FACULTAD DE FÍSICA
PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATÓLICA DE CHILE

Dinámica (FIS1514)

Trabajo y energía

Felipe Isaule

felipe.isaule@uc.cl

Lunes 30 de Septiembre de 2024

Resumen clase anterior

- Terminamos la unidad de **Dinámica**.

Clase de hoy

- Trabajo.
- Energía cinética y método de trabajo-energía.

- Bibliografía recomendada:
  - Meriam (3.6).
  - Hibbeler (14.1, 14.2, 14.3).

Clase de hoy

- **Trabajo.**
- Energía cinética y método de trabajo-energía.

Producto punto

- Antes de definir trabajo, recordamos la definición de **producto punto** entre dos vectores.

- Si tenemos dos vectores en cartesianas:

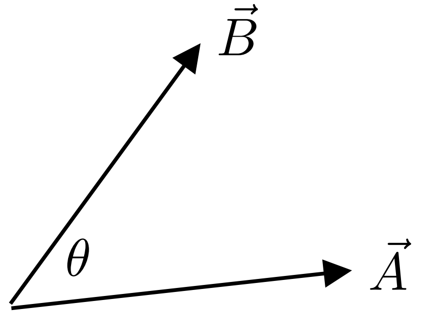
$$\vec{A} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}\,, \qquad \vec{B} = b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}$$

- El producto punto es un escalar, y se define como:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

- También podemos escribir

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$$



- Notar que el **producto punto entre vectores ortogonales es cero**.

Trabajo

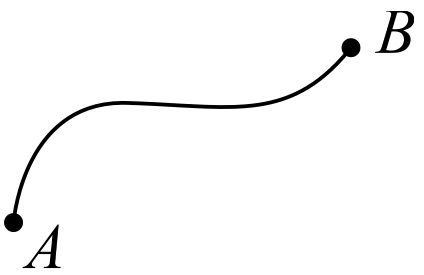
- El **trabajo** dW efectuado por una **fuerza** F aplicada a un cuerpo que se deplaza una **distancia** $d\vec{r}$ es

$$\boxed{dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}}$$

Producto punto

- El trabajo realizado por una fuerza desde un punto *A* a uno *B*,

$$\boxed{W_{A \to B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}}$$



Trayectoria (o camino) seguido por el cuerpo desde *A* a *B*.

- El trabajo es un **escalar**.
- Sus unidad en el SI es el **Joule**.

$$\mathrm{J} = \mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}$$

Trabajo

- Una integral del tipo

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

  se llama **integral del línea**.

- Debido al producto punto, sólo los componentes de la fuerza **paralelos al deplazamiento** producen trabajo.

- Es decir, **fuerzas ortogonales al deplazamiento no generan trabajo**.

- Entonces, podemos escribir

$$\boxed{W_{A\to B} = \int_{s_A}^{s_B} F_t \, ds}$$

  donde F_t es la componente de la fuerza paralela al desplazamiento, mientras que ds parametriza la trayectoria.

Cálculo de trabajo en coordenadas cartesianas

- En **coordenadas cartesianas**, tenemos que

$$d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}\,.$$

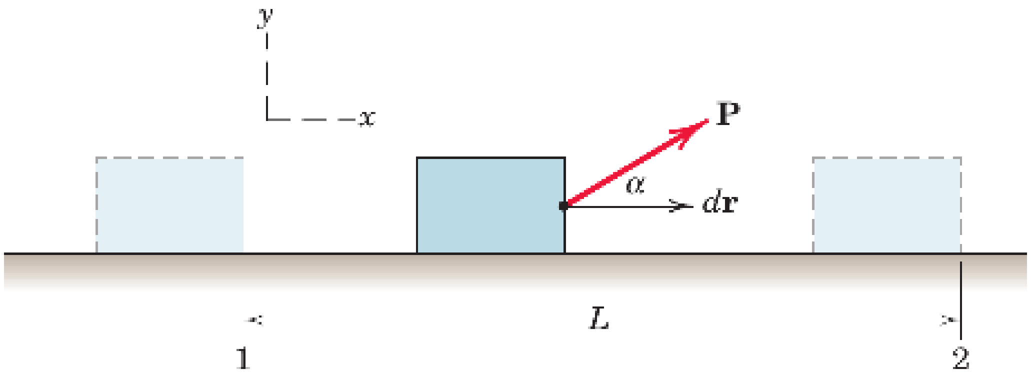
- Pero debemos **imponer la dirección del desplazamiento**.

