FACULTAD DE FÍSICA
PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATÓLICA DE CHILE

Dinámica (FIS1514)

Resumen Dinámica

Felipe Isaule

felipe.isaule@uc.cl

Miércoles 25 de Septiembre de 2024

Clase 13: Resumen Dinámica

- Repaso Leyes de Newton y fuerzas.
- Ejemplos.

Clase 13: Resumen Dinámica

- **Repaso Leyes de Newton y fuerzas.**
- Ejemplos.

Leyes de Newton

- Primera Ley (Principio de Inercia)

$$\vec{a} = 0$$

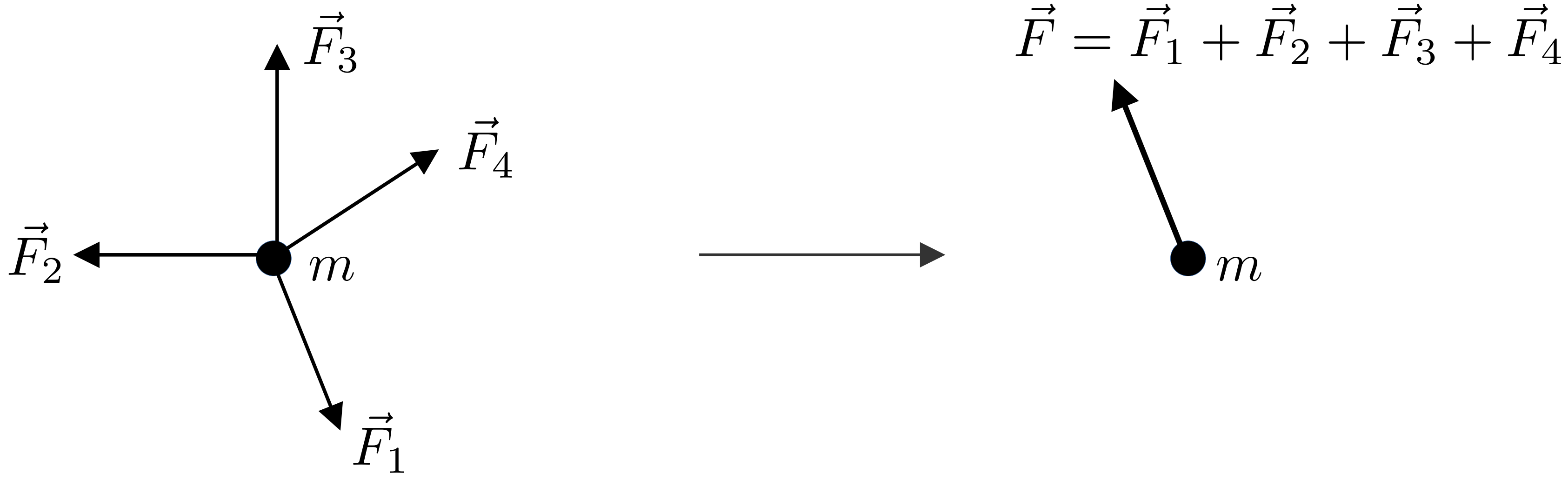
- Segunda Ley (Ley fundamental de la Dinámica)

$$\vec{F} = m\,\vec{a} \longrightarrow \text{Ecuación de movimiento}$$

- Tercera Ley (Principio de acción y reacción)

Diagrama de cuerpo libre (DCL)

- En un **diagrama de cuerpo libre** o DCL dibujamos todas las fuerzas aplicadas sobre un objeto:

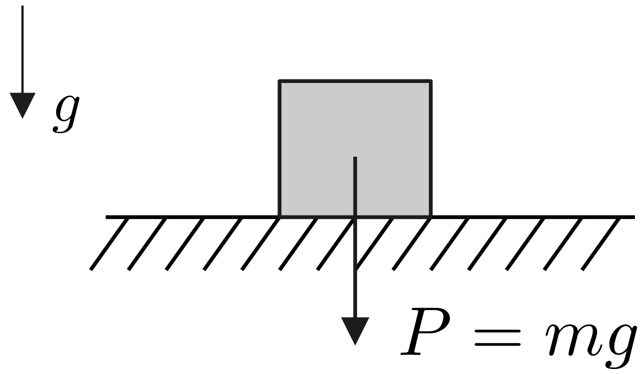


Estrategia general de resolución de problemas

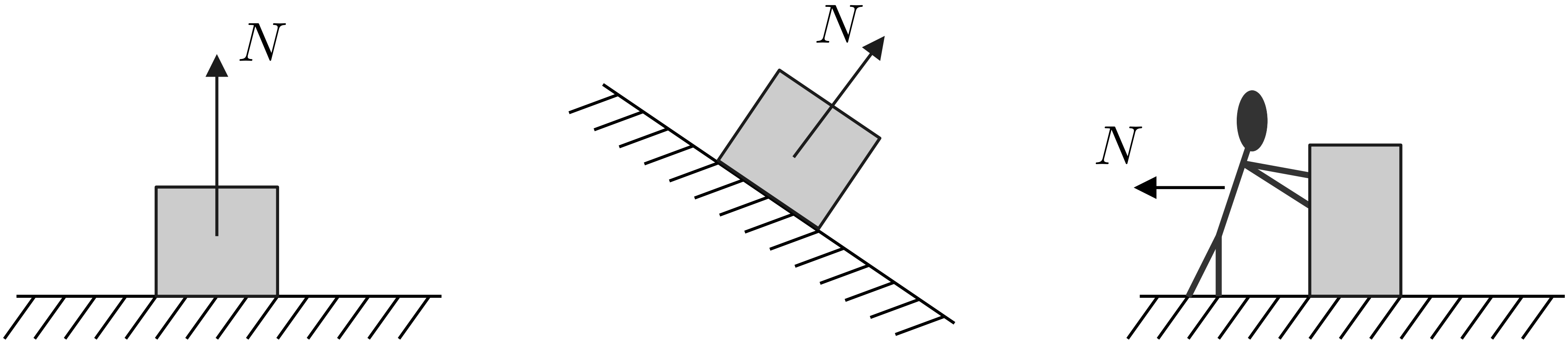
1) Seleccionar el **sistema de coordenadas** inercial.
2) Dibujar el **diagrama de cuerpo libre**.
3) Identificar las incógnitas.
4) Identificar y **descomponer** los componentes de las fuerzas si el problema lo requiere.
5) Formular las **ecuaciones de movimiento** a partir de $F = m\,a$ para cada componente.
6) Resolver la **cinemática** del problema.

