FACULTAD DE FÍSICA
PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATÓLICA DE CHILE

Dinámica (FIS1514)

Coordenadas polares y cilíndricas

Felipe Isaule

felipe.isaule@uc.cl

Lunes 21 de Agosto de 2023

Resumen clase anterior

- Estudiamos el **movimiento en dos y tres dimensiones.**
- Analizamos nuevamente los conceptos de **posición**, **velocidad**, y **aceleración**.
- Revisamos el problema de lanzamiento de un **proyectil**.

Clase 4: Coordenadas polares y cilíndricas

- Coordenadas polares
- Coordenadas cilíndricas

Clase 4: Coordenadas polares y cilíndricas

- **Coordenadas polares**
- Coordenadas cilíndricas

Coordenadas polares

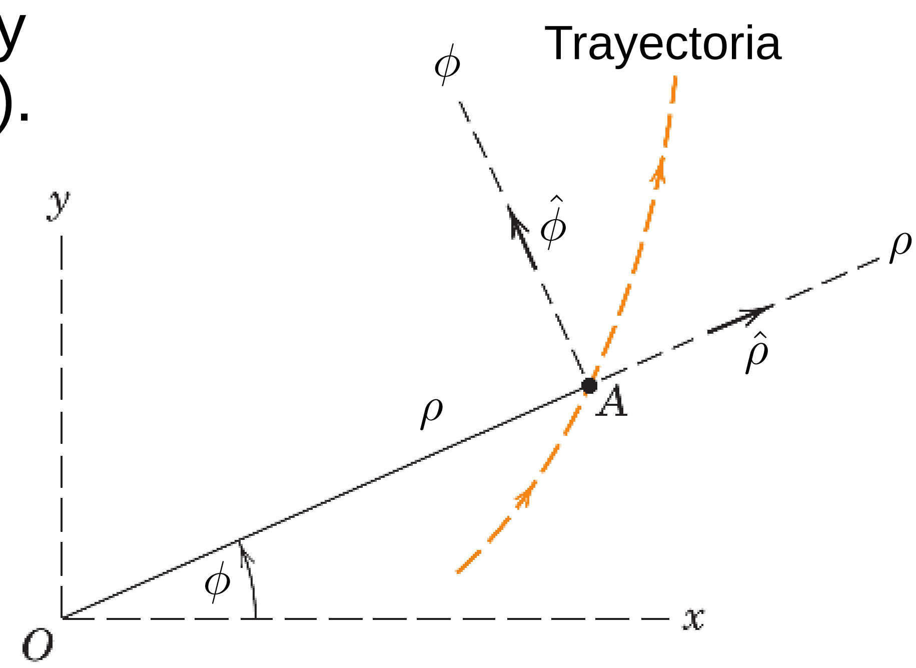
- Si un movimiento en **dos dimensiones** tiene una restricción a la **distancia radial**, es conveniente utilizar **coordenades polares**.

- Las **coordenadas polares** corresponden a:
  - ➔ ρ : Distancia del origen a la partícula.
  - ➔ ϕ : Ángulo desde un eje a elección.

- Los **vectores unitarios** asociados $\hat{\rho}$ y $\hat{\phi}$ se mueven con el vector (partícula).