- Ejemplo: Si a un bloque se le aplica una fuerza P constante como muestra la figura, el trabajo realizado entre los puntos 1 y 2 es:

$$W_{1\rightarrow 2} = \int_1^2 \vec{P}\cdot d\vec{r} = \int_1^2 (P\cos\alpha\,\hat{i} + P\sin\alpha\,\hat{j})\cdot(dx\,\hat{i})$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} P\cos\alpha\, dx = P\cos\alpha(x_2 - x_1) = P\,L\cos\alpha$$

Movimiento es sólo en x



Trabajo producido por un resorte

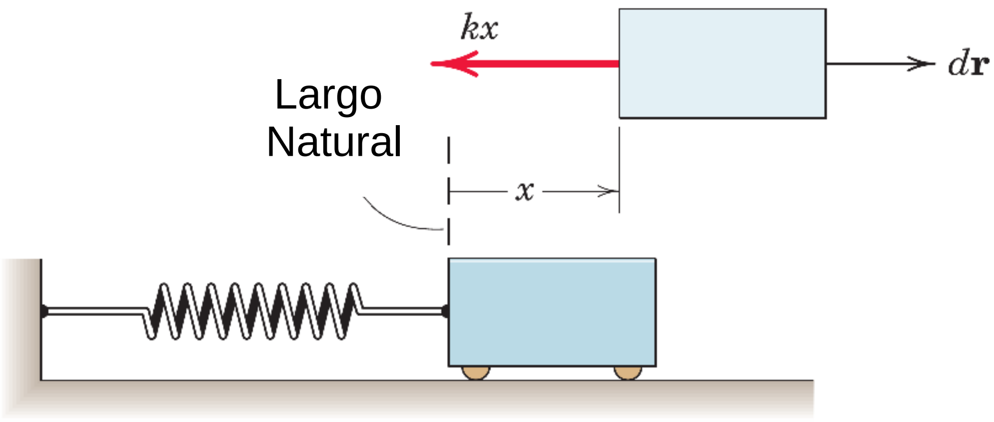
- Si se tiene un cuerpo atado a un resorte de constante elástica *k* como muestra la figura, el trabajo realizado entre dos puntos 1 y 2:

$$W_{1\to 2} = \int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_{x_1}^{x_2} k\,x\,dx = -\frac{k}{2}(x_2^2 - x_1^2)$$

$$d\vec{r} = d\,x\,\hat{i}$$

$$\vec{F} = -k\,x\,\hat{i}$$

- El trabajo depende sólo de las posiciones iniciales y finales.



Trabajo debido al peso

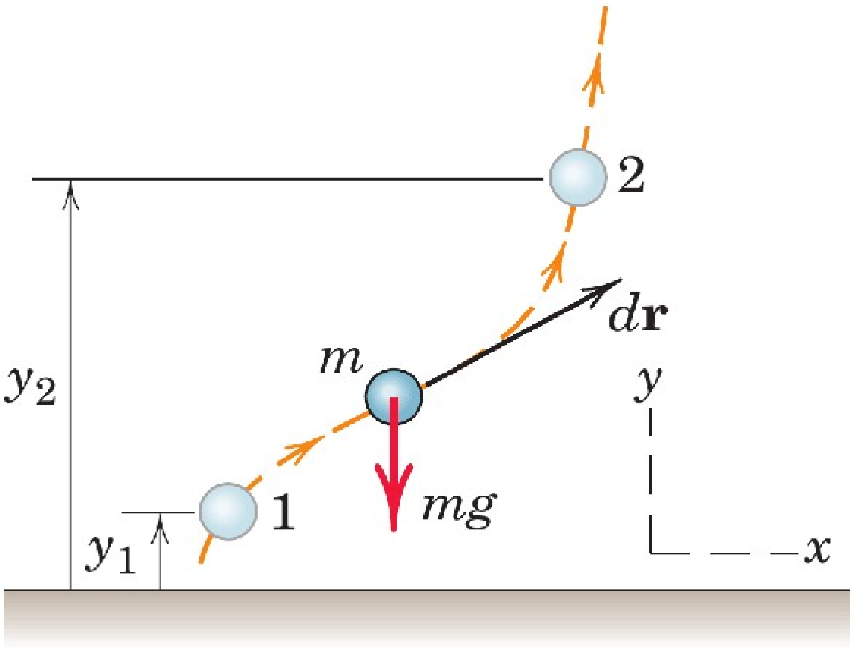
- Si un cuepro de masa m cae en un plano a través de una trayectoria (ver figura), el trabajo debido al peso es:

