FACULTAD DE FÍSICA
PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATÓLICA DE CHILE

# Dinámica (FIS1514)

## Fuerza elástica y centrípeta

**Felipe Isaule**

felipe.isaule@uc.cl

Lunes 9 de Septiembre de 2024

# Resumen clase anterior

- Definimos la fuerza **tensión**.
- Revisamos problemas de **ligaduras**.

# Clase 11: Fuerza elástica y centrípeta

- Ley de Hooke.
- Movimiento circular y fuerza centrípeta.

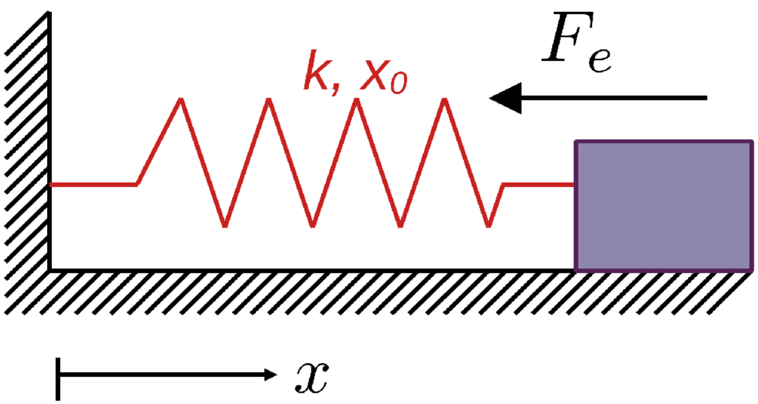
- Bibliografía recomendada:
  - Meriam (3.4, 3.5).
  - Hibbeler (13.4).

# Clase 11: Fuerza elástica y centrípeta

- **Ley de Hooke.**
- Movimiento circular y fuerza centrípeta.

# Fuerza elástica: Ley de Hooke

- Un **resorte** ejerce una **fuerza elástica** (de restitución) dictada por la **Ley de Hooke**

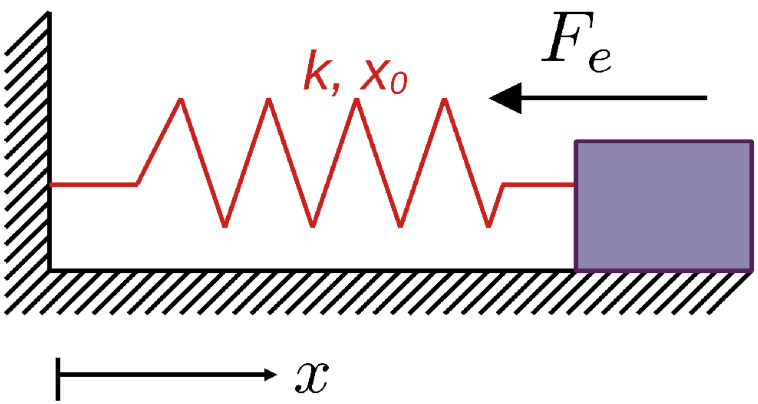



$$\boxed{F_e = -k\Delta x}$$

- *k* es la **constante elástica** y depende del material.
- $\Delta x$ es la **elongación** o desplazamiento desde la **posición natural**.
- $x_0$ es la **posición de natural** (de equilibrio) del elástico/resorte.

# Fuerza elástica: Ley de Hooke

- Es necesario ser consistente al definir el desplazamiento *Δx*.



