



FACULTAD DE FÍSICA  
PONTIFICIA UNIVERSIDAD  
CATÓLICA DE CHILE

# Dinámica (FIS1514)

## Movimiento armónico simple (cont.)

---

**Felipe Isaule**

felipe.isaule@uc.cl

Lunes 14 de Octubre de 2024

# Resumen clase anterior

- Definimos la el **movimiento armónico simple** (M.A.S.)

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

- Definimos la **frecuencia angular** de oscilación  $\omega$  y el **período**  $T=2\pi/\omega$ .
- Revisamos ejemplos típicos de M.A.S. con resortes.

# Clase de hoy

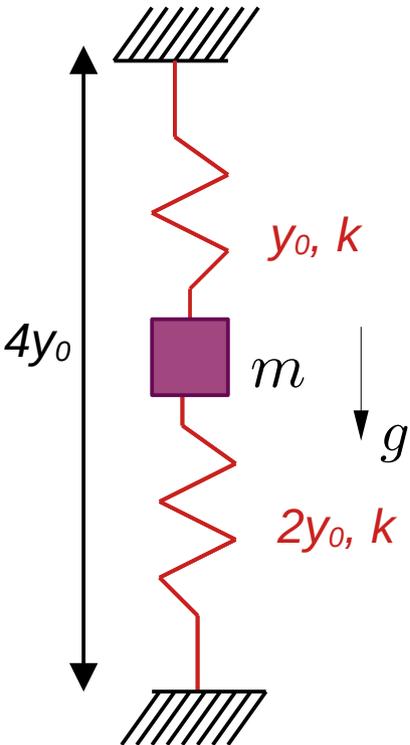
- Ejemplos y punto de equilibrio
- Péndulo simple y pequeñas oscilaciones

# Clase de hoy

- **Ejemplos y punto de equilibrio**
- Péndulo simple y pequeñas oscilaciones

# Ejemplo 1

- Un cuerpo de **masa**  $m$  está atado **verticalmente** a dos **resortes** con **constantes elásticas**  $k$  y **largo natural**  $y_0$  y  $2y_0$  como muestra la figura. Considerando que los resortes se encuentran pegados a superficies separadas por una **distancia** de  $4y_0$ . Encuentre:
  - **Ecuación de movimiento y frecuencia** natural de oscilación.
  - La **altura en función del tiempo** si en  $t=0$  el cuerpo está en **reposo** y a una **altura**  $y_0$  desde la superficie.



# Ejemplo 1

- Un cuerpo de **masa**  $m$  está atado **verticalmente** a dos **resortes** con **constantes elásticas**  $k$  y **largo natural**  $y_0$  y  $2y_0$  como muestra la figura. Considerando que los resortes se encuentran pegados a superficies separadas por una **distancia** de  $4y_0$ . Encuentre:
  - **Ecuación de movimiento y frecuencia** natural de oscilación.

$$E = \frac{m}{2}\dot{y}^2 + mgy + \frac{k}{2}(y - 2y_0)^2 + \frac{k}{2}(4y_0 - y - y_0)^2$$

