FACULTAD DE FÍSICA
PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATÓLICA DE CHILE

Dinámica (FIS1514)

Roce viscoso

Felipe Isaule

felipe.isaule@uc.cl

Lunes 23 de Septiembre de 2024

Resumen clase anterior

- Definimos la **fuerza de roce estático**.
- Definimos la **fuerza de roce dinámico**.

Clase 13: Roce viscoso

- Roce viscoso.

- Bibliografía recomendada:
  - Meriam (3.4, 3.5).
  - Hibbeler (13.4).

Fuerza de roce viscoso

- El **roce viscoso** corresponde a la **resistencia** que ejerce un **fluido** al movimiento de una partícula en la **dirección del movimiento**.

$$\boxed{\vec{F}_v = -c\, v^n \hat{\vec{v}}\,,}$$

  donde c es la **constante de viscosidad** y n es un parámetro que depende del fluido y del movimiento.

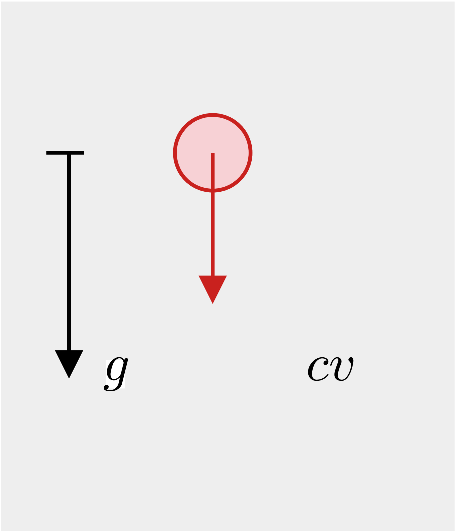
- El roce viscoso siempre apunta en la dirección **opuesta** al movimiento relativo de la partícula con respecto al fluido.

- En particular, a **velocidades bajas** la fuerza viscosa es **lineal** con la rapidez:

$$\boxed{\vec{F}_v = -c\vec{v}\,.}$$

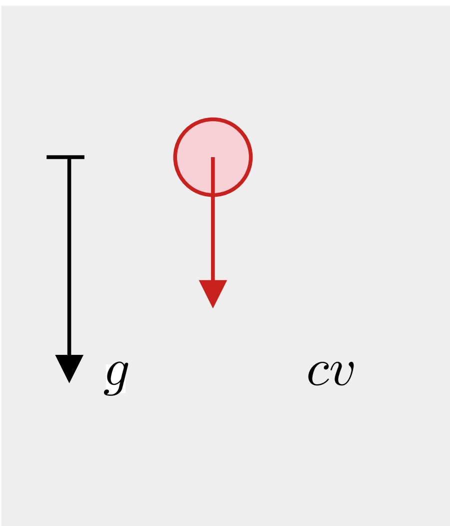
Ejemplo 1: Caída libre

- Un cuerpo de masa m **cae** por el aire y es afectado por la **gravedad** y la **viscosidad** c del aire. Encuentre la **ecuación de movimiento** y la **velocidad** con respecto al tiempo si el cuerpo es soltado desde el **reposo**.

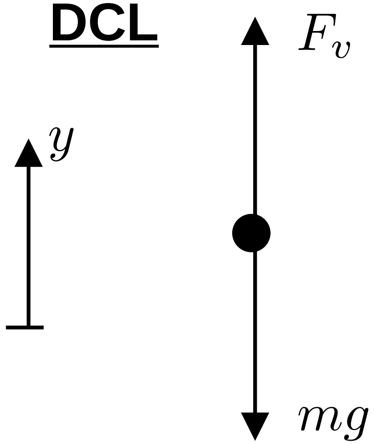


Ejemplo 1: Caída libre

- Un cuerpo de masa m **cae** por el aire y es afectado por la **gravedad** y la **viscosidad** c del aire. Encuentre la **ecuación de movimiento** y la **velocidad** con respecto al tiempo si el cuerpo es soltado desde el **reposo**.



