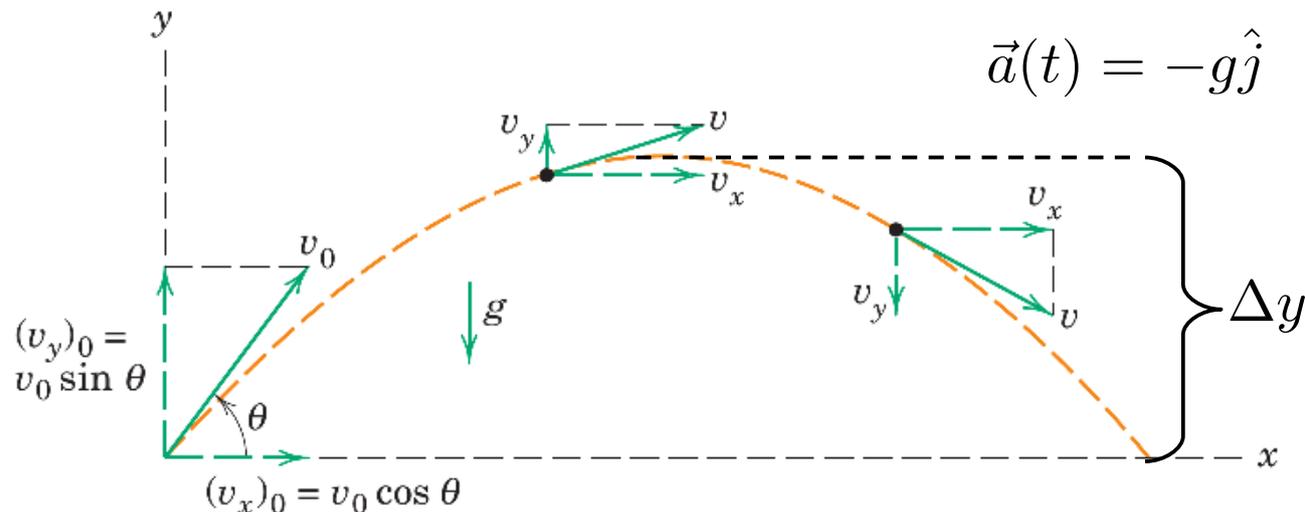
→

$$\Delta y = \frac{v_{y,0}^2}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$$

$v_y=0$ en el punto de altura máxima

$$y_0 = 0$$

- Si $\theta=0$, entonces $\Delta y=0$. La partícula se mantiene en el suelo.
- Por otro lado, la altura es máxima para $\theta=90^\circ$.



Movimiento de un proyectil

- Una **partícula** es lanzada con un **ángulo** θ respecto a la superficie con una **rapidez inicial** v_0 . Si la partícula está sujeta a la gravedad,
 - ¿Qué **distancia** recorre la partícula al tocar nuevamente la superficie?

$$y = y_0 + v_{y,0} t - gt^2/2$$

$$y_0 = 0$$

→

$$\Delta t = \frac{2v_{y,0}}{g} = \frac{2v_0 \sin \theta}{g}$$

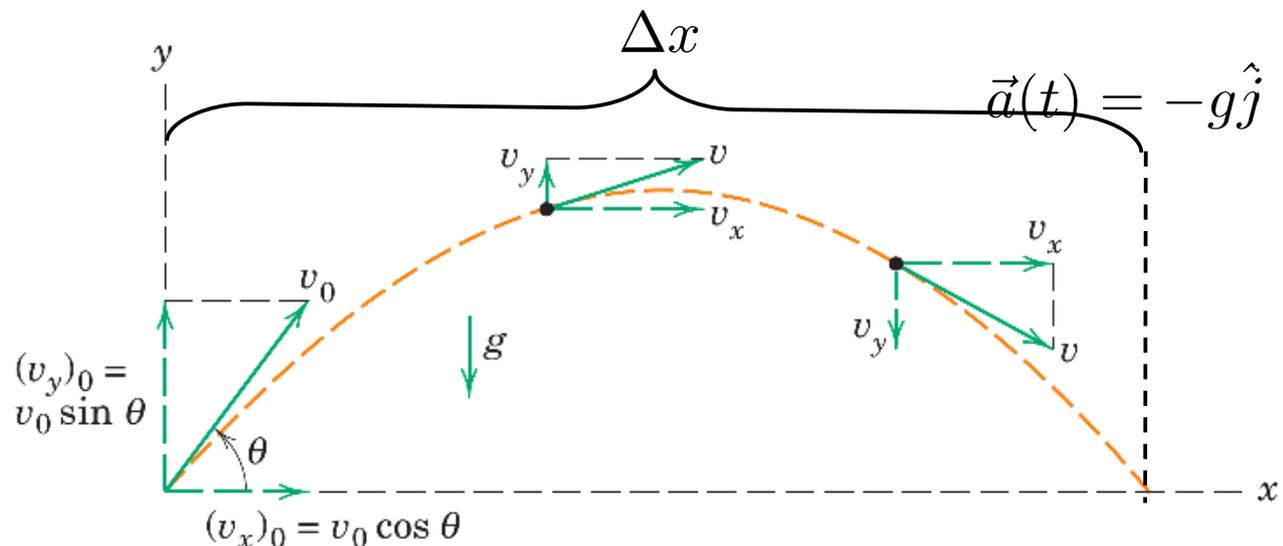
$$x = x_0 + v_{x,0} t$$

→

$$\Delta x = v_{x,0} \Delta t = \frac{2v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g}$$

