



FACULTAD DE FÍSICA
PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATÓLICA DE CHILE

Dinámica (FIS1514)

Cinemática 2D y 3D

Felipe Isaule

felipe.isaule@uc.cl

Miércoles 14 de Agosto de 2024

Resumen clase anterior

- Definimos las ecuaciones para movimiento con **aceleración constante**.

$$dv = a_0 dt \quad \longrightarrow \quad v = v_0 + a_0 t$$

$$v dv = a_0 ds \quad \longrightarrow \quad \frac{v^2}{2} = \frac{v_0^2}{2} + a_0(s - s_0)$$

$$ds = v dt \quad \longrightarrow \quad s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}a_0 t^2$$

- Revisamos en detalle la **integración** de ecuaciones en cinemática.

Clase 4: Cinemática 2D y 3D

- Cinemática 2D
- Coordenadas rectangulares
- Lanzamiento de proyectil

- Bibliografía recomendada:
 - Meriam (2.3, 2.4).
 - Hibbeler (12.4, 12.5, 12.6).

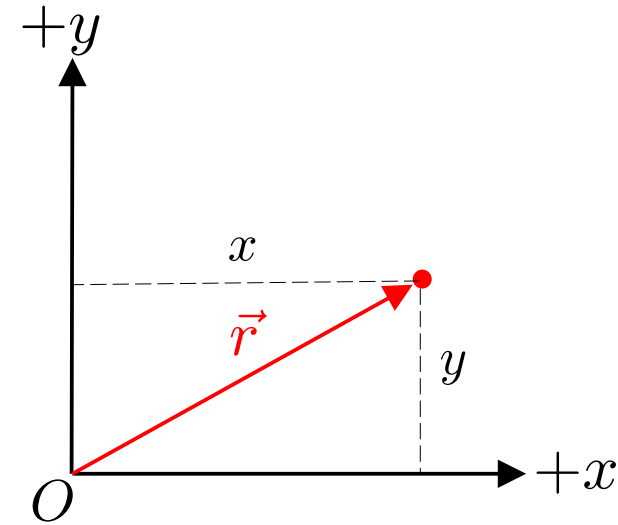
Clase 4: Cinemática 2D y 3D

- **Cinemática 2D**
- Coordenadas rectangulares
- Lanzamiento de proyectil

Cinemática 2D

- Nos referimos como **movimiento plano curvilíneo** a un movimiento confinado a un plano (**dos dimensiones**).
- En **coordenadas rectangulares**, el vector **posición** está dado por

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$$



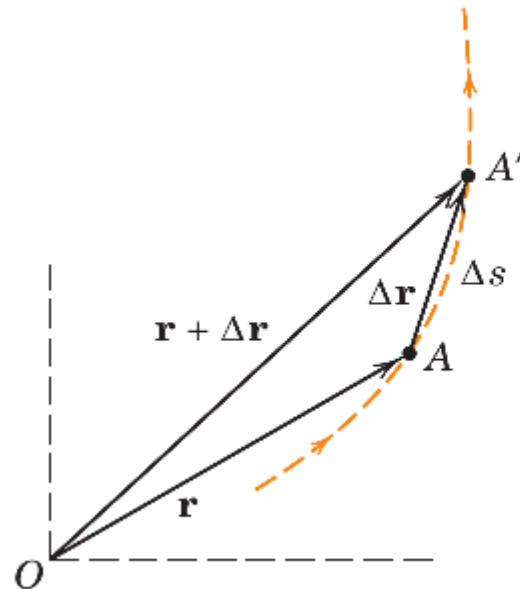
Cinemática 2D

- El vector desplazamiento $\Delta\vec{r}$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