DCL



Ecuaciones de movimiento

$$F_y = F_v - mg = ma_y$$

$$F_v = -c\,v \quad \longrightarrow \quad \boxed{-c\dot{y} - mg = m\ddot{y}}$$

Intentamos encontrar $v(t)$ $\longrightarrow$

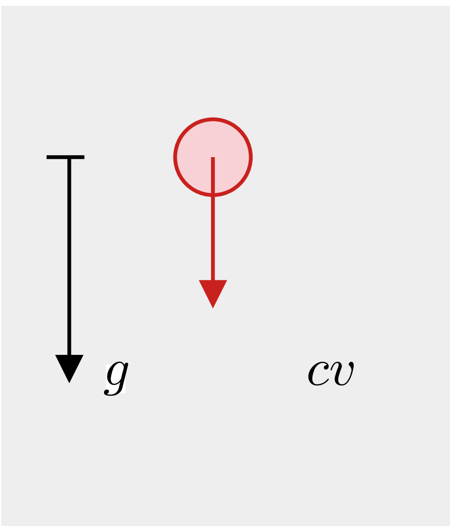
$$m\frac{dv}{dt} = -c\,v - mg$$

$$\int_0^v \frac{dv'}{v' + mg/c} = -\int_0^t \frac{c}{m}dt'$$

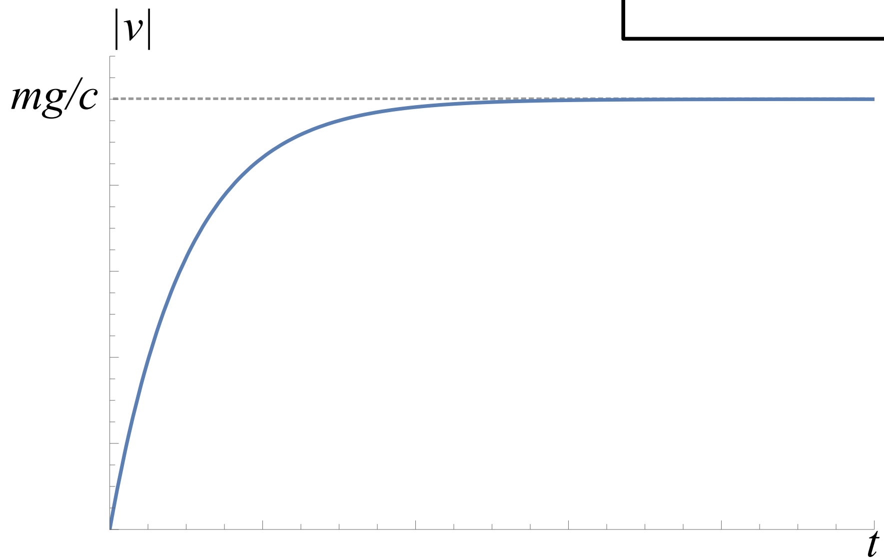
$$\longrightarrow \quad \boxed{v(t) = \frac{mg}{c}\left(e^{-ct/m} - 1\right)}$$

Ejemplo 1: Caída libre

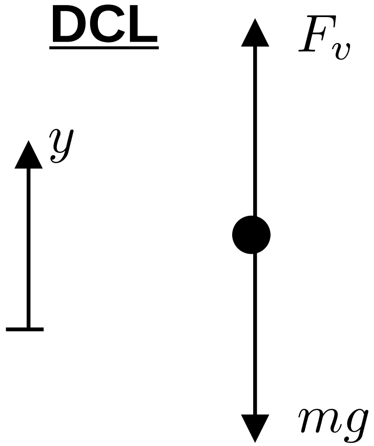
- Un cuerpo de masa m **cae** por el aire y es afectado por la **gravedad** y la **viscosidad** c del aire. Encuentre la **ecuación de movimiento** y la **velocidad** con respecto al tiempo si el cuerpo es soltado desde el **reposo**.



$$\longrightarrow \quad \boxed{v(t) = \frac{mg}{c}\left(e^{-ct/m} - 1\right)}$$



DCL

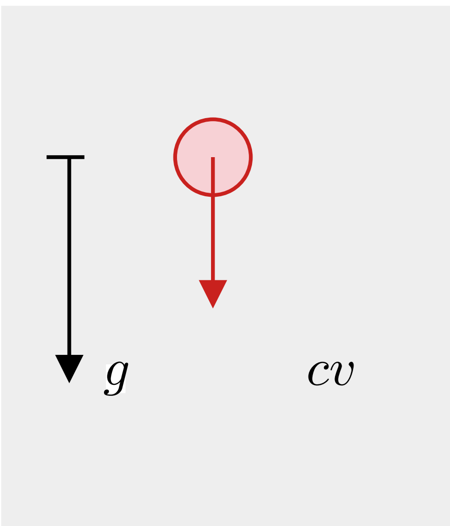


La **rapidez alcanza un máximo**. Es decir, la **aceleración tiende a cero**.

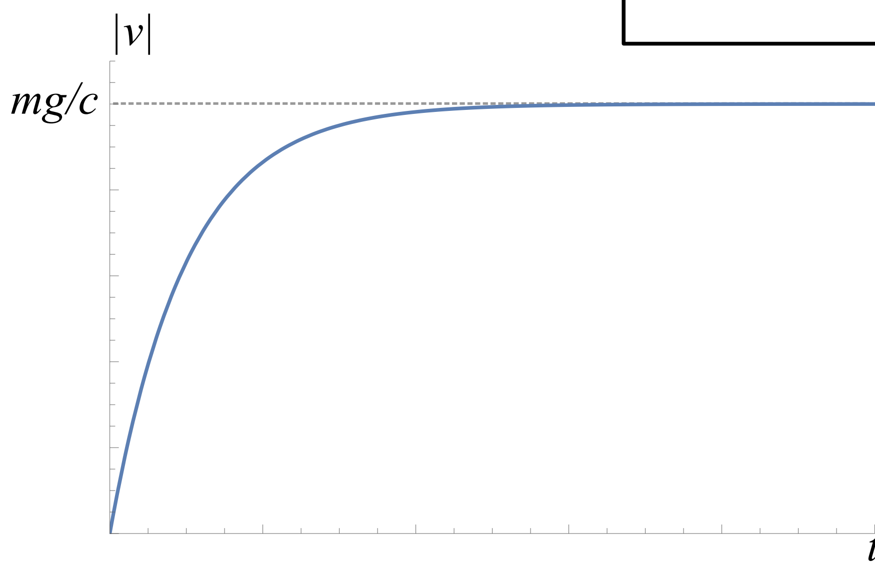
Esta rapidez máxima se conoce como **velocidad terminal**.