- La **posición** viene dada por

$$\boxed{\vec{r} = \rho\,\hat{\rho}}$$



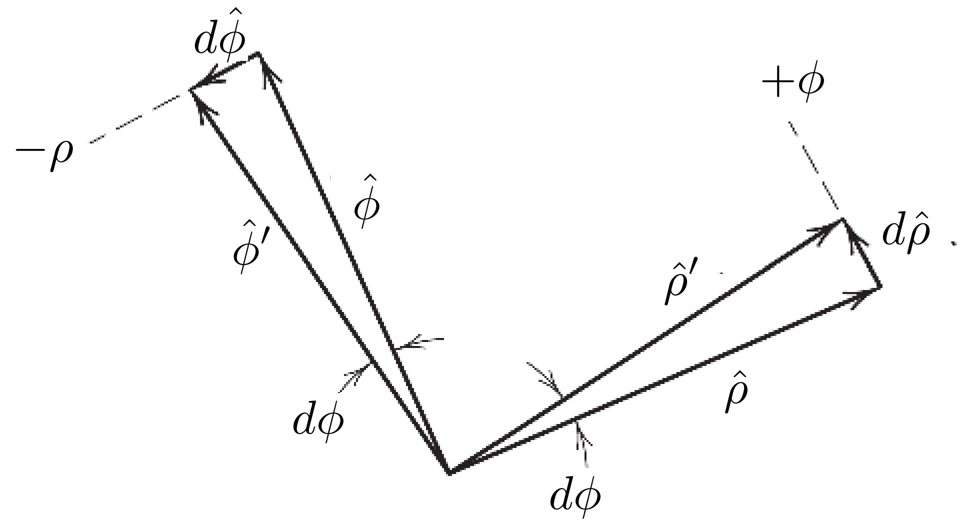
Coordenadas polares: Vector unitarios

- Las derivadas de los vectores unitarios con respecto a θ :

$$\frac{d\hat{\rho}}{d\phi} = \hat{\phi}\,, \qquad \frac{d\hat{\phi}}{d\phi} = -\hat{\rho}\,.$$

- Por tanto, sus derivadas temporales:

$$\boxed{\dot{\hat{\rho}} = \frac{d\hat{\rho}}{dt} = \dot{\phi}\,\hat{\phi}\,,} \qquad \boxed{\dot{\hat{\phi}} = \frac{d\hat{\phi}}{dt} = -\dot{\phi}\,\hat{\rho}\,.}$$



Coordenadas polares: Velocidad

- El vector **velocidad** en coordenadas polares:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}(\rho\hat{\rho}) = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\hat{\rho}} \qquad \longrightarrow \qquad \boxed{\vec{v} = \dot{\rho}\,\hat{\rho} + \rho\,\dot{\phi}\,\hat{\phi}}$$

- Donde sus **componentes**

$$v_\rho = \dot{\rho} \qquad v_\phi = \rho\,\dot{\phi}$$

- La **rapidez**

$$\boxed{v = \|\vec{v}\| = \sqrt{v_\rho^2 + v_\phi^2}}$$

Coordenadas polares: Aceleración

- El vector **aceleración** en coordenadas polares:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\rho}\,\hat{\rho} + \rho\,\dot{\phi}\,\hat{\phi}\right) \quad \longrightarrow \quad \boxed{\vec{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right)\hat{\rho} + \left(\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi}\right)\hat{\phi}}$$

- Donde sus **componentes**

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2 \qquad a_\phi = \rho\,\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi}$$

- Su **magnitud**

$$\boxed{a = \|\vec{a}\| = \sqrt{a_\rho^2 + a_\phi^2}}$$

- También podemos escribir

$$a_\phi = \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}\left(\rho^2\dot{\phi}\right)$$

Movimiento circular

- Un movimiento es circular cuando ρ es **constante**.
- La velocidad y aceleración se simplifican

$$\dot{\rho} = 0 \qquad \longrightarrow \qquad \boxed{\begin{array}{ll} v_\rho = 0\,, & v_\phi = \rho\dot{\phi}\,. \\ a_\rho = -\rho\dot{\phi}^2\,, & a_\phi = \rho\ddot{\phi}\,. \end{array}}$$