$$W_{1\rightarrow 2} = \int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_{y_1}^{y_2} m\,g\,dy = -mg(y_2 - y_1)$$

$$d\vec{r} = d\,x\,\hat{i} + d\,y\,\hat{j}$$

$$\vec{F} = -m\,g\,\hat{j}$$

- El trabajo depende sólo de la **diferencia de alturas**.



Clase de hoy

- Trabajo.
- **Energía cinética y método de trabajo-energía.**

Energía cinética

- Si consideramos **todas** las fuerzas aplicadas a un cuerpo, por la segunda ley de Netwon tenemos que:

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_A^B m\,\vec{a}\cdot d\vec{r}$$

$$= m\int_A^B \frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r} = m\int_A^B \frac{d\vec{v}}{dt}\cdot \vec{v}\,dt$$

$$= m\int_{\vec{v}_A}^{\vec{v}_B} d\vec{v}\cdot\vec{v} = \frac{m}{2}\int_{v_A^2}^{v_B^2} dv^2$$

$$\boxed{W_{A\to B} = \frac{m}{2}\left(v_B^2 - v_A^2\right)}$$

- El **trabajo total realizado** entre dos puntos depende de la **diferencia entre los cuadrados de la rapidez**.

Energía cinética

- La **energía cinética** de un cuerpo en un punto es

$$\boxed{T = \frac{1}{2}mv^2}$$

- El **trabajo total** realizado por un cuerpo entre dos puntos *A* y *B* es igual a la **diferencia entre las energías cinéticas**:

$$\boxed{W_{A\to B} = T_B - T_A}$$

  que corresponde a la **ecuación de trabajo-energía** de un cuerpo.

- Resolver problemas de dinámica utilizando esta ecuación se denomina el **método de trabajo-energía**.

Receta del método de trabajo-energía

1) Identificar los **puntos iniciales y finales** del movimiento.

2) Identificar las fuerzas, o componentes de las fuerzas, que **realizan trabajo**.

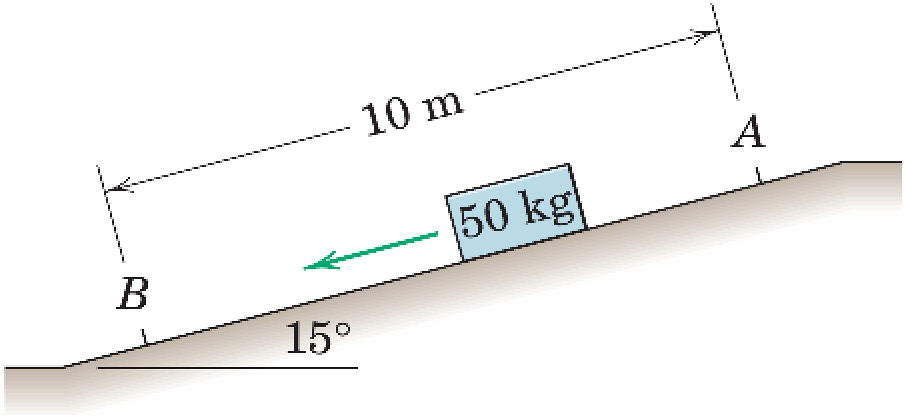
3) Calcular el **trabajo realizado** y/o las **energías cinéticas** en los puntos iniciales y finales.

4) Despejar las **incógnitas**.

$$W_{A \to B} = T_B - T_A$$

Ejemplo:

- Calcule la **rapidez** de un bloque de 50kg cuando llega al punto *B* (ver figura) si la **rapidez inicial** en *A* es $v_A = 4 \ \mathrm{m/s}$. Considere un coeficiente de roce dinámico de $\mu_d = 0.30$.