- Si el movimiento es rectilíneo, la distancia recorrida:

$$\Delta s = \|\Delta\vec{r}\|$$



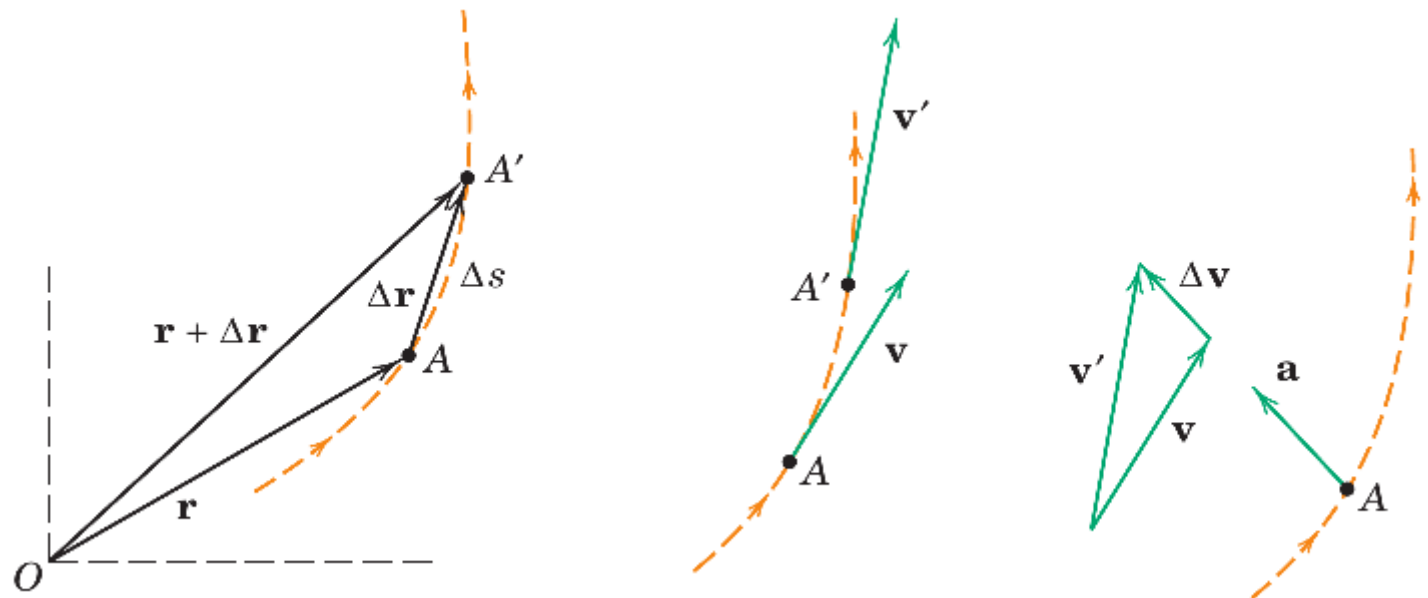
Cinemática 2D

- La **velocidad promedio** \vec{v} , **velocidad instantánea** \vec{v} , y **rapidez** v ,

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}, \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} \quad v = \|\vec{v}\| = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