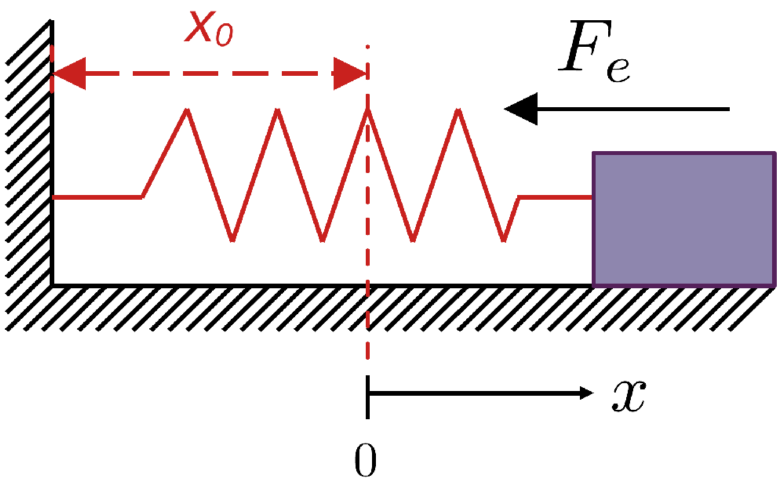

$$\boxed{F_e = -k\Delta x}$$

- Si definimos el punto *x*=0 desde la pared, entonces

$$\Delta x = x - x_0 \quad \longrightarrow \quad F_e = -k(x - x_0)$$

# Fuerza elástica: Ley de Hooke

- Es necesario ser consistente al definir el desplazamiento *Δx*.



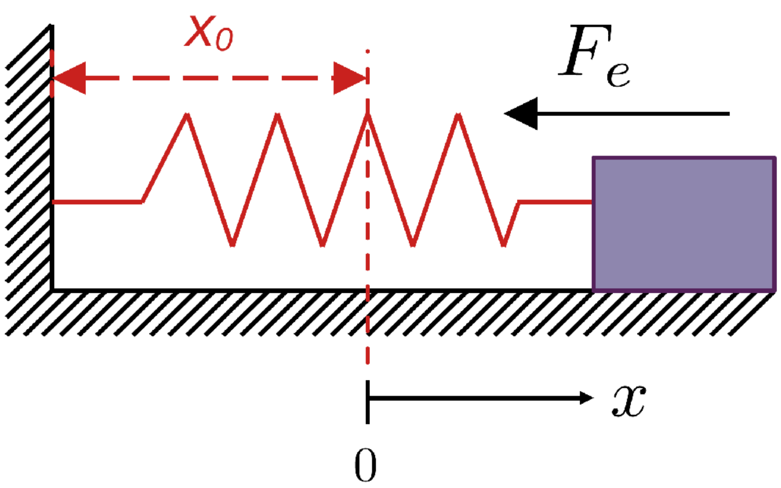

$$\boxed{F_e = -k\Delta x}$$

- Si definimos el punto *x*=0 desde el punto de equilibrio,

$$\Delta x = x \quad \longrightarrow \quad F_e = -kx$$

# Fuerza elástica: Ley de Hooke

- Es necesario ser consistente al definir el desplazamiento *Δx*.