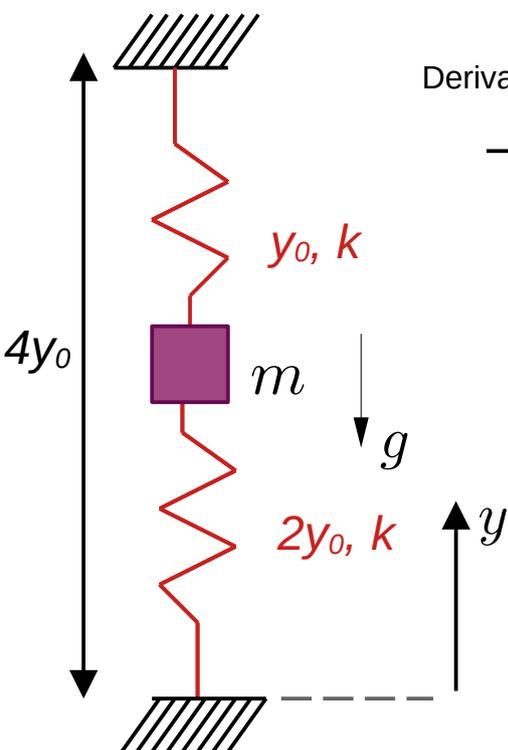
Derivamos con respecto  
al tiempo

$$0 = m\dot{y}\ddot{y} + mg\dot{y} + k(y - 2y_0)\dot{y} - k(3y_0 - y)\dot{y}$$

$$\ddot{y} + g + \frac{k}{m}(2y - 5y_0) = 0$$

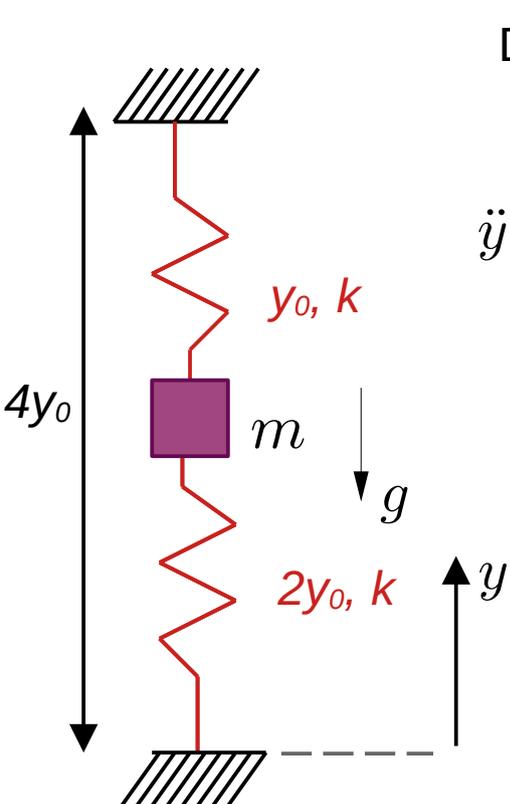
La frecuencia  
angular:

$$\omega = \sqrt{2k/m}$$



# Ejemplo 1

- Un cuerpo de **masa**  $m$  está atado **verticalmente** a dos **resortes** con **constantes elásticas**  $k$  y **largo natural**  $y_0$  y  $2y_0$  como muestra la figura. Considerando que los resortes se encuentran pegados a superficies separadas por una **distancia** de  $4y_0$ . Encuentre:
  - La **altura en función del tiempo** si en  $t=0$  el cuerpo está en **reposo** y a una **altura**  $y_0$  desde la superficie.



Definimos:

$$\tilde{y} = y - \frac{5y_0}{2} + \frac{mg}{2k}$$

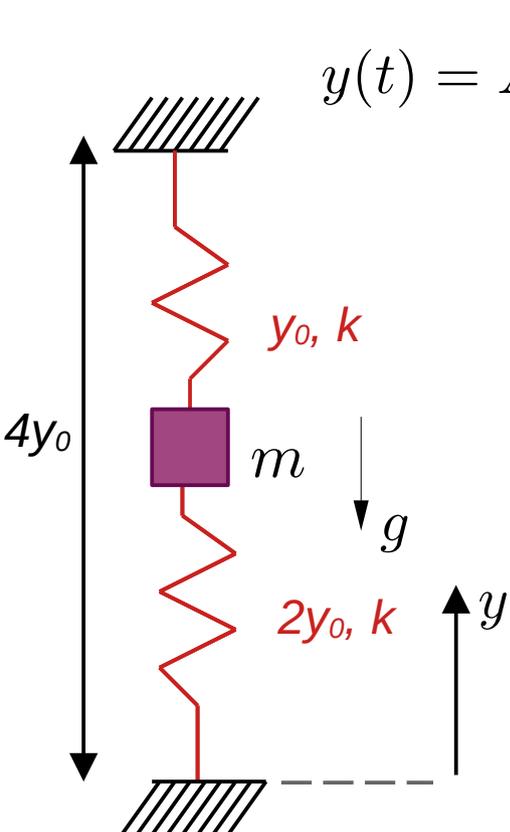
$$\ddot{y} + g + \frac{k}{m}(2y - 5y_0) = 0 \quad \longrightarrow \quad \ddot{\tilde{y}} + \omega^2 \tilde{y} = 0$$