- La **velocidad angular** corresponde a

$$\omega = \dot{\phi}$$

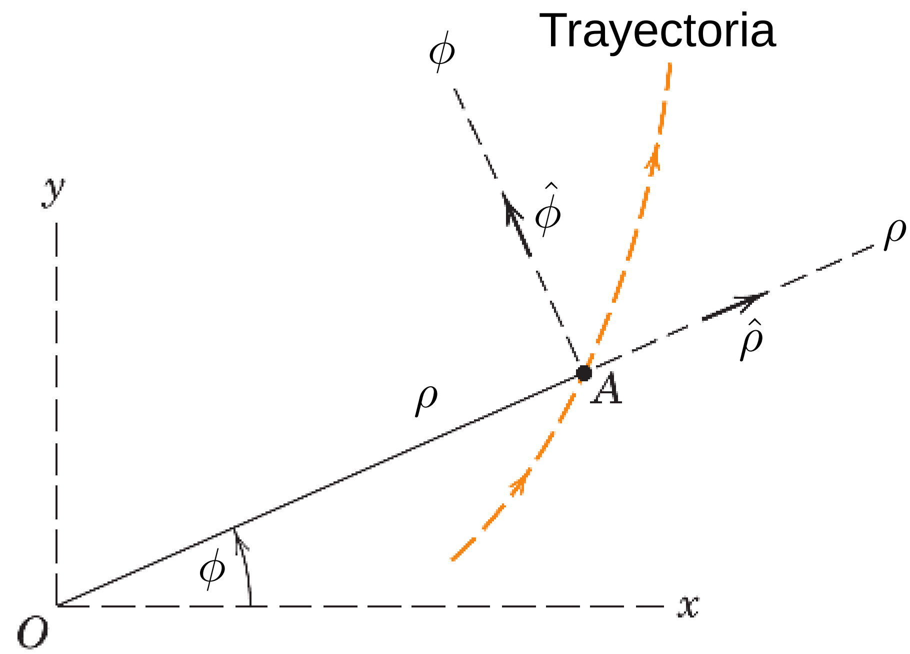
- También llamamos a_ρ la **aceleración centrípeta** y $\dot{\omega} = \ddot{\phi}$ la **aceleración angular**.
- El **camino recorrido**:

$$\Delta s = \rho_0 \Delta\phi$$

Coordenas polares y cartesianas

- Podemos facilmente convertir cantidades entre sistemas de coordenadas.

$$\vec{r} = \rho\hat{\rho} = x\hat{i} + y\hat{j} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} & x = \rho\cos\phi, \quad y = \rho\sin\phi\,. \\ & \rho = \sqrt{x^2+y^2}\,, \quad \phi = \arctan(y/x)\,, \end{aligned}$$



Ejemplo

- Una partícula se mueve con **rapidez constante** v_0 a lo **largo de una espiral** $\rho(\phi)=Ae^{k\phi}$, donde A y k son constantes. Encuentre:

  a) Vector **velocidad** en función de ϕ.

  b) Vector **aceleración** en función de ϕ.

Ejemplo

- Una partícula se mueve con **rapidez constante** v_0 a lo **largo de una espiral** $\rho(\phi)=Ae^{k\phi}$, donde A y k son constantes. Encuentre:

  a) Vector **velocidad** en función de ϕ.

$$v_\rho = \dot{\rho} = Ak\dot{\phi}e^{k\phi}$$

$$v_\phi = \rho\dot{\phi} = A\dot{\phi}e^{k\phi}$$

$$\longrightarrow \quad v_0^2 = v_\rho^2 + v_\phi^2 = A^2\dot{\phi}^2(k^2+1)e^{2k\phi}$$

$$\dot{\phi} = \frac{v_0}{A\sqrt{k^2+1}}e^{-k\phi}$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{v_\rho = \frac{k\,v_0}{\sqrt{k^2+1}} \qquad v_\phi = \frac{v_0}{\sqrt{k^2+1}}}$$

*La velocidad no depende de ϕ .

Ejemplo

- Una partícula se mueve con **rapidez constante** v_0 a lo **largo de una espiral** $\rho(\phi)=Ae^{k\phi}$, donde A y k son constantes. Encuentre:

  a) Vector **aceleración** en función de ϕ.

$$\dot{\rho} = v_\rho = \frac{k\,v_0}{\sqrt{k^2+1}} \quad \longrightarrow \quad \ddot{\rho} = 0$$

$$\dot{\phi} = \frac{v_0}{A\sqrt{k^2+1}} e^{-k\phi} \quad \longrightarrow \quad \dot{\phi}^2 = \frac{v_0^2}{A^2(k^2+1)} e^{-2k\phi}\,, \quad \ddot{\phi} = \frac{-k\,v_0^2}{A^2(k^2+1)} e^{-2k\phi}$$

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2 \quad \longrightarrow \quad \boxed{a_\rho = -\frac{v_0^2}{A(k^2+1)} e^{-k\phi}}$$

$$a_\phi = \rho\,\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi} \quad \longrightarrow \quad \boxed{a_\phi = \frac{k\,v_0^2}{A(k^2+1)} e^{-k\phi}}$$

Ejemplo

- Una partícula se mueve con **rapidez constante** v_0 a lo **largo de una espiral** $\rho(\phi)=Ae^{k\phi}$, donde A y k son constantes. Encuentre:

  a) Vector **velocidad** en función de ϕ.