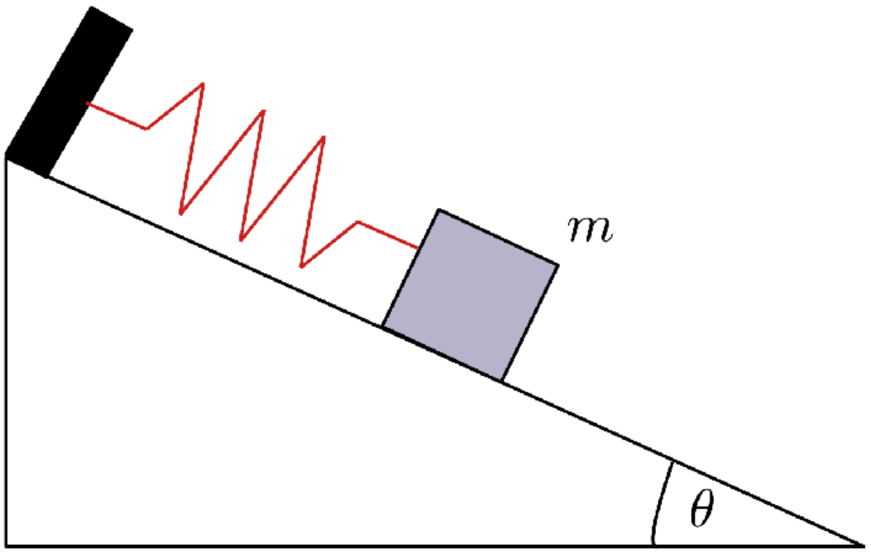

$$\boxed{F_e = -k\Delta x}$$

- Si el bloque tiene una masa *m*, la ecuación de movimiento

$$F_x = -kx = m\ddot{x} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0}$$

# Ejemplo 1: Plano inclinado con un resorte

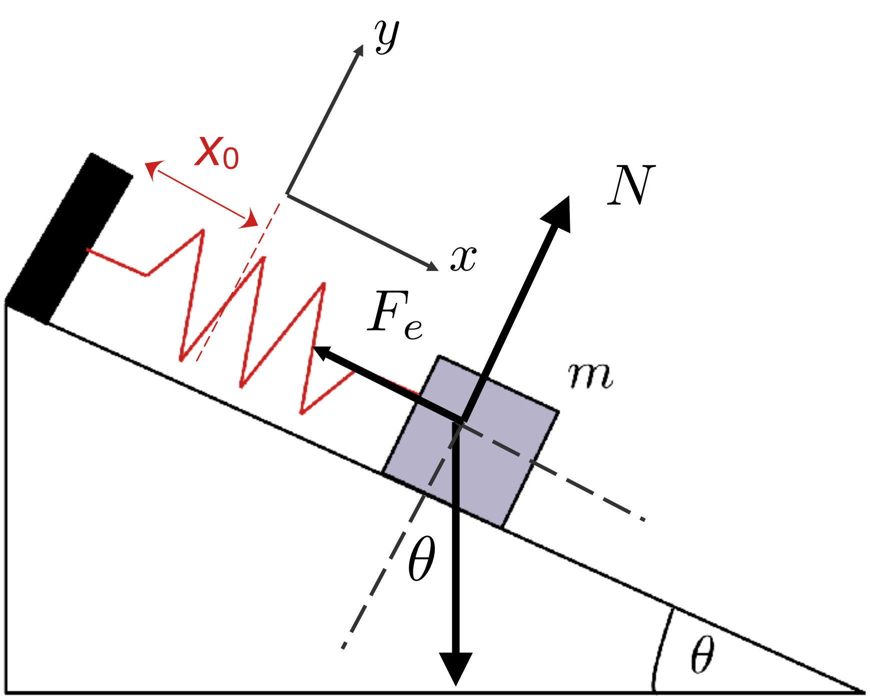
- Un bloque de **masa** $m$ se encuentra sobre la superficie de un **plano inclinado** con un ángulo $\theta$ con respecto a la horizontal. Si un resorte de **constante elástica** $k$ sujeta el bloque como muestra la figura. Encuentre:
  - El **desplazamiento** del resorte con respecto a su largo natural si el bloque se encuentra en **reposo**.
  - El **desplazamiento** del elástico con respecto a su largo natural de tal manera que la **aceleración** del bloque tenga un **magnitud** de $g$.



# Ejemplo 1: Plano inclinado con un resorte

- Un bloque de **masa** $m$ se encuentra sobre la superficie de un **plano inclinado** con un ángulo $\theta$ con respecto a la horizontal. Si un resorte de **constante elástica** $k$ sujeta el bloque como muestra la figura. Encuentre:
    - El **desplazamiento** del resorte con respecto a su largo natural si el bloque se encuentra en **reposo**.