Ejemplo 1: Caída libre

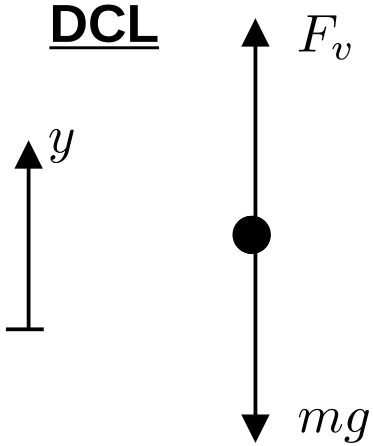
- Un cuerpo de masa m **cae** por el aire y es afectado por la **gravedad** y la **viscosidad** c del aire. Encuentre la **ecuación de movimiento** y la **velocidad** con respecto al tiempo si el cuerpo es soltado desde el **reposo**.



$$\longrightarrow \quad \boxed{v(t) = \frac{mg}{c}\left(e^{-ct/m} - 1\right)}$$



DCL



La **rapidez alcanza un máximo**. Es decir, la **aceleración tiende a cero**.

Esta rapidez máxima se conoce como **velocidad terminal**.

Tarea: Resolver con el eje *y* apuntando hacia abajo.

Ejemplo 2: Cuerpo que es lanzado en el aire

- Un cuerpo de masa m es lanzado **verticalmente hacia arriba** con **rapidez inicial** v_0 y en presencia de la **gravedad** terrestre. El aire ejerce un **roce viscoso** $F = -cv$. El movimiento del cuerpo es vertical. Determine:

- El **tiempo** que tarda la partícula en llegar a su **punto más alto**.

- La **altura máxima** que alcanza el cuerpo.

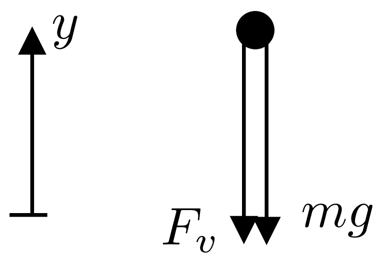
$$\text{Hint:} \quad \int \frac{x}{x+A} dx = x - A \ln(A + x)$$

Ejemplo 2: Cuerpo que es lanzado en el aire

- Un cuerpo de masa m es lanzado **verticalmente hacia arriba** con **rapidez inicial** v_0 y en presencia de la **gravedad** terrestre. El aire ejerce un **roce viscoso** $F = -cv$. El movimiento del cuerpo es vertical. Determine:

➔ El **tiempo** que tarda la partícula en llegar a su **punto más alto**.

DCL



Ecuaciones de movimiento

$$F_y = F_v - mg = ma_y$$

$$F_v = -c\,v \quad \longrightarrow \quad \boxed{-c\dot{y} - mg = m\ddot{y}}$$

Igual al ejemplo anterior pero con límites de integración distintos.

$$\longrightarrow \quad \int_{v_0}^{v} \frac{dv'}{v' + mg/c} = -\int_0^t \frac{c}{m} dt' \quad \longrightarrow \quad v(t) = \left(v_0 + \frac{mg}{c}\right) e^{-\frac{ct}{m}} - \frac{mg}{c}$$

$$\text{Altura máxima}: \; v^* = 0 \quad \longrightarrow \quad \boxed{t^* = \frac{m}{c} \ln\left(\frac{v_0 + mg/c}{mg/c}\right)}$$

Ejemplo 2: Cuerpo que es lanzado en el aire

- Un cuerpo de masa m es lanzado **verticalmente hacia arriba** con **rapidez inicial** v_0 y en presencia de la **gravedad** terrestre. El aire ejerce un **roce viscoso** $F{=}{-}cv$. El movimiento del cuerpo es vertical. Determine:

➔ La **altura máxima** que alcanza el cuerpo.

$$-c\dot{y} - mg = m\ddot{y} \quad \longrightarrow \quad \int_0^y dy' = -\frac{m}{c}\int_{v_0}^{v} \frac{v'dv'}{v' + mg/c}$$

$$\ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{dy}\dot{y}$$

$$\longrightarrow \quad y = \frac{m}{c}\left[v_0 - v + \frac{mg}{c}\ln\left(\frac{mg/c + v}{mg/c + v_0}\right)\right]$$

$$\text{Altura máxima : } v^* = 0 \quad \longrightarrow \quad \boxed{y_{\max} = \frac{m}{c}\left[v_0 + \frac{mg}{c}\ln\left(\frac{mg/c}{mg/c + v_0}\right)\right]}$$

$$\text{Hint: } \int \frac{x}{x+A}dx = x - A\ln(A+x)$$

Ejemplo 2: Cuerpo que es lanzado en el aire

- Un cuerpo de masa m es lanzado **verticalmente hacia arriba** con **rapidez inicial** v_0 y en presencia de la **gravedad** terrestre. El aire ejerce un **roce viscoso** $F=-b\,v$. El movimiento del cuerpo es vertical. Determine:

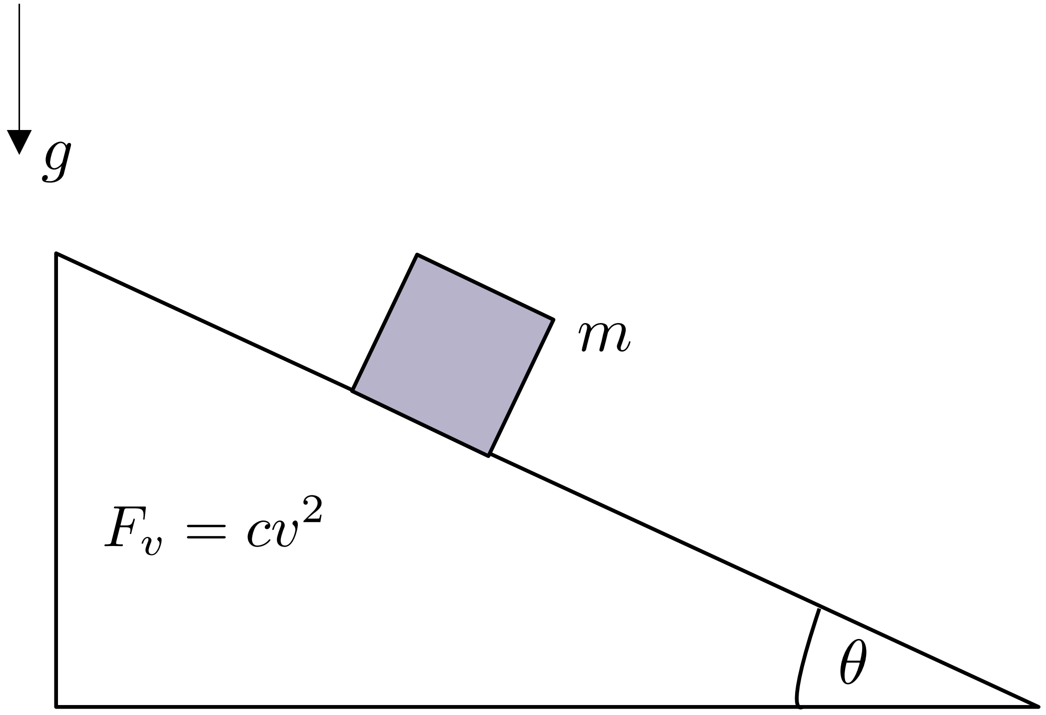
- El **tiempo** que tarda la partícula en llegar a su **punto más alto**.

- La **altura máxima** que alcanza el cuerpo.

- **Tarea:** Resolver estos problemas con otras fuerzas de roce, por ejemplo $F=-bv^2$.