Peso y normal

- El **peso** P es una fuerza constante aplicada sobre un cuerpo de masa m y va siempre en la **dirección de la superficie**.

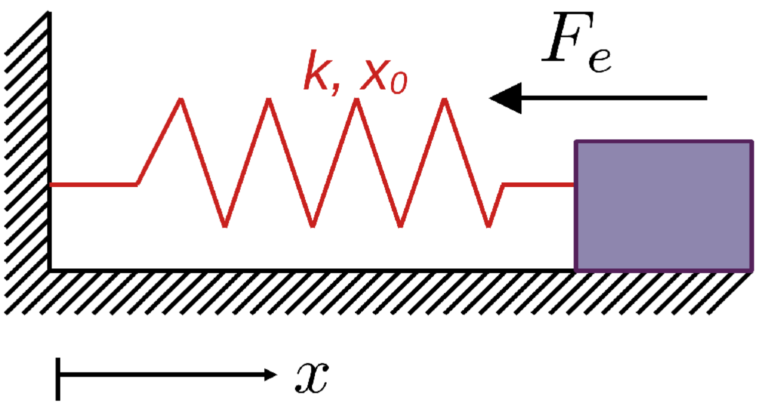


- La **normal** N es una fuerza de contacto



Fuerza elástica: Ley de Hooke

- Un **resorte** ejerce una **fuerza elástica** (de restitución) dictada por la **Ley de Hooke**

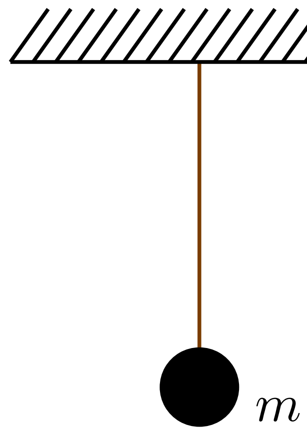


$$\boxed{F_e = -k\Delta x}$$

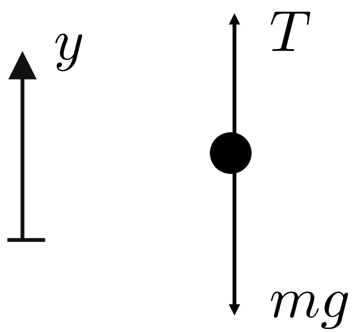
- k es la **constante elástica** y depende del material.
- Δx es la **elongación** o desplazamiento desde la **posición natural**.
- x_0 es la **posición de natural** (de equilibrio) del elástico/resorte.

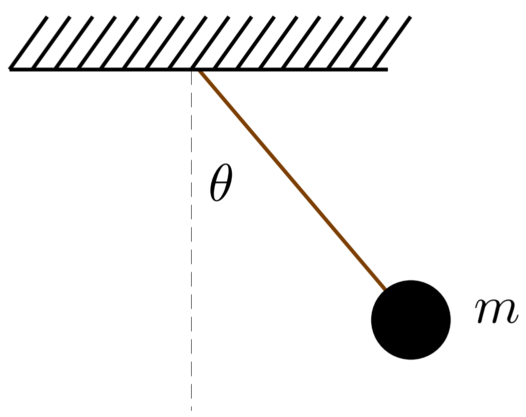
Tensión

- Una **cuerda ideal** con una fuerza llamada **tensión** T. Esta tensión es **constante a través de la cuerda**.