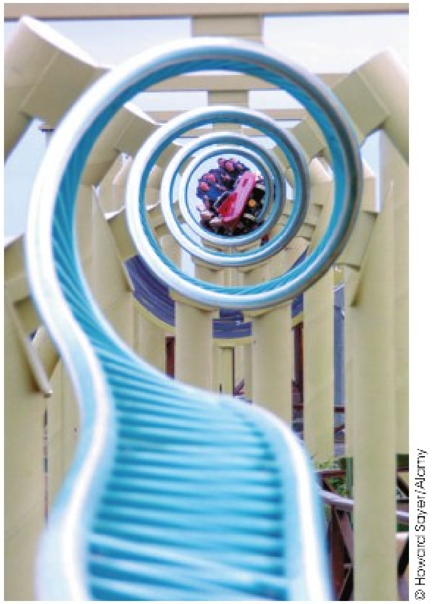
  b) Vector **aceleración** en función de ϕ.

  c) **Tarea**: Encontrar la **velocidad** y **aceleración** en función del **tiempo**. Asuma que $\phi(t=0)=0$.

Clase 4: Coordenadas polares y cilíndricas

- Coordenadas polares
- **Coordenadas cilíndricas**

Coordenadas cilíndricas

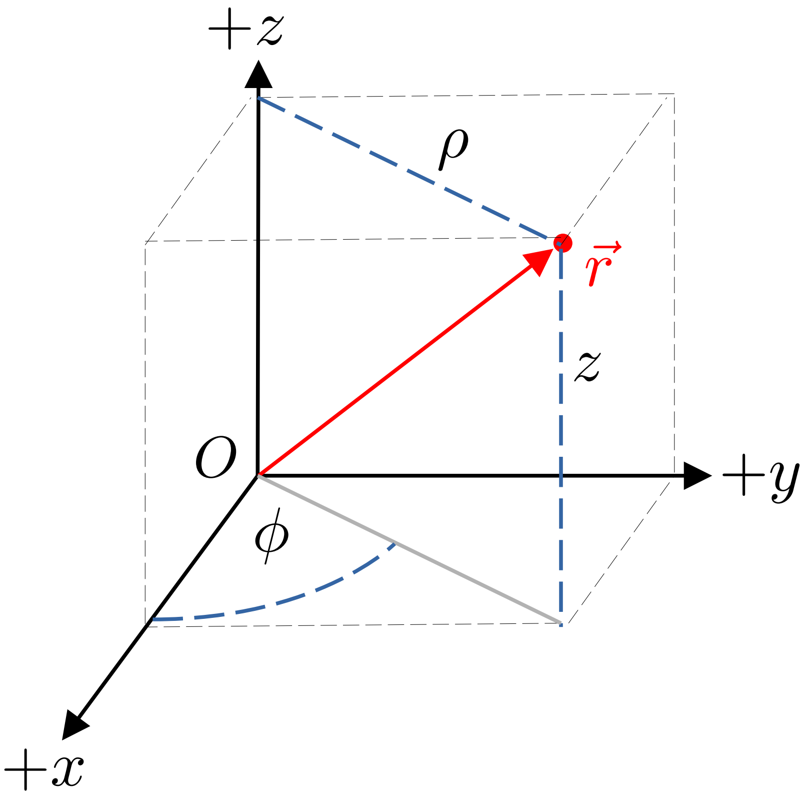


- Si un movimiento en **tres dimensiones** tiene una restricción a la **distancia radial desde un eje**, es conveniente utilizar **coordenades cilíndricas**.

- Las **coordenadas cilíndricas** corresponden a:
  - ➔ ρ : Distancia del origen a la partícula.
  - ➔ ϕ : Ángulo desde un eje a elección.
  - ➔ z : "Altura".