$$\longrightarrow \quad \tilde{y} = A \cos(\omega t + \delta)$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{y(t) = A \cos(\omega t + \delta) + \frac{5y_0}{2} - \frac{mg}{2k}}$$

# Ejemplo 1

- Un cuerpo de **masa**  $m$  está atado **verticalmente** a dos **resortes** con **constantes elásticas**  $k$  y **largo natural**  $y_0$  y  $2y_0$  como muestra la figura. Considerando que los resortes se encuentran pegados a superficies separadas por una **distancia** de  $4y_0$ . Encuentre:
  - La **altura en función del tiempo** si en  $t=0$  el cuerpo está en **reposo** y a una **altura**  $y_0$  desde la superficie.



$$y(t) = A \cos(\omega t + \delta) + \frac{5y_0}{2} - \frac{mg}{2k} \quad \longrightarrow \quad \dot{y}(t) = -A\omega \sin(\omega t + \delta)$$

En  $t=0$ :

$$\dot{y}(t=0) = 0 = -A\omega \sin(\delta) \quad \longrightarrow \quad \delta = n\pi, \quad n = 0, 1$$

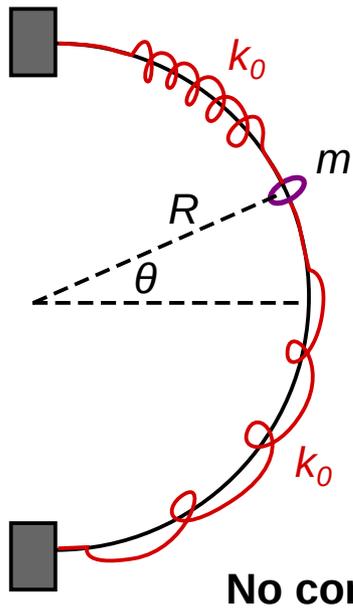
$$y(t=0) = y_0 = A \cos(n\pi) + \frac{5y_0}{2} - \frac{mg}{2k}$$

$$\longrightarrow \quad A \cos(n\pi) = -\frac{3y_0}{2} + \frac{mg}{2k}$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{A = -\frac{3y_0}{2} + \frac{mg}{2k}, \quad n = 0}$$

## Ejemplo 2

- Se tiene un anillo de **masa**  $m$  atado a **dos resortes** de **constante elástica**  $k$  y **largo natural**  $\pi R/2$  en un semi-círculo de radio  $R$  como muestra la figura. Asumiendo que la amplitud de oscilación es menor que el largo natural, encuentre la **ecuación de movimiento**.



# Ejemplo 2

- Se tiene un anillo de **masa**  $m$  atado a **dos resortes** de **constante elástica**  $k$  y **largo natural**  $\pi R/2$  en un semi-círculo de radio  $R$  como muestra la figura. Asumiendo que la amplitud de oscilación es menor que el largo natural, encuentre la **ecuación de movimiento**.