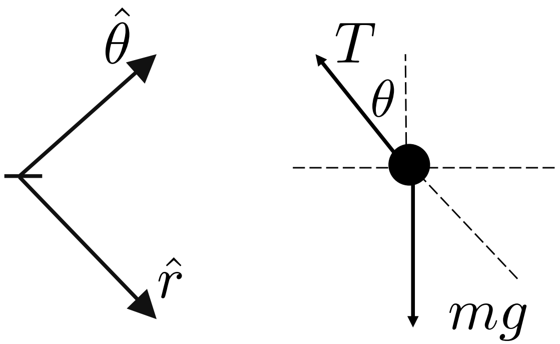


DCL



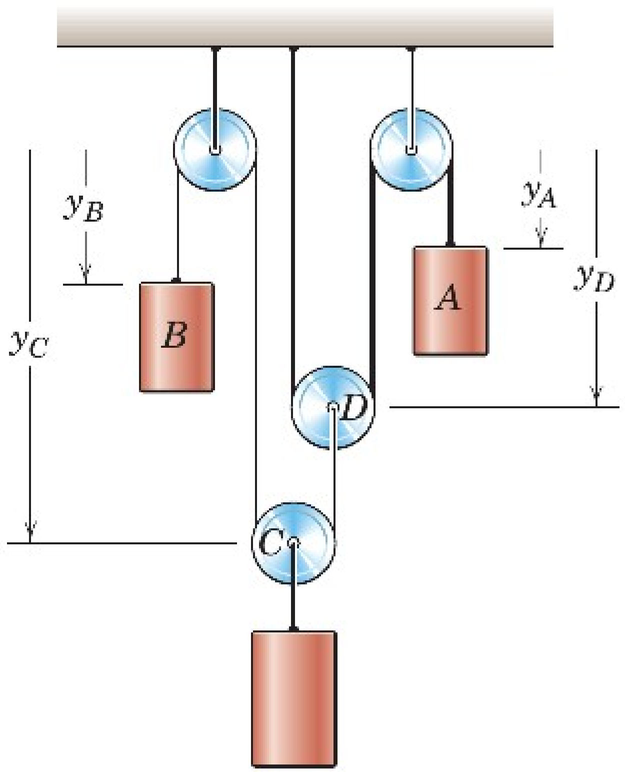


DCL



Ligaduras

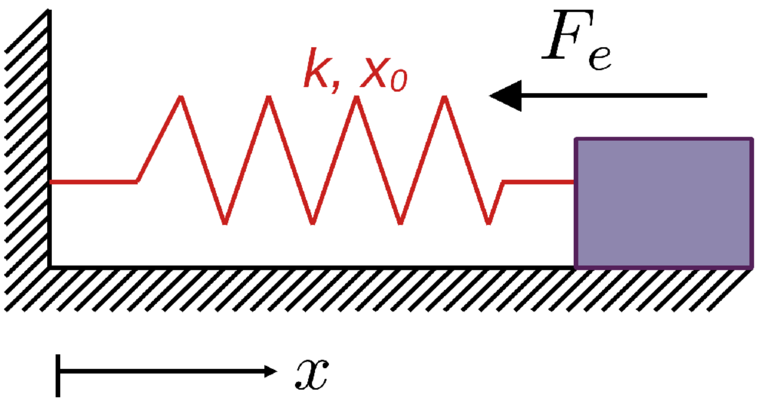
- En problemas de **ligaduras** existe una **restricción** entre las coordenadas que describen cada cuerpo en movimiento.
- Al imponer las **condiciones de ligaduras** se **reduce el número de grados de libertad**.



- Las ecuaciones de ligaduras se combinan con las ecuaciones de movimiento.
- Se debe obtener el mismo número de ecuaciones y de incógnitas.

Fuerza elástica

- Un **resorte** (o elástico) ejerce una **fuerza elástica** dictada por la **Ley de Hooke**



$$\boxed{F_e = -k\Delta x}$$

- Δx es el desplazamiento desde la **posición natural**.
- x_0 es la **posición natural** (de equilibrio) del elástico/resorte.

Fuerzas de roce de contacto

- Si dos cuerpos están en reposo entre sí, se ejerce una fuerza de **roce estático** que impide que los cuerpos se muevan.
- El roce estático es variable, pero toma un **valor máximo**

$$|\vec{F}_s| \leq \mu_s |\vec{N}| = F_{s,\mathrm{max}} \, .$$

- Ya en movimiento, los cuerpos también ejercen una fuerza de **roce dinámico** que se **opone al movimiento**. Está dado por:

$$|\vec{F}_d| = \mu_d |\vec{N}|$$

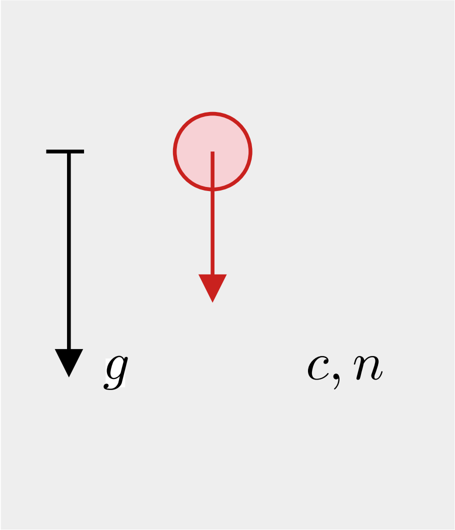
- Ambas fuerzas siempre son **paralelas** a la superficie de contacto y se oponen al movimiento.
- Experimentalmente se tiene que $\mu_s > \mu_d$.

Fuerza de roce viscoso

- El **roce viscoso** corresponde a la **resistencia** que ejerce un **fluido** al movimiento de una partícula en la **dirección del movimiento**.

$$\boxed{\vec{F}_v = -c\, v^n \hat{\vec{v}}\,.}$$

- El roce viscoso siempre apunta en la dirección **opuesta** al movimiento relativo de la partícula con respecto al fluido.