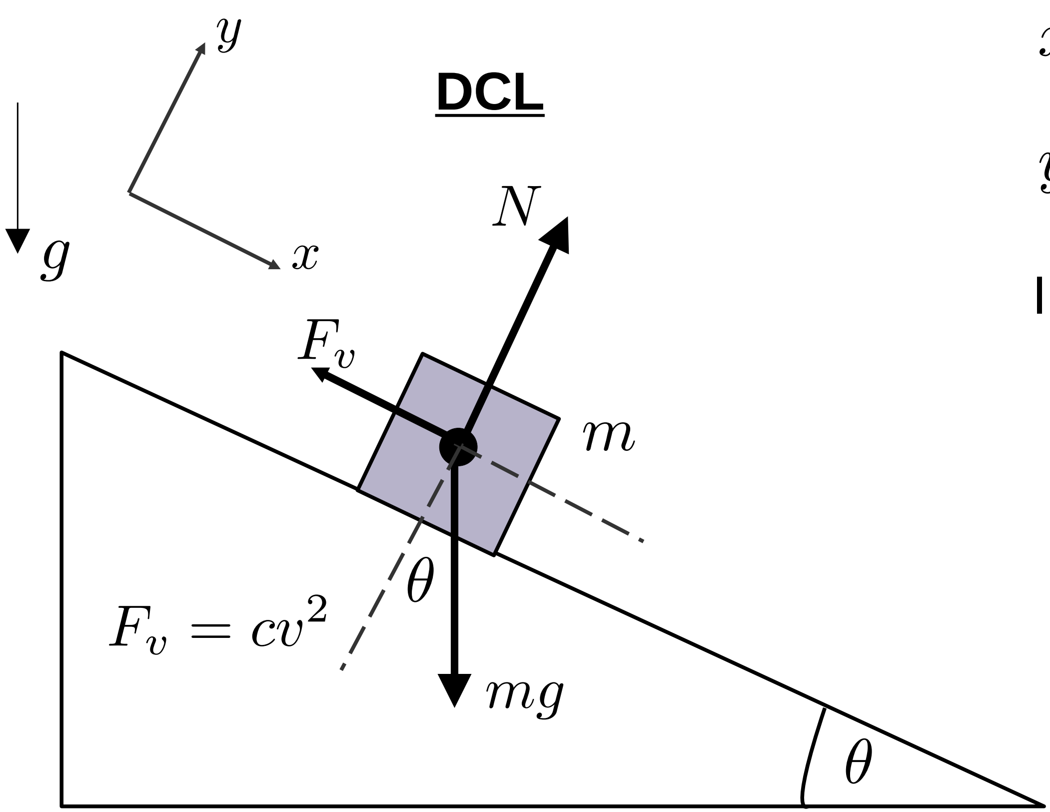
Ejemplo 3: Plano inclinado

- Un bloque de masa m se encuentra sobre la superficie de un **plano inclinado** con un ángulo θ con respecto a la horizontal. El bloque es afectado por un **roce viscoso cuadrático** en la **rapidez** y con **constante** c conocida. Si el bloque parte del reposo, encuentre la rapidez terminal.



Ejemplo 3: Plano inclinado

- Un bloque de masa m se encuentra sobre la superficie de un **plano inclinado** con un ángulo θ con respecto a la horizontal. El bloque es afectado por un **roce viscoso cuadrático** en la **rapidez** y con **constante** c conocida. Si el bloque parte del reposo, encuentre la rapidez terminal.



Ecuaciones de movimiento

$$x: \quad F_x = mg\sin\theta - c\dot{x}^2 = m\ddot{x}$$

$$y: \quad F_y = N - mg\cos\theta = 0$$

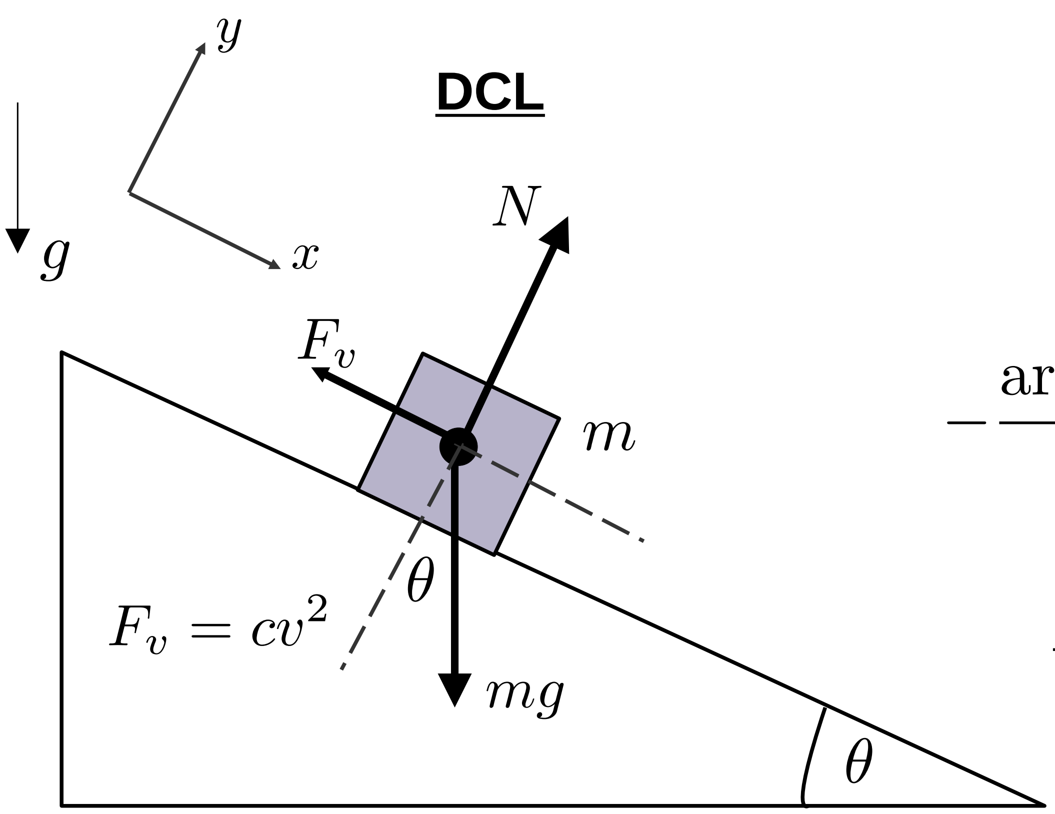
Intentamos integrar la ecuación en *x*:

$$\longrightarrow \quad mg\sin\theta - c\dot{x}^2 = m\frac{d\dot{x}}{dt}$$

$$\longrightarrow \quad \frac{d\dot{x}}{\dot{x}^2 - mg\sin\theta/c} = -\frac{c}{m}dt$$

Ejemplo 3: Plano inclinado

- Un bloque de masa m se encuentra sobre la superficie de un **plano inclinado** con un ángulo θ con respecto a la horizontal. El bloque es afectado por un **roce viscoso cuadrático** en la **rapidez** y con **constante** c conocida. Si el bloque parte del reposo, encuentre la rapidez terminal.