$$E = T + U_{e,1} + U_{e,2}$$

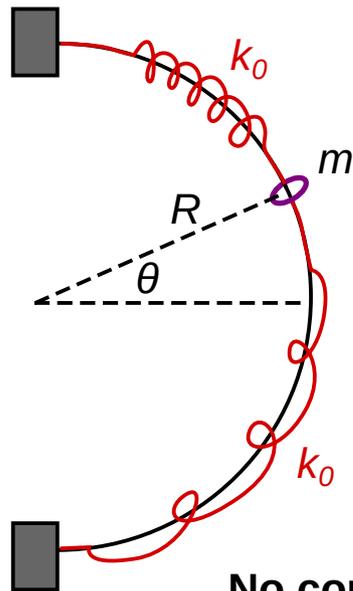
$$E = \frac{m}{2} (R\dot{\theta})^2 + 2 \times \frac{k}{2} (R\theta)^2$$

Derivamos con respecto al tiempo

La energía es constante:  $dE/dt=0$

$$0 = mR^2\ddot{\theta} + 2kR^2\theta\dot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{2k}{m}\theta = 0$$



$$v = R\dot{\theta}$$

$$\Delta s = R\theta$$

$$\omega = \sqrt{2k/m}$$

# Punto de equilibrio

- En un problema de oscilaciones, el **punto de equilibrio** es la posición donde se quedaría la partícula si no hubiera oscilación ( $A=0$ ).
- Alternativamente, podemos pensar que la **posición central** de una oscilación armónica simple.
- Podemos obtenerla del punto donde:
  - La aceleración es cero:  $\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \longrightarrow \quad x_{eq} = 0$   
 $\ddot{x} + \omega^2 x - C = 0 \quad \longrightarrow \quad x_{eq} = C/\omega^2$
  - Utilizando leyes de Newton, cuando las fuerzas se cancelan.

# Ejemplo

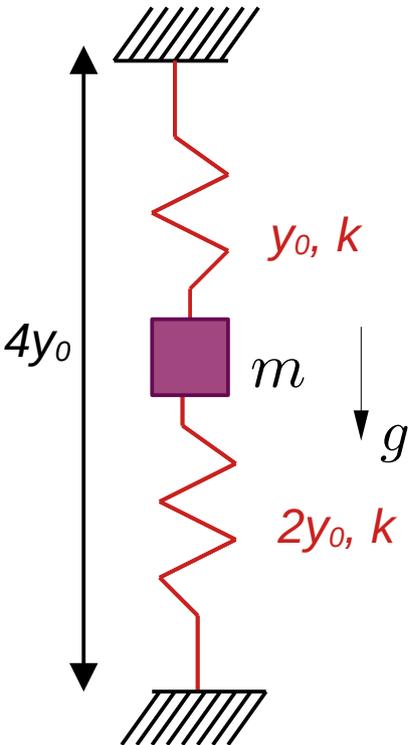
- En el ejemplo inicial:

$$\ddot{y} + g + \frac{k}{m}(2y - 5y_0) = 0$$

$$\ddot{y} = 0 \quad \longrightarrow \quad g + \frac{k}{m}(2y_{eq} - 5y_0) = 0$$

$\longrightarrow$

$$y_{eq} = -\frac{mg}{2k} + \frac{5y_0}{2}$$



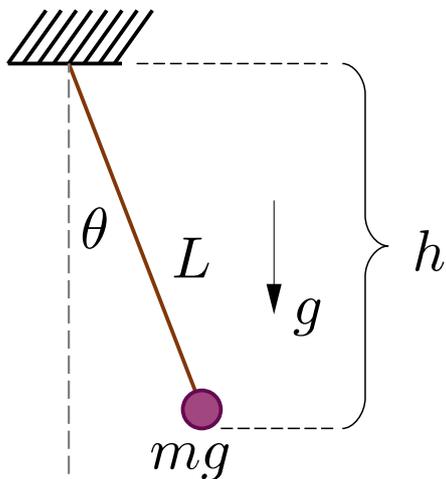
# Clase de hoy

- Ejemplo y punto de equilibrio
- **Péndulo simple y pequeñas oscilaciones**

# Oscilación de un péndulo

- El **péndulo simple** consiste de una partícula de masa  $m$  atada a una **cuerda ideal** de **largo**  $L$  y que se deja **oscilar** por efecto de la **gravedad**.
- La **ecuación de movimiento** utilizando el método de energía:

$$\begin{aligned} E &= \frac{m}{2}v^2 + mgh \\ &= \frac{m}{2}L^2\dot{\theta}^2 - mgL \cos \theta \end{aligned}$$