**<u>DCL</u>**




**<u>Ecuaciones de movimiento:</u>**

$$x: \quad F_x = mg\sin\theta - kx = ma_x$$

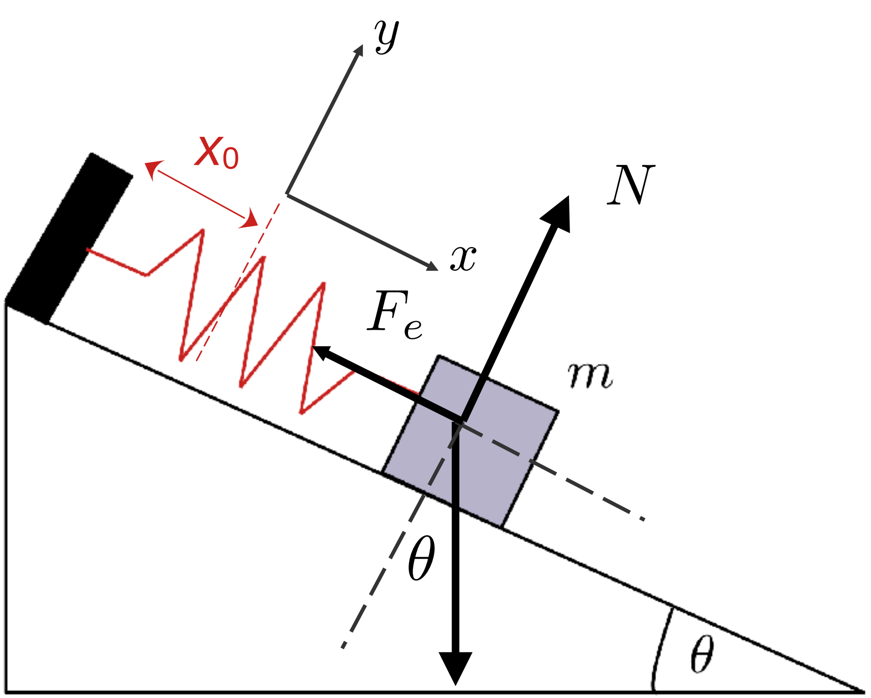
$$y: \quad F_y = N - mg\cos\theta = 0$$

$$a_x = 0 \longrightarrow \boxed{\Delta x^* = \frac{mg\sin\theta}{k}}$$

# Ejemplo 1: Plano inclinado con un resorte

- Un bloque de **masa** $m$ se encuentra sobre la superficie de un **plano inclinado** con un ángulo $\theta$ con respecto a la horizontal. Si un resorte de **constante elástica** $k$ sujeta el bloque como muestra la figura. Encuentre:
  - El **desplazamiento** del elástico con respecto a su largo natural de tal manera que la **aceleración** del bloque tenga un **magnitud** de $g$.

**DCL**




**Ecuaciones de movimiento:**

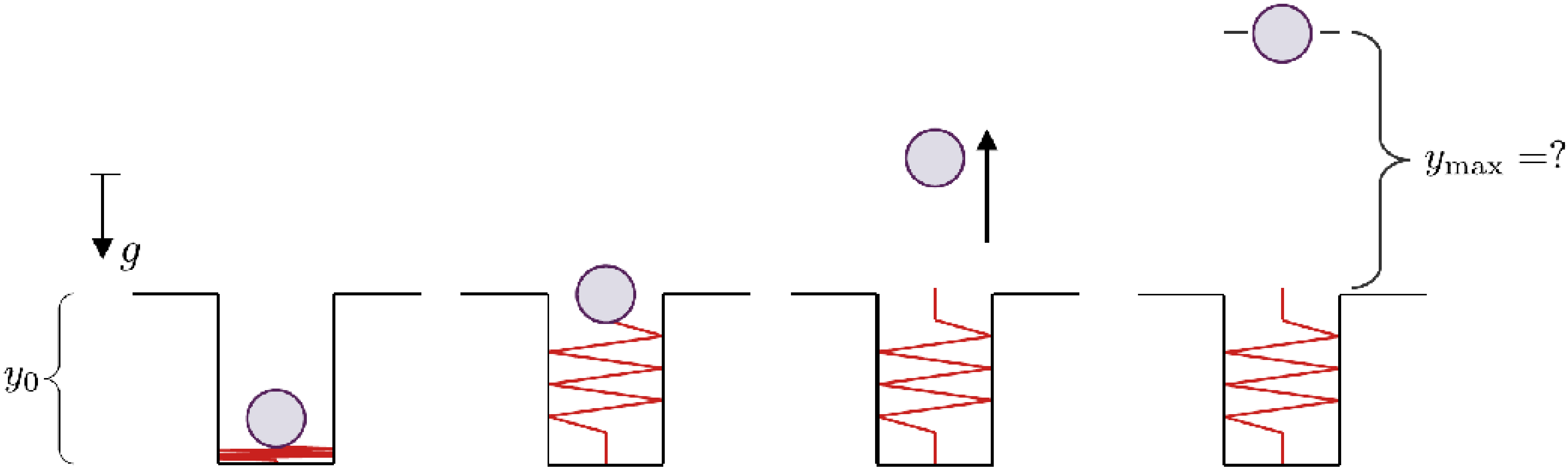
$$x: \quad F_x = mg\sin\theta - kx = ma_x$$

$$y: \quad F_y = N - mg\cos\theta = 0$$

$$a_x = \pm g \longrightarrow \boxed{\Delta x^* = \frac{mg(\sin\theta \mp 1)}{k}}$$