- La **aceleración promedio** \vec{a} y **aceleración instantánea** \vec{a} ,

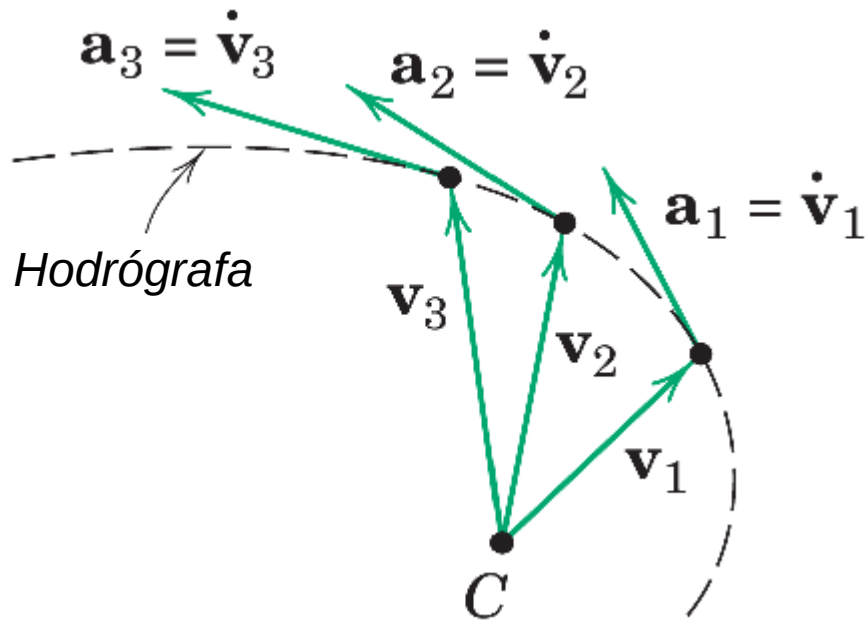
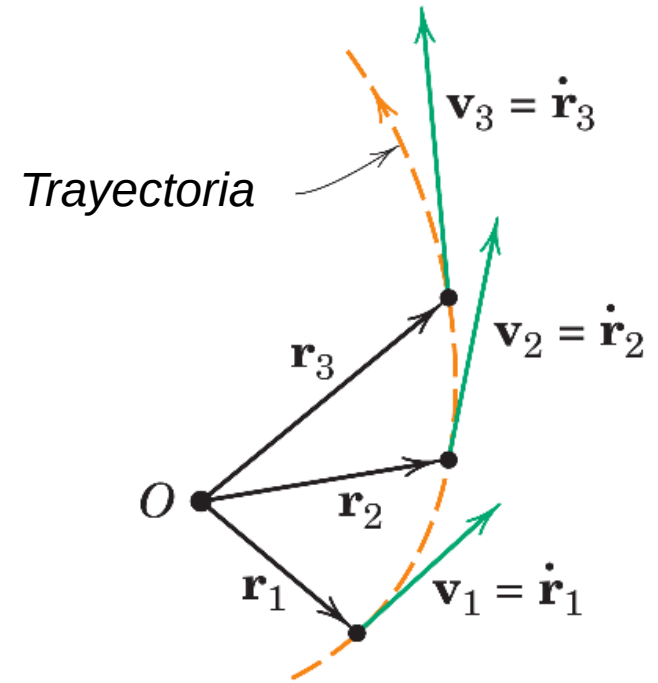
$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}, \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$$



Visualización del movimiento

- La velocidad es **tangente** a la posición

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$



- La aceleración es **tangente** a la velocidad

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Clase 4: Cinemática 2D y 3D

- Cinemática 2D
- **Coordenadas rectangulares**
- Lanzamiento de proyectil

Coordenadas rectangulares

- De manera general, la posición de una partícula en tres dimensiones

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

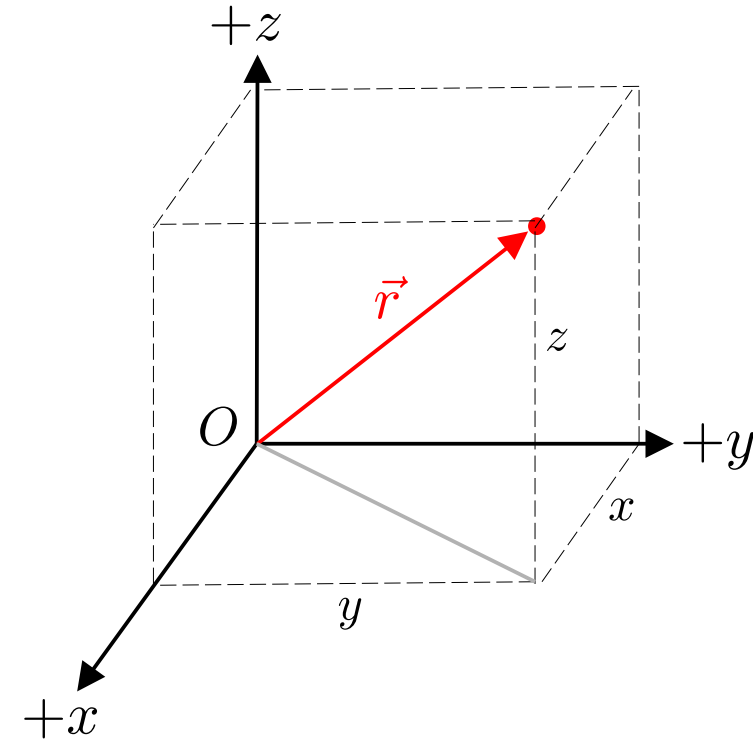
- Entonces, la velocidad y aceleración:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k},$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k}.$$