$y=0$ cuando vuelve a tocar el suelo

* Si $\theta=90^\circ$, entonces $\Delta x=0$. La partícula es lanzada verticalmente.



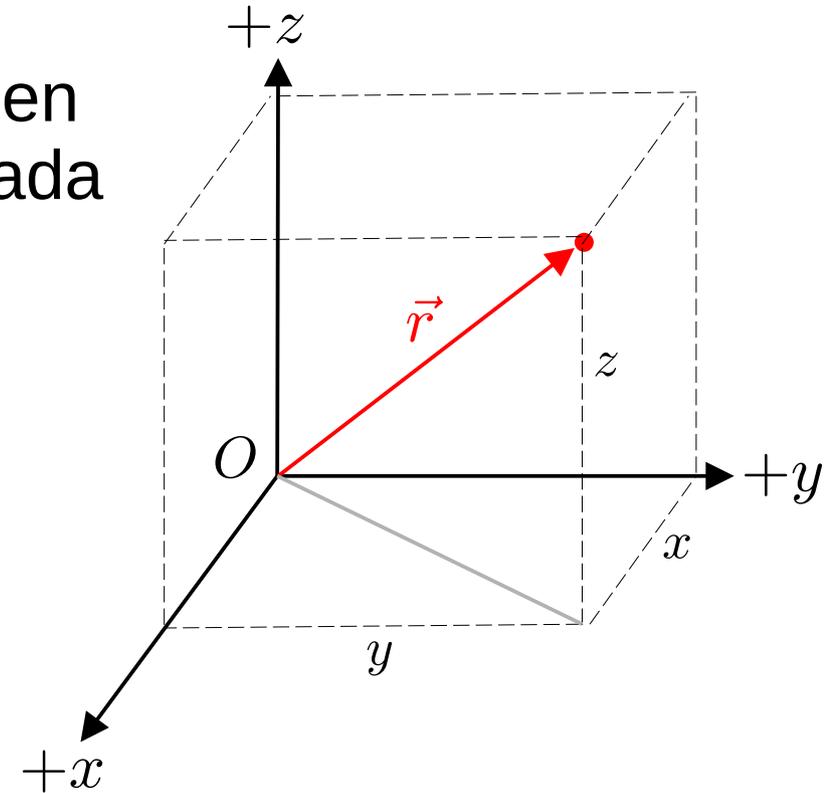
Clase 3: Cinemática 2D y 3D

- Cinemática en dos dimensiones.
- Coordenadas cartesianas.
- Lanzamiento de un proyectil.
- **Cinemática en tres dimensiones.**

Cinemática 3D

- En el caso general de un movimiento en **tres dimensiones**, la posición está dada por

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$



- Las definiciones para dos dimensiones se **generalizan** fácilmente a tres.

Coordenadas rectangulares (cartesianas)

- En coordenadas rectangulares

$$\vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k},$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x} \hat{i} + \dot{y} \hat{j} + \dot{z} \hat{k},$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x} \hat{i} + \ddot{y} \hat{j} + \ddot{z} \hat{k}.$$

- Los **componentes** de la velocidad y aceleración

$$v_x = \dot{x} \quad v_y = \dot{y} \quad v_z = \dot{z}$$

$$a_x = \ddot{x} \quad a_y = \ddot{y} \quad a_z = \ddot{z}$$

- Las magnitudes de la velocidad (**rapidez**) y aceleración

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}, \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Cinemática 3D

- El **vector desplazamiento** $\Delta\vec{r}$ y la **distancia** recorrida Δs ,

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \quad \Delta s = \|\Delta\vec{r}\|$$

- La **velocidad promedio** \vec{v} , **velocidad** instantánea \vec{v} , y **rapidez** v ,

$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}, \quad v = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} \quad v = \|\vec{v}\| = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

- La **aceleración promedio** \vec{a} y **aceleración** instantánea \vec{a} ,

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}, \quad a = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$$

Resumen

- Hemos reintroducido los conceptos de **posición, velocidad, y aceleración** en dos y tres dimensiones.
- Hemos definido el sistema de **coordenadas rectangulares o cartesianas**.
- Estudiamos el problema del **lanzamiento de un proyectil**.
- Próxima clase:
 - Coordenadas polares y cilíndricas.