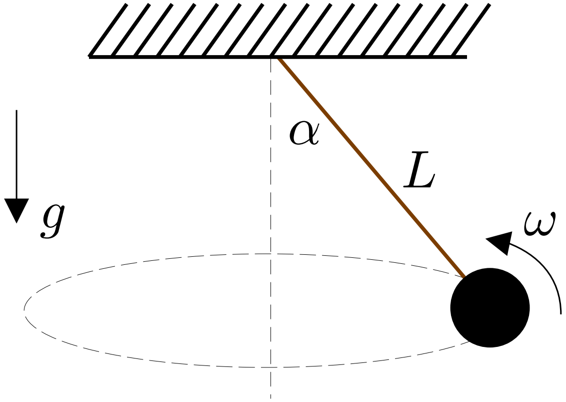


Clase 13: Resumen Dinámica

- Repaso Leyes de Newton y fuerzas.
- **Ejemplos.**

Ejemplo 1

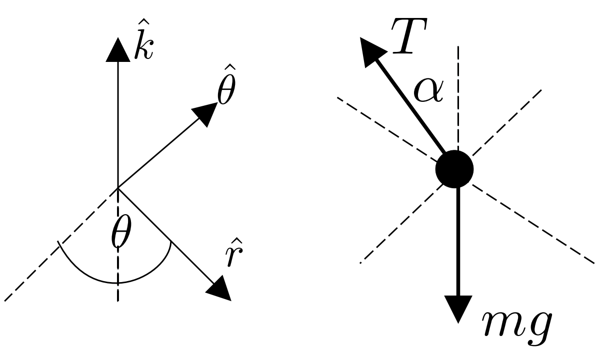
- Una pelota es sujetada por una **cuerda ideal** de largo L. Si el cuerpo gira manteniendo una **altura constante** con una velocidad angular constante conocida ω . Encuentre el ángulo α.

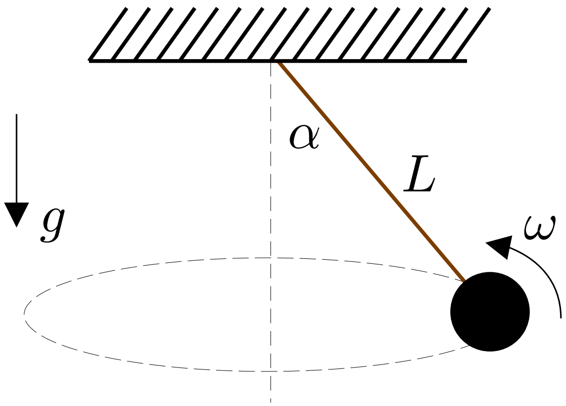


Ejemplo 1

- Una pelota es sujetada por una **cuerda ideal** de largo L. Si el cuerpo gira manteniendo una **altura constante** con una velocidad angular constante conocida ω . Encuentre el ángulo α.

DCL:





Ecuaciones de movimiento:

$$r: \quad F_r = -T\sin\alpha = ma_r = -m(L\sin\alpha)\omega^2$$

$$\theta: \quad F_\theta = 0$$

$$z: \quad F_z = T\cos\alpha - mg = ma_z = 0$$

De la ecuación en r :

$$\longrightarrow \quad T = mL\omega^2$$

De la ecuación en θ:

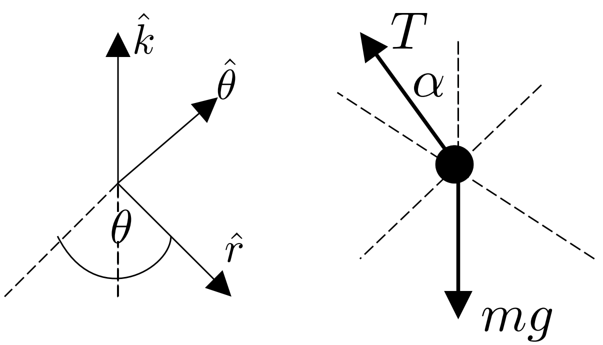
$$\longrightarrow \quad T\cos\alpha = mg \quad \longrightarrow \quad \cos\alpha = \frac{mg}{T} = \frac{g}{L\omega^2}$$

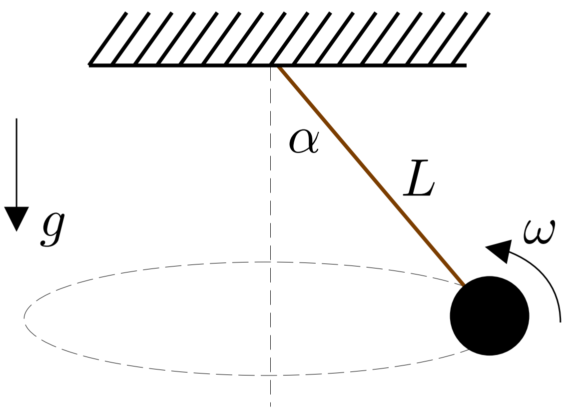
$$\longrightarrow \quad \boxed{\alpha = \arccos\left(\frac{g}{L\omega^2}\right)}$$

Ejemplo 1

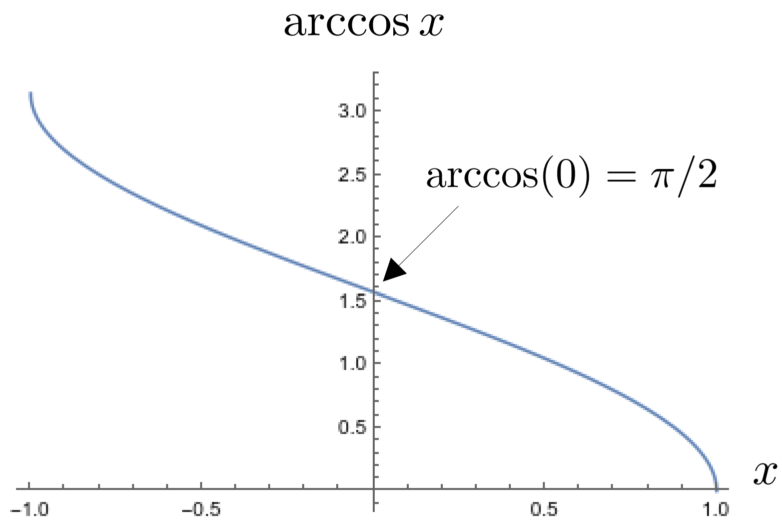
- Una pelota es sujetada por una **cuerda ideal** de largo L. Si el cuerpo gira manteniendo una **altura constante** con una velocidad angular constante conocida ω . Encuentre el ángulo α.