# Ejemplo 2

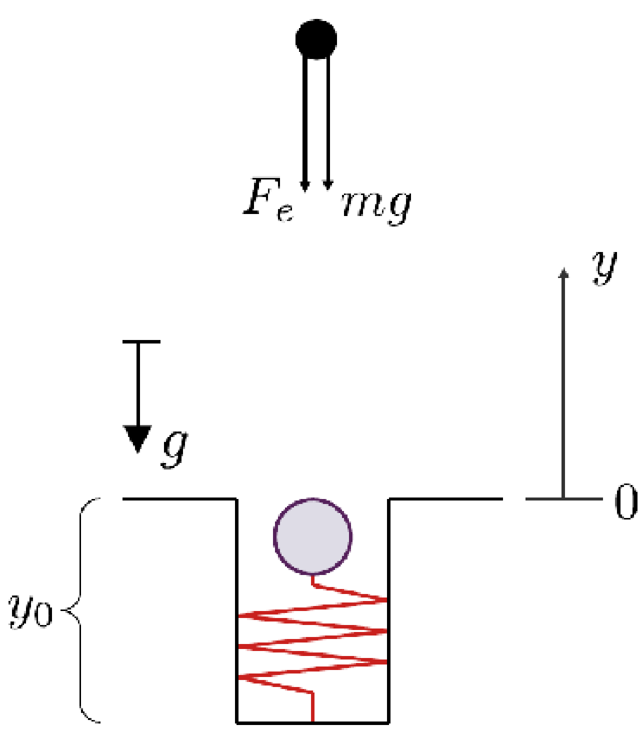
- Una pelota de **masa** $m$ se encuentra pegada a un **resorte** de **constante elástica** $k$ y **largo natural** $y_0$ que está enterrado en un agujero de profundidad $y_0$ . Inicialmente el resorte es apretado en el **reposo** hasta el **fondo del agujero**. Si la pelota se **desprende** del resorte a la **altura de la superficie**, encuentre la **altura máxima que alcanza** la pelota.



# Ejemplo 2

- Una pelota de **masa** $m$ se encuentra pegada a un **resorte** de **constante elástica** $k$ y **largo natural** $y_0$ que está enterrado en un agujero de profundidad $y_0$ . Inicialmente el resorte es apretado en el **reposo** hasta el **fondo del agujero**. Si la pelota se **desprende** del resorte a la **altura de la superficie**, encuentre la **altura máxima que alcanza** la pelota.

**DCL**




**Ecuaciones de movimiento**

$$y: \quad F_y = -mg - ky = ma_y = m\ddot{y}$$

**Cinemática**

Antes de desprenderse:

$$\ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{dy}\dot{y} \quad \longrightarrow \quad -(mg+ky)dy = m\dot{y}d\dot{y}$$

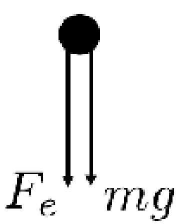
$$-\int_{-y_0}^{0}(mg+ky)dy = m\int_{0}^{v_0}\dot{y}d\dot{y}$$

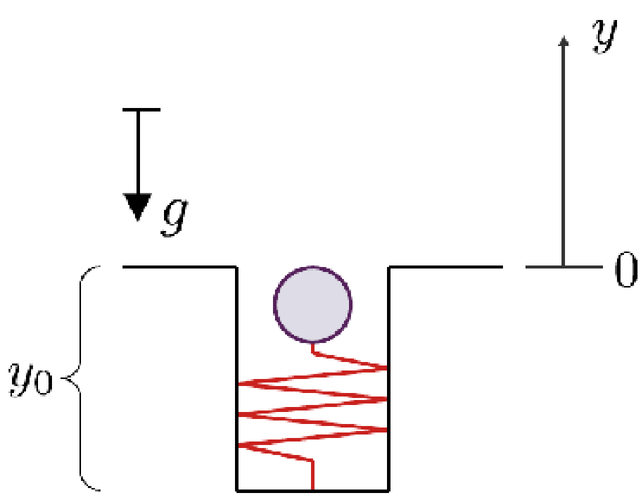
$$\longrightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{k}{m}y_0^2 - 2gy_0}$$