- Si el movimiento está confinado en un plano (dos dimensiones):

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$$



Coordenadas rectangulares

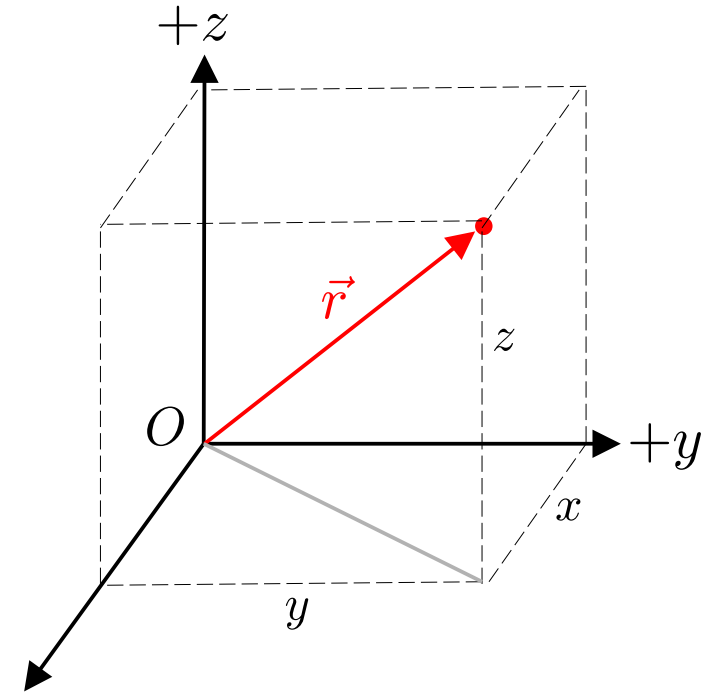
- Los **componentes** de la velocidad y aceleración

$$v_x = \dot{x} \quad v_y = \dot{y} \quad v_z = \dot{z}$$

$$a_x = \ddot{x} \quad a_y = \ddot{y} \quad a_z = \ddot{z}$$

- Las magnitudes de la velocidad (**rapidez**) y aceleración

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}, \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$



Ejemplo 1

La **posición** de una partícula en un plano está dada por

$$\vec{r} = At^2\hat{i} + Bt^{3/2}\hat{j} + C\hat{j}$$

donde A , B , y C son constantes conocidas. Encuentre la **rapidez** de la partícula en función del **tiempo** t .

Ejemplo 1

La **posición** de una partícula en un plano está dada por

$$\vec{r} = At^2\hat{i} + Bt^{3/2}\hat{j} + C\hat{j}$$

donde A , B , y C son constantes conocidas. Encuentre la **rapidez** de la partícula en función del **tiempo** t .

La velocidad:

$$\vec{v} = \underbrace{2At}_{v_x}\hat{i} + \underbrace{\frac{3}{2}Bt^{1/2}}_{v_y}\hat{j}$$

La rapidez:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \longrightarrow v = \sqrt{4A^2t^2 + \frac{9B^2t}{4}}$$

Ejemplo 2

- Una partícula se mueve en un **plano** con una **aceleración**:

$$\vec{a} = 12t^2\hat{i} - 4t^3\hat{j},$$

donde el tiempo está en segundos. Si la partícula tiene una **velocidad inicial** $\vec{v}_0 = 2\hat{i}$ en m/s, encuentre la **velocidad** y **rapidez** en función del **tiempo**.

Ejemplo 2

- Una partícula se mueve en un **plano** con una **aceleración**:

$$\vec{a} = 12t^2\hat{i} - 4t^3\hat{j},$$

- donde el tiempo está en segundos. Si la partícula tiene una **velocidad inicial** $\vec{v}_0 = 2\hat{i}$ en m/s, encuentre la **velocidad** y **rapidez** en función del **tiempo**.