<u>**DCL:**</u>





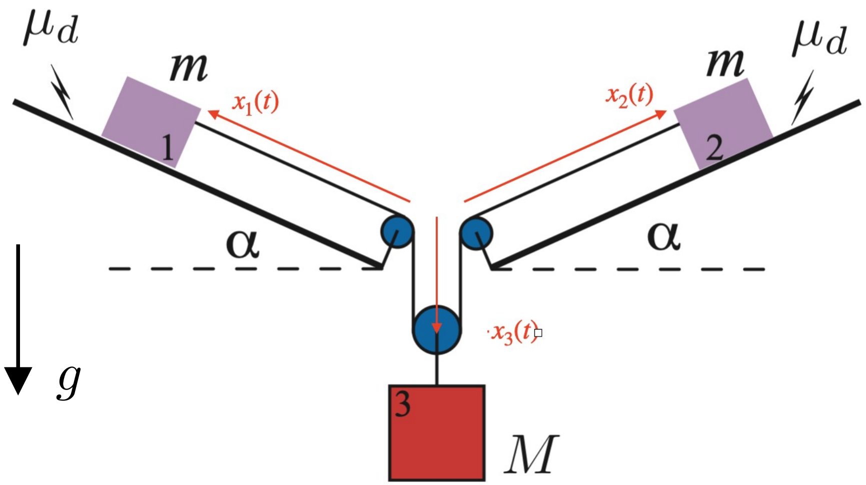
$$\longrightarrow \boxed{\alpha = \arccos\left(\frac{g}{L\omega^2}\right)}$$



Para ω muy grande, tenemos que $\alpha = \pi/2$,
Tal como uno esperaría.

Ejemplo 2

- Dos bloques de igual **masa** m están cada una en dos **planos inclinados** con **ángulo** α y con mismo **coeficiente de roce dinámico** μ_d tal que los bloques caen $(\tan\alpha > \mu_d)$. Estos dos bloques están unidos por una **cuerda ideal** de **largo** L y sostienen vía una polea una tercera **masa** $M \neq m$. Encuentre:
  - Las condiciones de ligadura.
  - Las ecuaciones de movimiento.
  - Aceleración de cada bloque.



Ejemplo 2

- Dos bloques de igual **masa** m están cada una en dos **planos inclinados** con **ángulo** α y con mismo **coeficiente de roce dinámico** μ_d tal que los bloques caen $(\tan\alpha > \mu_d)$. Estos dos bloques están unidos por una **cuerda ideal** de **largo** L y sostienen vía una polea una tercera **masa** $M \neq m$. Encuentre:
  - Las condiciones de ligadura.

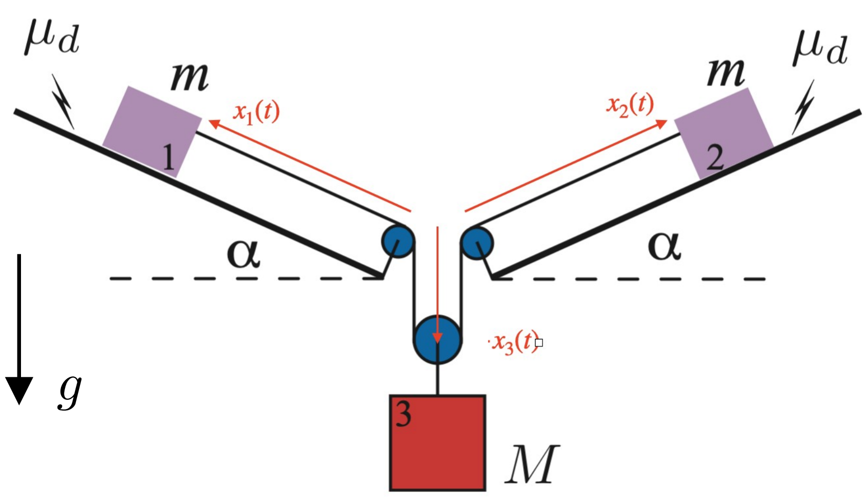
Tenemos que:

$$L = x_1 + x_2 + 2x_3$$

Entonces:

$$0 = \dot{x}_1 + \dot{x}_2 + 2\dot{x}_3$$

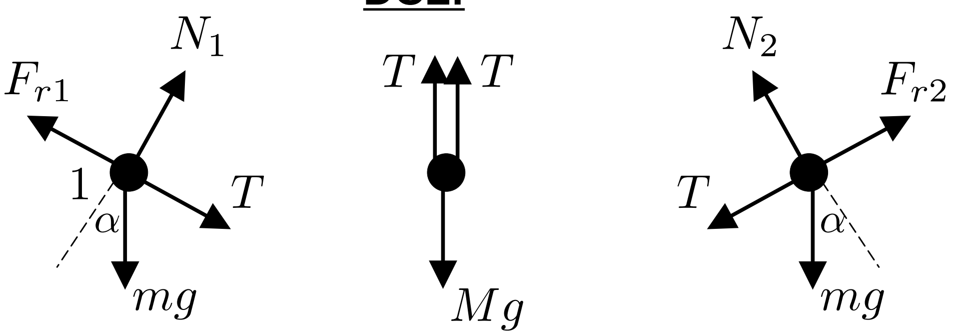
$$\boxed{0 = \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + 2\ddot{x}_3}$$