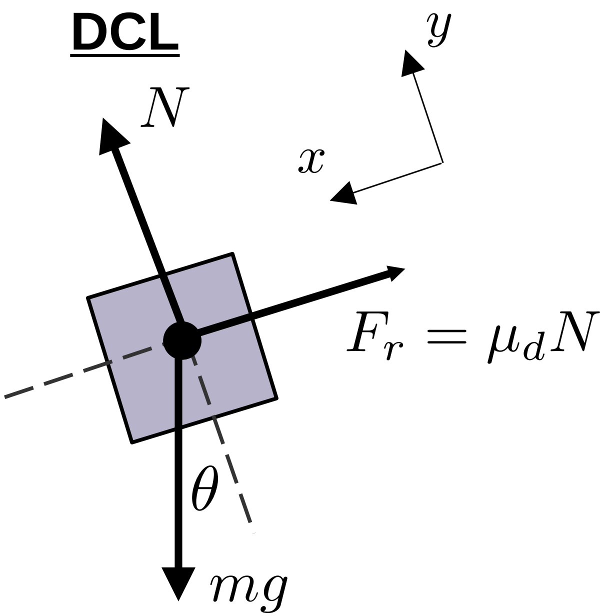


cos(15°)~0.97 sin(15°)~0.26

Ejemplo:

- Calcule la **rapidez** de un bloque de 50kg cuando llega al punto *B* (ver figura) si la **rapidez inicial** en *A* es $v_A = 4\ \mathrm{m/s}$. Considere un coeficiente de roce dinámico de $\mu_d = 0.30$.

DCL



Fuerzas

$$\text{Peso}: \quad \vec{P} = mg\sin\theta\,\hat{i} - mg\cos\theta\,\hat{j}$$

$$\text{Normal}: \quad \vec{N} = mg\cos\theta\,\hat{j}$$

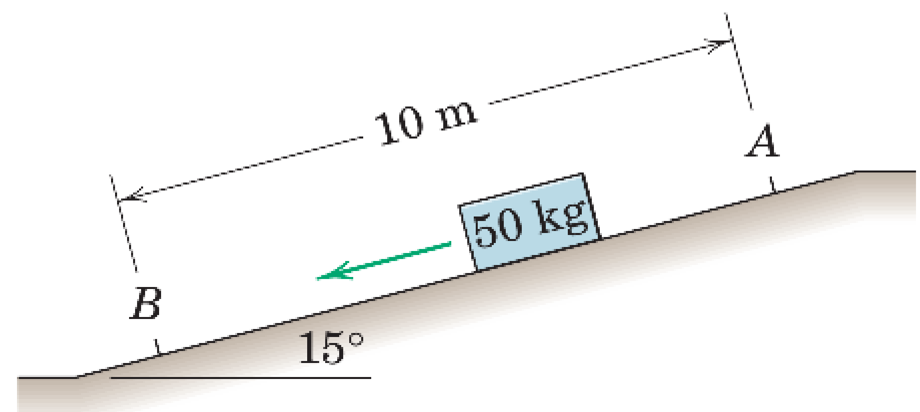
$$\text{Roce}: \quad F_r = -\mu_d m\,g\,\cos\theta\,\hat{i}$$

Debido a que el desplazamiento es en x. Sólo el roce y el componente en x del Peso contribuyen al trabajo.

Ecuaciones de movimiento

$$x: \quad F_x = mg\sin\theta - \mu_d N = ma_x$$

$$y: \quad F_y = N - mg\cos\theta = 0$$



cos(15°)~0.97 sin(15°)~0.26

Ejemplo:

- Calcule la **rapidez** de un bloque de 50kg cuando llega al punto *B* (ver figura) si la **rapidez inicial** en *A* es $v_A = 4\ \mathrm{m/s}$. Considere un coeficiente de roce dinámico de $\mu_d = 0.30$.