Derivamos con respecto  
al tiempo



$$0 = mL^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgL\dot{\theta} \sin \theta$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0$$

**\*Tarea:** Obtener ecuaciones de movimiento utilizando DCL y leyes de Newton

# Aproximación de pequeñas oscilaciones

- La oscilación de un péndulo no es posible de resolver fácilmente de manera analítica.

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0$$

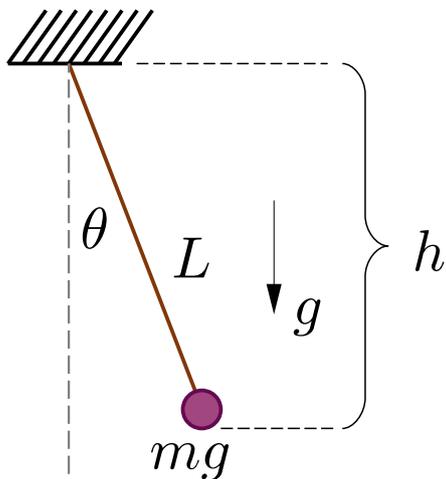
- Sin embargo, cuando los **ángulos son pequeños**:

$$\sin \theta \approx \theta$$



$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0$$

Ángulos menores que  $\sim 15^\circ$



- Que corresponde a un **oscilación armónico simple** (M.A.S.) con frecuencia

$$\omega = \sqrt{g/L}$$

- Esto se conoce como la aproximación de **pequeñas oscilaciones**.

# Ejemplo:

- Un anillo de **masa**  $m$  puede moverse **sin roce** por un alambre circular de **radio**  $R$ . Encuentre la **ecuación de movimiento** para **pequeñas oscilaciones** y el **período** de oscilación.

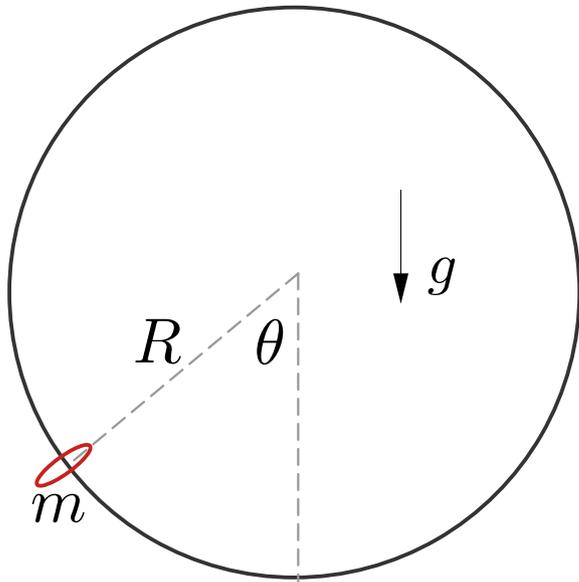
$$E = \frac{m}{2}v^2 + mgh$$

$$= \frac{m}{2}R^2\dot{\theta}^2 - mgR \cos \theta$$

Derivamos con respecto  
al tiempo

$$\longrightarrow 0 = mR^2\ddot{\theta} + mgR\dot{\theta} \sin \theta$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{R} \sin \theta = 0$$



En la aproximación de **ángulos pequeños**:

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0$$

$$\omega = \sqrt{g/R}$$

El período:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{R/g}$$

# Resumen

- Revisamos el ejemplo del **péndulo simple**.
- Definimos la aproximación de **pequeñas oscilaciones**.
- Próxima clase:
  - Momentum e impulso.