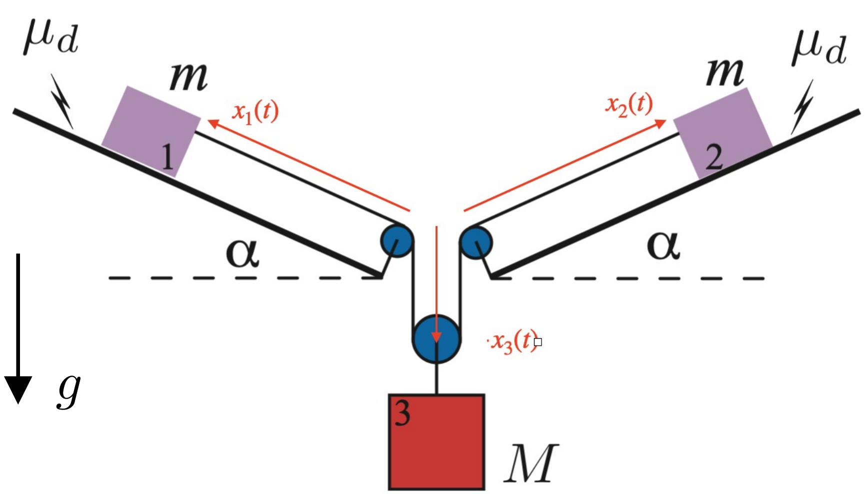


Ejemplo 2

- Dos bloques de igual **masa** m están cada una en dos **planos inclinados** con **ángulo** α y con mismo **coeficiente de roce dinámico** μ_d tal que los bloques caen $(\tan\alpha > \mu_d)$. Estos dos bloques están unidos por una **cuerda ideal** de **largo** L y sostienen vía una polea una tercera **masa** $M \neq m$. Encuentre:
  - Las ecuaciones de movimiento.

DCL:





Ecuaciones de movimiento:

$$x_1: \quad F_{x1} = F_{r1} - T - mg\sin\alpha - = m\ddot{x}_1$$

$$y_1: \quad F_{y1} = N_1 - mg\cos\alpha = 0$$

$$x_2: \quad F_{x2} = F_{r2} - T - mg\sin\alpha - = m\ddot{x}_2$$

$$y_2: \quad F_{y2} = N_2 - mg\cos\alpha = 0$$

$$x_3: \quad F_{x3} = Mg - 2T = M\ddot{x}_3$$

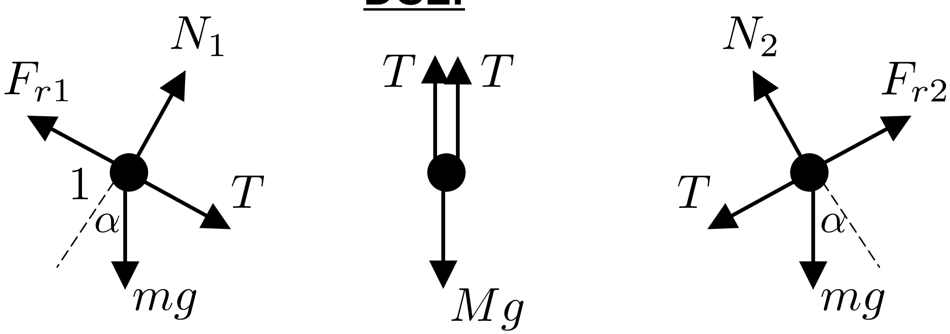
Tenemos que:

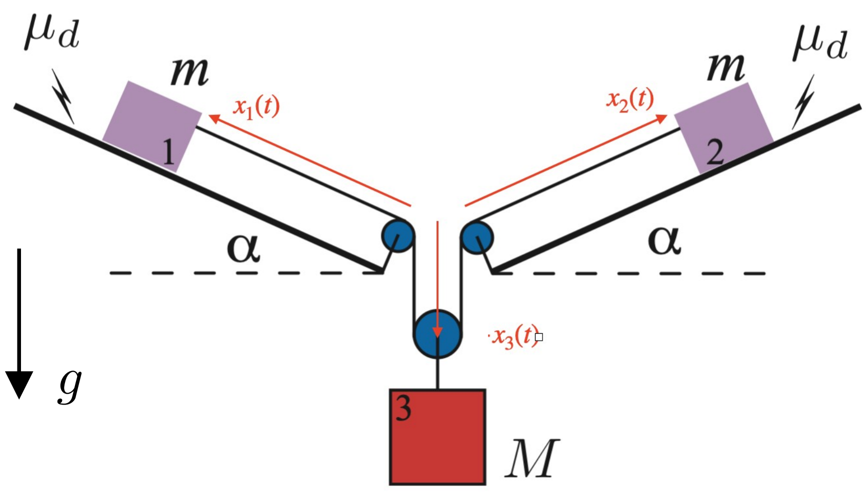
$$F_{r1} = F_{r2} = \mu_d mg\cos\alpha$$

Ejemplo 2

- Dos bloques de igual **masa** m están cada una en dos **planos inclinados** con **ángulo** α y con mismo **coeficiente de roce dinámico** μ_d tal que los bloques caen $(\tan\alpha > \mu_d)$. Estos dos bloques están unidos por una **cuerda ideal** de **largo** L y sostienen vía una polea una tercera **masa** $M \neq m$. Encuentre:
  - Las ecuaciones de movimiento.