- La **posición** viene dada por

$$\boxed{\vec{r} = \rho\,\hat{\rho} + z\hat{k}}$$



Coordenadas cilíndricas: Velocidad

- El vector **velocidad** en coordenadas cilíndricas:

$$\boxed{\vec{v} = \dot{\rho}\,\hat{\rho} + \rho\,\dot{\phi}\,\hat{\phi} + \dot{z}\hat{k}}$$

- Donde sus **componentes**

$$v_\rho = \dot{\rho} \qquad v_\phi = \rho\,\dot{\phi} \qquad v_z = \dot{z}$$

- La **rapidez**

$$\boxed{v = \|\vec{v}\| = \sqrt{v_\rho^2 + v_\phi^2 + v_z^2}}$$

Coordenadas cilíndricas: Aceleración

- El vector **aceleración** en coordenadas cilíndricas:

$$\boxed{\vec{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right)\hat{\rho} + \left(\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi}\right)\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{k}}$$

- Donde sus **componentes**

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2 \qquad a_\phi = \rho\,\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi} \qquad a_z = \ddot{z}$$

- Su **magnitud**

$$\boxed{a = \|\vec{a}\| = \sqrt{a_\rho^2 + a_\phi^2 + a_z^2}}$$

Coordenas cilíndricas y cartesianas

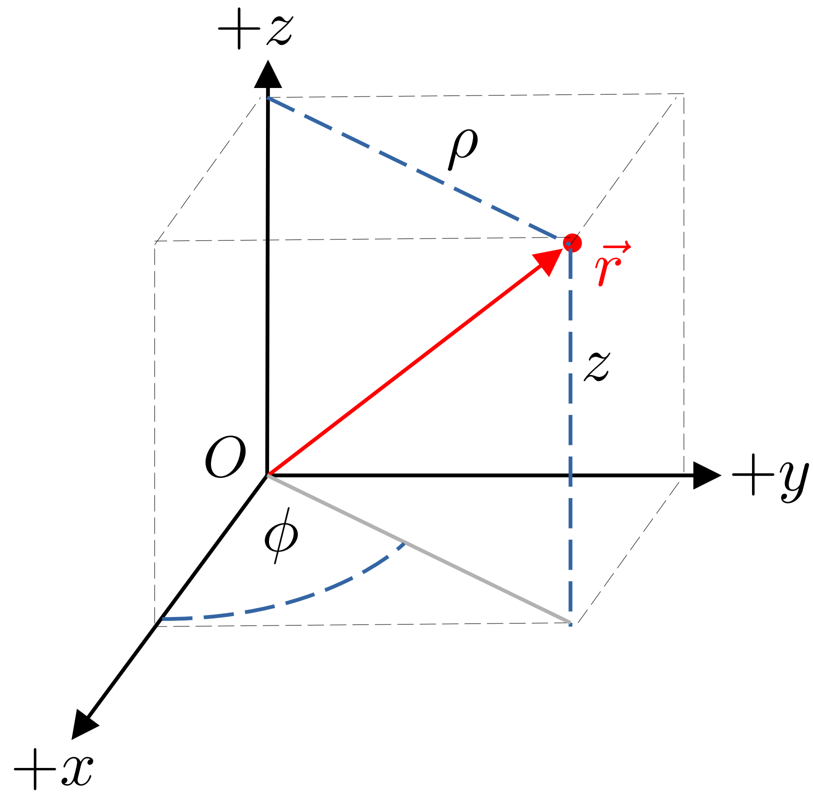
- Podemos facilmente convertir cantidades entre sistemas de coordenadas.

$$\vec{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{k} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$x = \rho\cos\phi, \quad y = \rho\sin\phi\,.$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}\,, \quad \phi = \arctan(y/x)\,,$$

$$z = z$$



Resumen

- Hemos definido las **coordenadas polares** para describir movimientos circulares en dos dimensiones.
- Las hemos generalizado a tres dimensiones para definir las **coordenadas cilíndricas**.
- Próxima clase:
    - Movimiento relativo.