# Ejemplo 2

- Una pelota de **masa** $m$ se encuentra pegada a un **resorte** de **constante elástica** $k$ y **largo natural** $y_0$ que está enterrado en un agujero de profundidad $y_0$ . Inicialmente el resorte es apretado en el **reposo** hasta el **fondo del agujero**. Si la pelota se **desprende** del resorte a la **altura de la superficie**, encuentre la **altura máxima que alcanza** la pelota.

**DCL**




**Cinemática**

Antes de desprenderse: $$v_0 = \sqrt{\frac{k}{m}y_0^2 - 2gy_0}$$

**Cinemática**

Después de desprenderse:

$$v_f = v_0 - g\,t \longrightarrow t_{\max} = v_0/g$$

Asumimos *t*=0 cuando se desprende

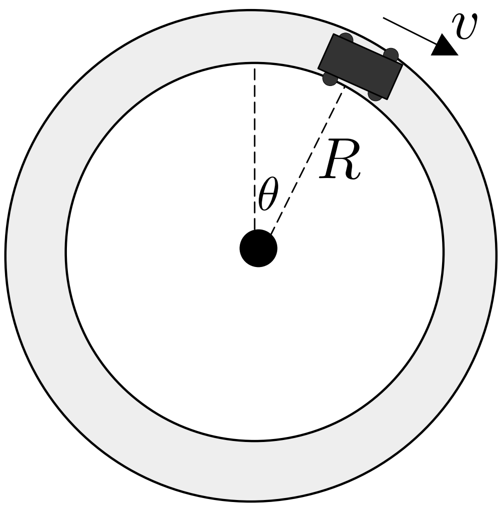
$$y_{\max} = v_0 t_{\max} - \frac{g}{2}t_{\max}^2 \longrightarrow \boxed{y_{\max} = \frac{ky_0^2}{2mg} - y_0}$$

# Clase 11: Fuerza elástica y centrípeta

- Ley de Hooke.
- **Movimiento circular y fuerza centrípeta.**

# Movimiento circular

- Si tenemos un **movimiento circular**:




$$v_r = 0 \qquad v_\theta = R\dot{\theta}$$

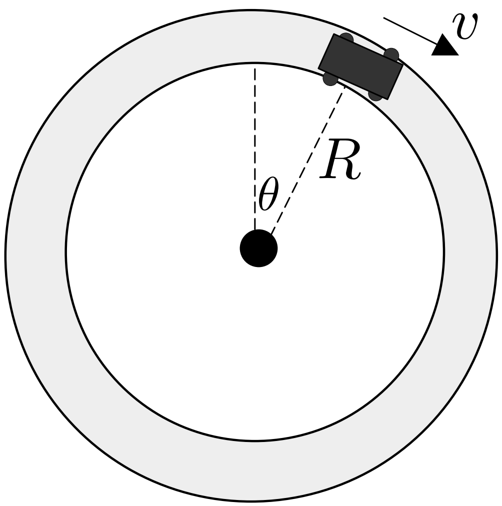
Velocidad angular: $\dot{\theta} = \omega = v/R$

$$a_r = -R\dot{\theta}^2 \qquad a_\theta = R\ddot{\theta}$$

- El tiempo que toma dar una vuelta completa corresponde al **período** $T$.
- Si es $\omega$ es constante, entonces $T{=}2\pi/\omega$.
- En este caso, la **frecuencia** se define como $f{=}1/T{=}\omega/2\pi$ .