DCL:





Entonces podemos escribir:

$$x_1: \quad mg(\mu_d\cos\alpha - \sin\alpha) - T = m\ddot{x}_1$$

$$x_2: \quad mg(\mu_d\cos\alpha - \sin\alpha) - T = m\ddot{x}_2$$

$$x_3: \quad Mg - 2T = M\ddot{x}_3$$

Ejemplo 2

- Dos bloques de igual **masa** m están cada una en dos **planos inclinados** con **ángulo** α y con mismo **coeficiente de roce dinámico** μ_d tal que los bloques caen $(\tan\alpha > \mu_d)$. Estos dos bloques están unidos por una **cuerda ideal** de **largo** L y sostienen vía una polea una tercera **masa** $M \neq m$. Encuentre:
  - Aceleración de cada bloque.

Ahora tenemos que combinar las condiciones de ligadura con las ecuacionse de movimiento

Restando las ecuaciones para x_1 y x_2:

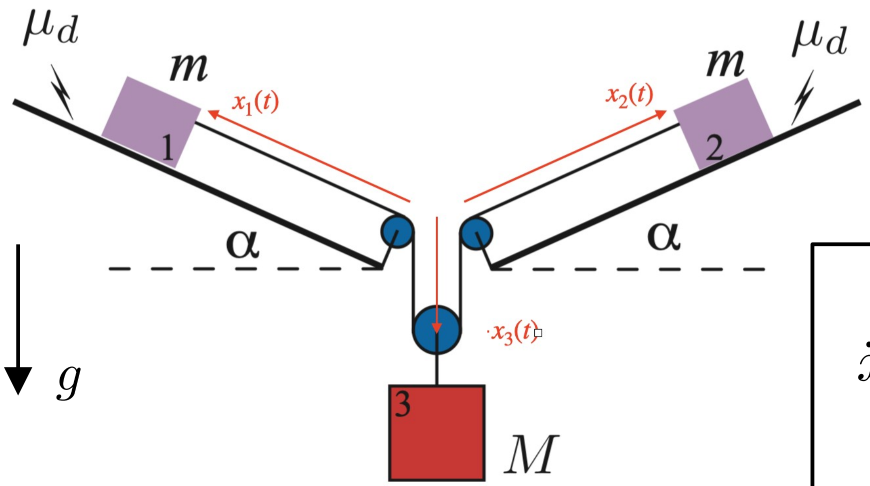
$$\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2$$

Sumando las para x_1 y x_2 y restando la de x_3:

$$2mg(\mu_d \cos\alpha - \sin\alpha) - Mg = 2m\ddot{x}_1 - M\ddot{x}_3$$

Utilizando la condición de ligadura:

$$0 = \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + 2\ddot{x}_3 \quad \rightarrow \quad \ddot{x}_3 = -\ddot{x}_1$$

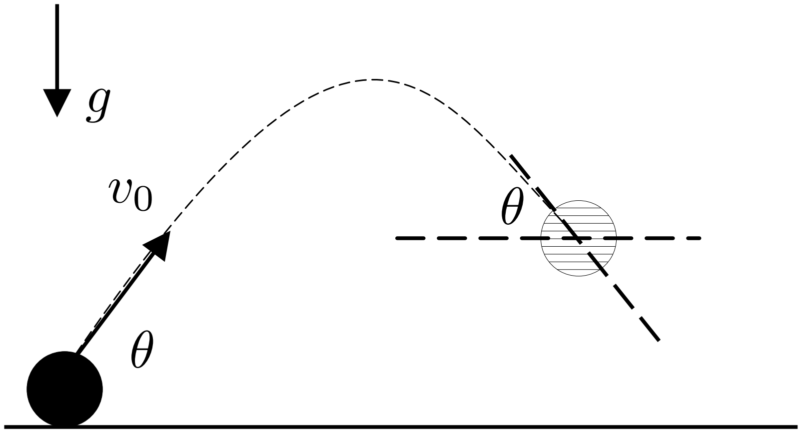


Obtenemos:

$$\boxed{\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = -\ddot{x}_3 = g\,\frac{2m(\mu_d \cos\alpha - \sin\alpha) - M}{(2m + M)}}$$

Ejemplo 3

- Se lanza una partícula de **masa** m con **rapidez inicial** v_0 e **inclinación** θ respecto a la horizontal en un medio con **roce viscoso** de $-cv$. ¿Cuánto **tiempo** transcurre hasta que la trayectoria vuelva a formar un **ángulo** θ con la horizontal?