$$\longrightarrow \quad \frac{d\dot{x}}{\dot{x}^2 - mg\sin\theta/c} = -\frac{c}{m}dt$$

$$\int_0^v \frac{d\dot{x}}{\dot{x}^2 - mg\sin\theta/c} = -\frac{c}{m}\int_0^t dt$$

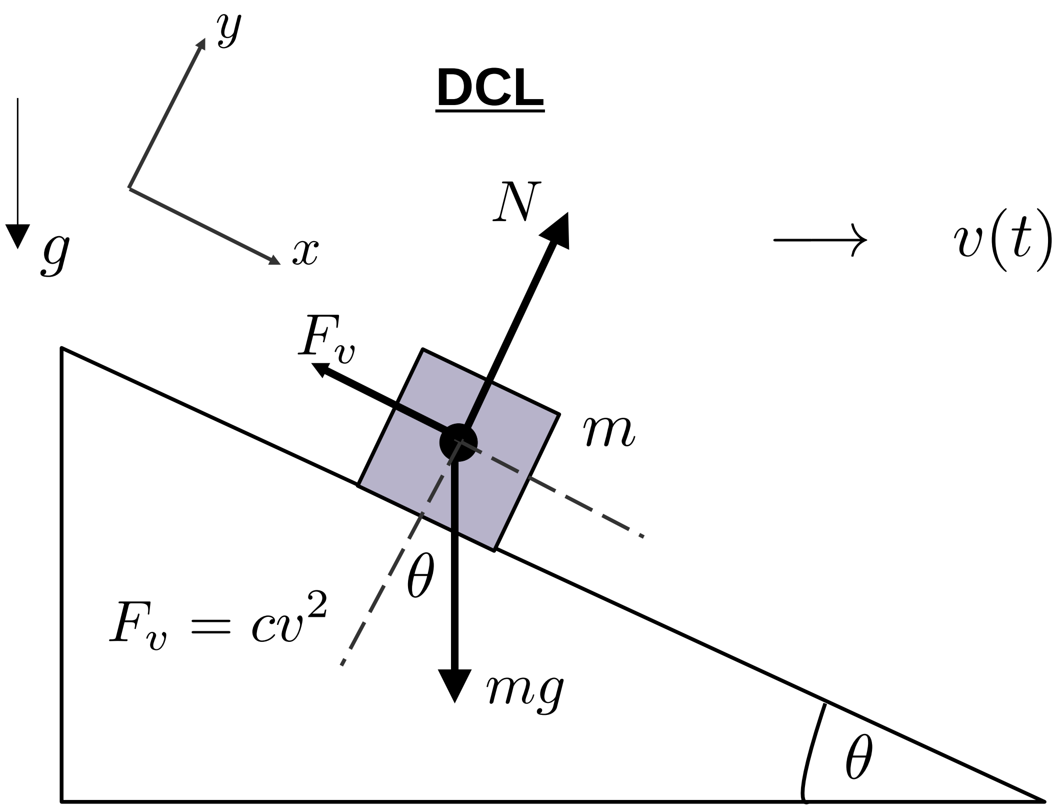
$$-\left.\frac{\operatorname{arctanh}(v/\sqrt{mg\sin\theta/c})}{\sqrt{mg\sin\theta/c}}\right|_0^v = -\frac{c}{m}t$$

$$\frac{\operatorname{arctanh}(v/\sqrt{mg\sin\theta/c})}{\sqrt{mg\sin\theta/c}} = \frac{c}{m}t$$

Ejemplo 3: Plano inclinado

- Un bloque de masa m se encuentra sobre la superficie de un **plano inclinado** con un ángulo θ con respecto a la horizontal. El bloque es afectado por un **roce viscoso cuadrático** en la **rapidez** y con **constante** c conocida. Si el bloque parte del reposo, encuentre la rapidez terminal.

$$\frac{\operatorname{arctanh}(v/\sqrt{mg\sin\theta/c})}{\sqrt{mg\sin\theta/c}} = \frac{c}{m}t$$