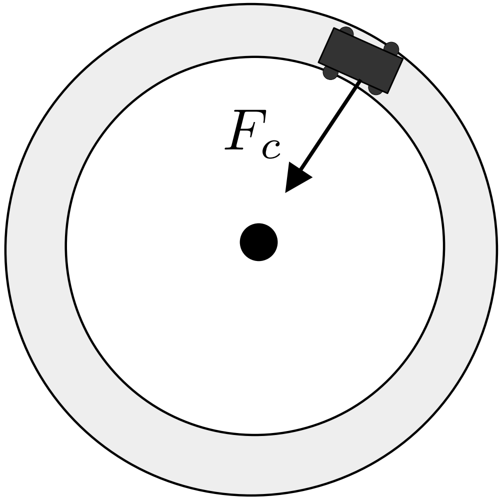
# Aceleración y fuerza centrípeta

- La aceleración centrípeta corresponde a:




$$\boxed{\vec{a}_c = -\underbrace{R\dot{\theta}^2}_{\dot{\theta} = v/R}\hat{r} = -\frac{v^2}{R}\hat{r}}$$

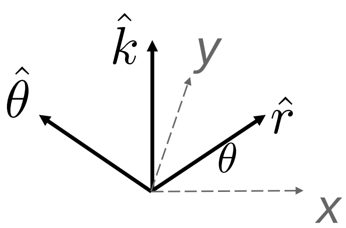
- La **fuerza centrípeta** $F = ma_c$ mantiene al cuerpo en un movimiento circular.

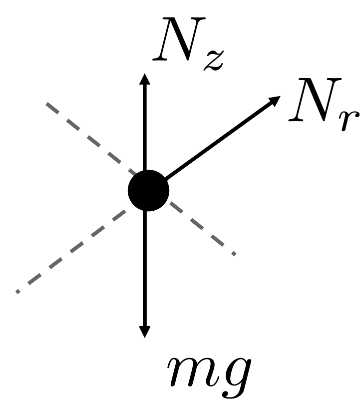


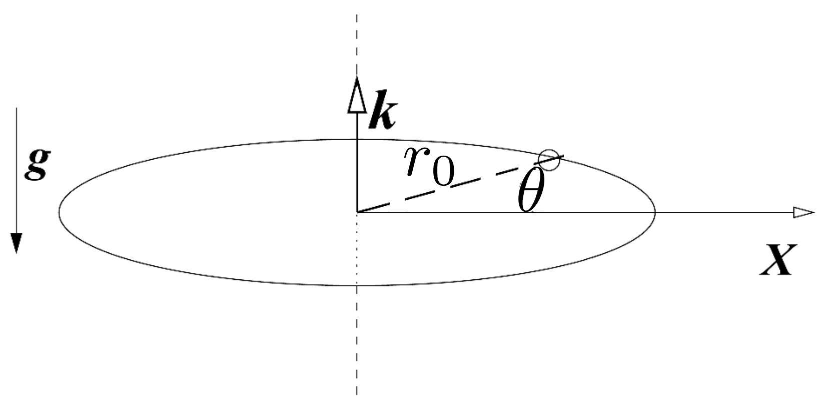
# Ejemplo 1: Argolla en un cable circular

- Una argolla de masa $m$ gira sin roce con **velocidad angular constante** $\omega$ en un cable circular de radio $r_0$. Si la argolla es afectada por la **gravedad**, encuentre las **fuerzas normales sobre la argolla**.