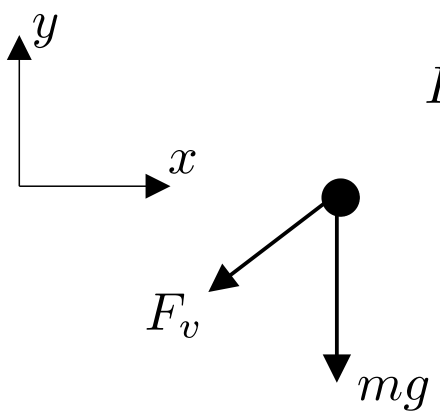


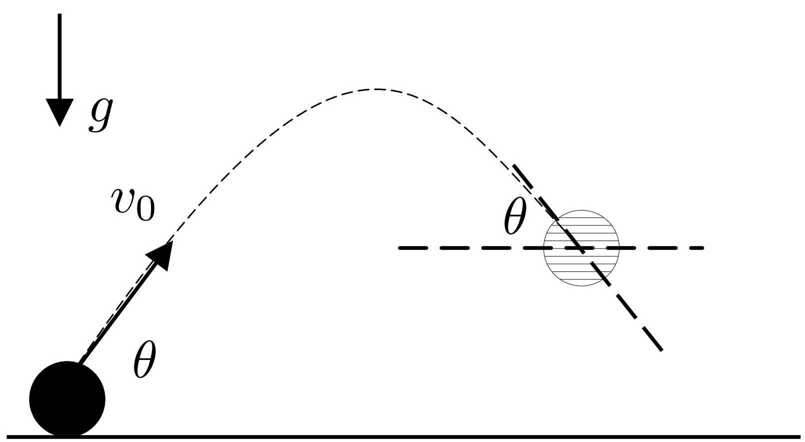
Ejemplo 3

- Se lanza una partícula de **masa** m con **rapidez inicial** v_0 e **inclinación** θ respecto a la horizontal en un medio con **roce viscoso** de $-cv$. ¿Cuánto **tiempo** transcurre hasta que la trayectoria vuelva a formar un **ángulo** θ con la horizontal?

DCL:

$$\vec{F}_v = -c\vec{v}$$





Ecuaciones de movimiento:

$$x: \quad F_x = -c\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$y: \quad F_y = -c\dot{y} - mg = m\ddot{y}$$

Se vuelve a formar un ángulo θ cuando:

$$\tan\theta = -\dot{y}/\dot{x} = -v_y/v_x$$

Integramos la ecuación en *x*:

$$\int_{v_{0x}}^{v_x} \frac{d\dot{x}}{\dot{x}} = -\frac{c}{m}\int_0^t dt \qquad \longrightarrow \qquad v_x = v_{0x}e^{-ct/m}$$

Integramos la ecuación en *y*:

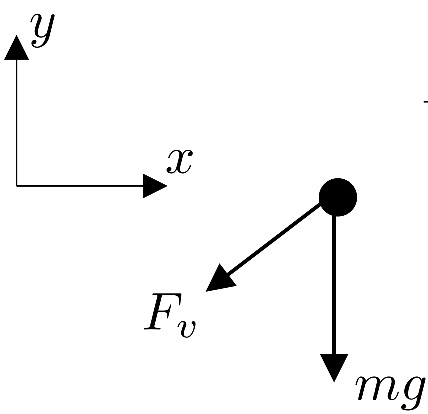
$$\int_{v_{0y}}^{v_y} \frac{d\dot{y}}{\dot{y} + mg/c} = -\frac{c}{m}\int_0^t dt$$

$$\longrightarrow \qquad v_y = \left(v_{0y} + \frac{mg}{c}\right)e^{-ct/m} - \frac{mg}{c}$$

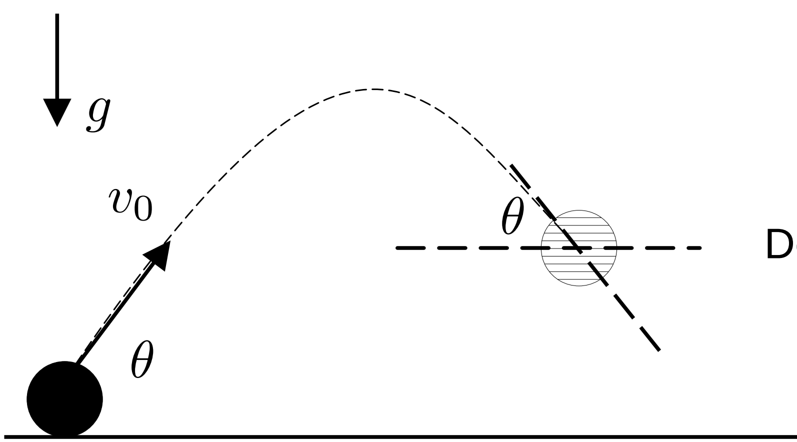
Ejemplo 3

- Se lanza una partícula de **masa** m con **rapidez inicial** v_0 e **inclinación** θ respecto a la horizontal en un medio con **roce viscoso** de $-cv$. ¿Cuánto **tiempo** transcurre hasta que la trayectoria vuelva a formar un **ángulo** θ con la horizontal?

<u>**DCL:**</u>



$$\vec{F}_v = -c\vec{v}$$



La velocidad: $\longrightarrow \quad v_x = v_{0x} e^{-ct/m}$

$$\longrightarrow \quad v_y = \left(v_{0y} + \frac{mg}{c}\right) e^{-ct/m} - \frac{mg}{c}$$

Donde: $v_{0x} = v_0 \cos\theta, \quad v_{0y} = v_0 \sin\theta$

Entonces: $\tan\theta = -\dfrac{v_y}{v_x} = \dfrac{-\left(v_{0y} + \frac{mg}{c}\right) e^{-ct^*/m} + \frac{mg}{c}}{v_{0x} e^{-ct^*/m}}$

$$= \frac{-\left(v_0 \sin\theta + \frac{mg}{c}\right) + \frac{mg}{c} e^{ct^*/m}}{v_0 \cos\theta}$$

Despejando: $\tan\theta = -\tan\theta + \dfrac{mg}{cv_0 \cos\theta}\left(e^{ct^*/m} - 1\right)$

$$\longrightarrow \quad \boxed{t^* = \frac{m}{c} \ln\left(\frac{2cv_0}{mg}\sin\theta + 1\right)}$$

Resumen

- Hemos terminado la unidad de Dinámica.
- Próxima clase:
  ➔ Inicio unidad de Trabajo y Energía