Trabajo

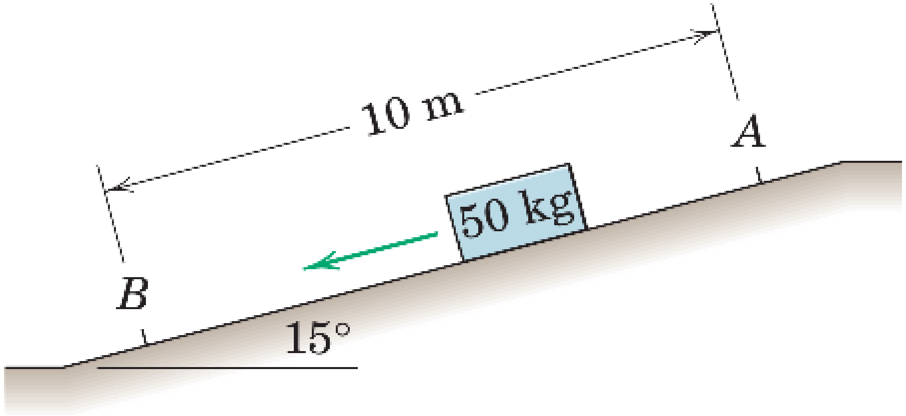
El trabajo realizado entre *A* y *B*:

$$W_{A\to B} = \int_{x_A}^{x_B} F_x dx = \int_{x_A}^{x_B} (\overbrace{mg\sin\theta}^{\text{Componente en x del Peso}} \overbrace{- \mu_d mg\cos\theta}^{\text{Roce}})dx$$

$$= mg(\sin\theta - \mu_d\cos\theta)(x_B - x_A)$$

$$= -151.9\ \mathrm{J}$$

$x_A = 0$
$x_B = 10\ \mathrm{m}$



cos(15°)~0.97 sin(15°)~0.26

Ejemplo:

- Calcule la **rapidez** de un bloque de 50kg cuando llega al punto *B* (ver figura) si la **rapidez inicial** en *A* es $v_A = 4 \ \mathrm{m/s}$. Considere un coeficiente de roce dinámico de $\mu_d = 0.30$.

Trabajo

$$W_{A \to B} = -151.9 \ \mathrm{J}$$

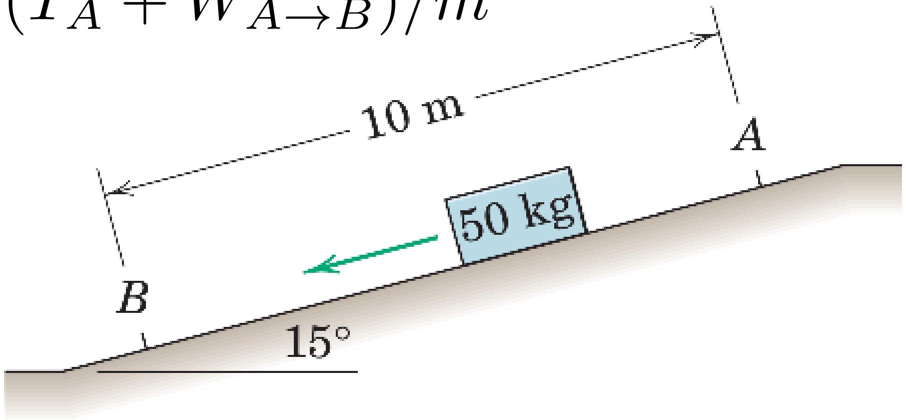
Energía cinética

$$T_A = \frac{1}{2} m v_A^2 = 400 \ \mathrm{J}$$

Ecuación trabajo-energía

$$W_{A \to B} = T_B - T_A \quad \longrightarrow \quad v_B = \sqrt{2(T_A + W_{A \to B})/m}$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{v_B = 3.15 \ \mathrm{m/s}}$$



cos(15°)~0.97 sin(15°)~0.26

Ventajas del método de trabajo-energía

- El ejemplo anterior se podría haber resuelto utilizando leyes de Newton y cinemática.
- Sin embargo, para obtener la rapidez tendríamos que haber resuelto integrales más complicadas para resolver la cinemática.
- El método de trabajo-energía **permite resolver problemas sin tener que integrar la aceleración**.

Resumen

- Hemos definido el concepto de **trabajo** realizado por fuerzas.
- Hemos introducido el concepto de **energía cinética**.
- Presentamos el **método de trabajo-energía** para resolver problemas de dinámica.
- Próxima clase:
  - Energía potencial y conservación de energía.