**DCL**




**Ecuaciones de movimiento**

$$r: \quad F_r = N_r = ma_r = -mr_0\omega^2$$

**Equilibrio de fuerzas** $\longrightarrow$

$$\theta: \quad F_\theta = 0$$

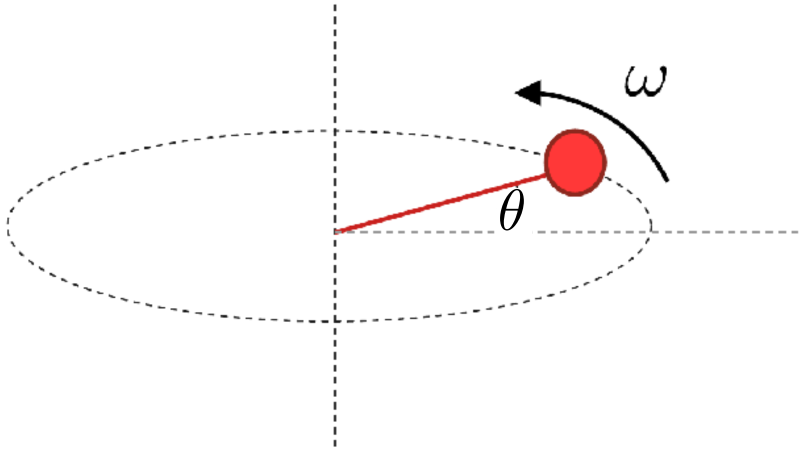
$$z: \quad F_z = N_z - mg = ma_z = 0$$

$$\longrightarrow \boxed{N_r = -mr_0\omega^2} \longrightarrow \text{Fuerza centrípeta}$$

$$\longrightarrow \boxed{N_z = mg} \longrightarrow \text{Peso}$$

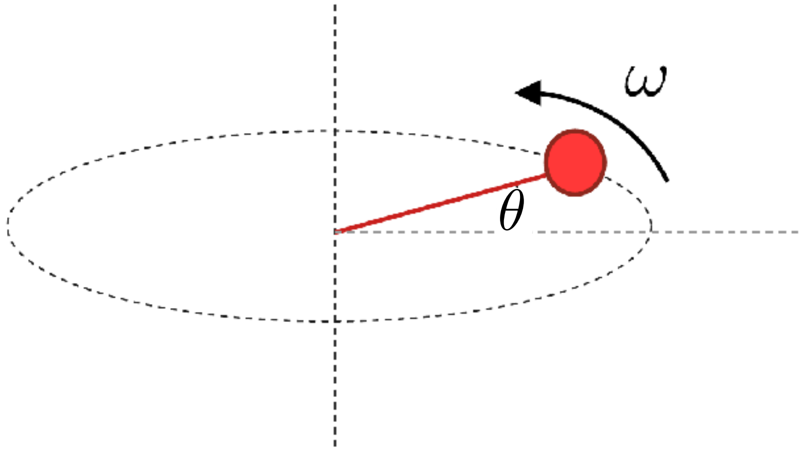
# Ejemplo 2

- Una pelota **gira** atada a un **elástico** de **largo natural** $r_0$ y **constante elástica** $k$ . Despreciando el efecto de la gravedad, encuentre el **largo** que toma el elástico de tal manera que este largo se mantenga **constante**. Encuentre este largo en función de la **velocidad angular constante** $\omega$.



# Ejemplo 2

- Una pelota **gira** atada a un **elástico** de **largo natural** $r_0$ y **constante elástica** $k$ . Despreciando el efecto de la gravedad, encuentre el **largo** que toma el elástico de tal manera que este largo se mantenga **constante**. Encuentre este largo en función de la **velocidad angular constante** $\omega$.



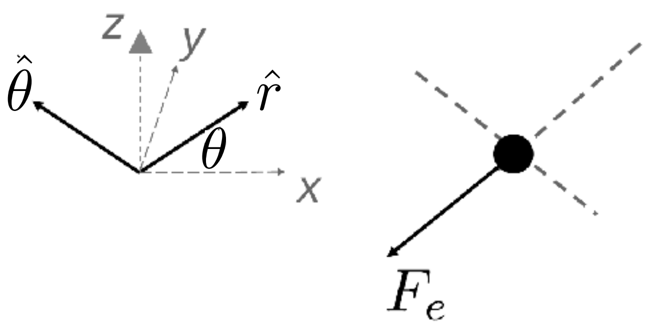

**Ecuaciones de movimiento:**

$$r: \quad F_r = -k(r^* - r_0) = m a_r \overset{\dot{r}=0}{=} -m r^* \omega^2$$

$$\theta: \quad F_\theta = 0$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{r^* = \frac{k r_0}{k - m\omega^2}}$$

**DCL**




- El limite cuando $k$ tiende a infinito corresponde a una cuerda ideal.
- A mayor velocidad angular, mayor largo $r^*$. En particular diverge cuando $k = m\omega^2$ , pero un elástico real se rompería mucho antes.

# Resumen

- Definimos la **fuerza elástica** a partir de la **Ley de Hooke**.
- Revisamos ejemplos de **fuerzas centrípetas**.
- Próxima clase:
  - Fuerza de roce.