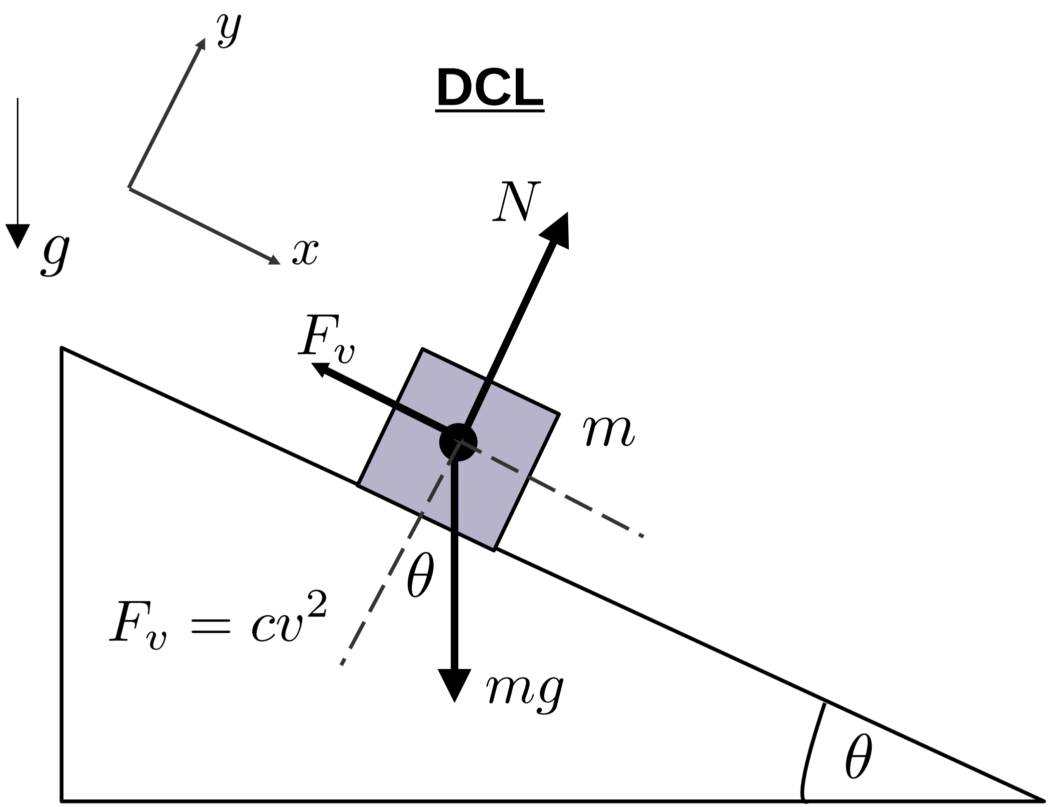


$$\longrightarrow \quad v(t) = \sqrt{\frac{mg\sin\theta}{c}}\tanh\left(\frac{c}{m}\sqrt{\frac{mg\sin\theta}{c}}t\right)$$

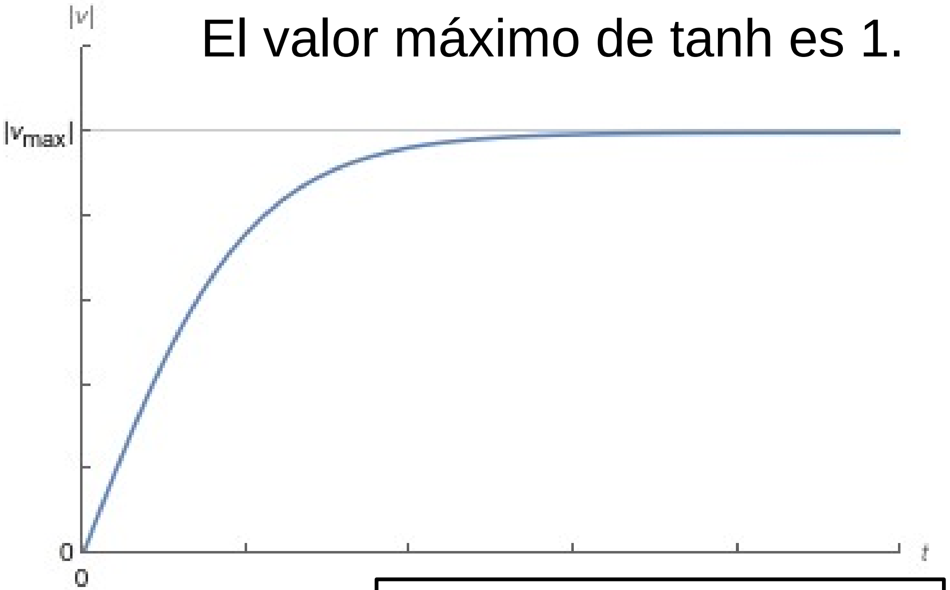
Ejemplo 3: Plano inclinado

- Un bloque de masa m se encuentra sobre la superficie de un **plano inclinado** con un ángulo θ con respecto a la horizontal. El bloque es afectado por un **roce viscoso cuadrático** en la **rapidez** y con **constante** c conocida. Si el bloque parte del reposo, encuentre la rapidez terminal.

$$\longrightarrow \quad v(t)=\sqrt{\frac{mg\sin\theta}{c}}\tanh\left(\frac{c}{m}\sqrt{\frac{mg\sin\theta}{c}}t\right)$$



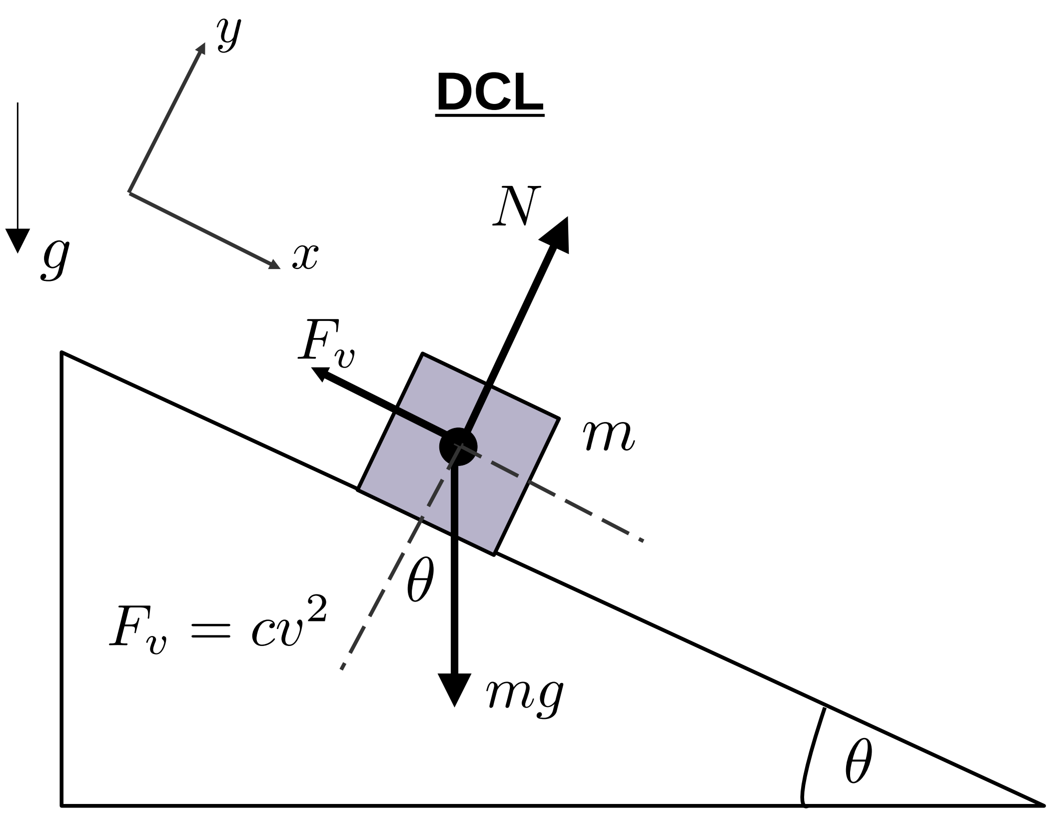
El valor máximo de tanh es 1.

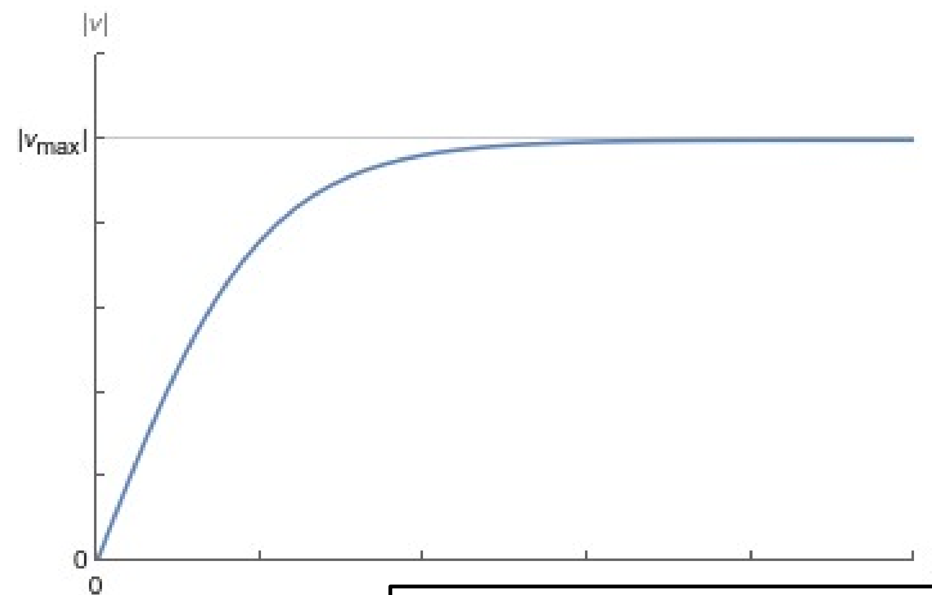


$$\longrightarrow \quad \boxed{v_{\max}=\sqrt{\frac{mg\sin\theta}{c}}}$$

Ejemplo 3: Plano inclinado

- Un bloque de masa m se encuentra sobre la superficie de un **plano inclinado** con un ángulo θ con respecto a la horizontal. El bloque es afectado por un **roce viscoso cuadrático** en la **rapidez** y con **constante** c conocida. Si el bloque parte del reposo, encuentre la rapidez terminal.





$$\longrightarrow \quad \boxed{v_{\max} = \sqrt{\frac{mg\sin\theta}{c}}}$$

Si $\theta=0, v_{max}=0$ ya que el bloque no se mueve.

Si $\theta=\pi/2$ se recupera la caída libre.

Resumen

- Hemos definido la fuerza de **roce viscoso**.
- Hemos resuelto ejemplos con roce viscoso lineal y cuadrático.
- Hemos terminado la unidad de dinámica.