Simplemente separamos la aceleración en sus dos componentes:

$$a_x = 12t^2 \quad a_y = -4t^3$$

La velocidad en x:

$$v_x = v_{x,0} + \int_0^t a_x dt = 2 + 4t^3$$

La velocidad en y:

$$v_y = v_{y,0} + \int_0^t a_y dt = -t^4$$

Entonces la velocidad:

$$\vec{v} = (2 + 4t^3)\hat{i} - t^4\hat{j}$$

La rapidez:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(2 + 4t^3)^2 + t^8}$$

$$v = \sqrt{4 + 16t^3 + 16t^6 + t^8}$$

Ejemplo 2

- Una partícula se mueve en un **plano** con una **aceleración**:

$$\vec{a} = 12t^2\hat{i} - 4t^3\hat{j},$$

- donde el tiempo está en segundos. Si la partícula tiene una **velocidad inicial** $\vec{v}_0 = 2\hat{i}$ en m/s, encuentre la **velocidad** y **rapidez** en función del **tiempo**.

Simplemente separamos la aceleración en sus dos componentes:

$$a_x = 12t^2 \quad a_y = -4t^3$$

La velocidad en x:

$$v_x = v_{x,0} + \int_0^t a_x dt = 2 + 4t^3$$

La velocidad en y:

$$v_y = v_{y,0} + \int_0^t a_y dt = -t^4$$

Entonces la velocidad:

$$\vec{v} = (2 + 4t^3)\hat{i} - t^4\hat{j}$$

La rapidez:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(2 + 4t^3)^2 + t^8}$$

$$v = \sqrt{4 + 8t^3 + 16t^6 + t^8}$$

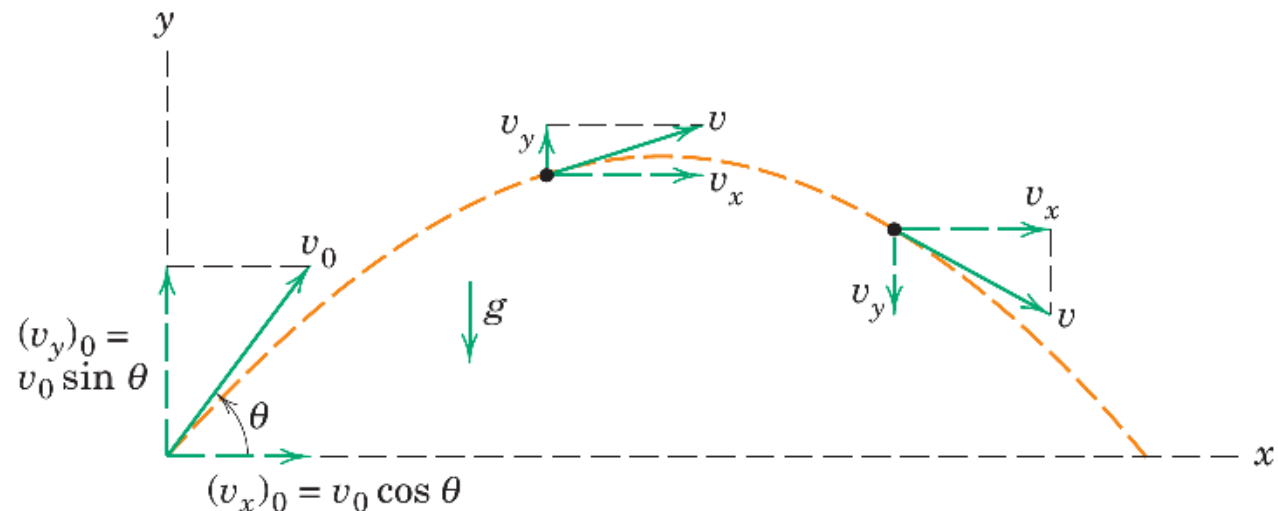
¿Qué unidades tiene cada número en las respuestas?

Clase 4: Cinemática 2D y 3D

- Cinemática 2D
- Coordenadas rectangulares
- **Lanzamiento de proyectil**

Movimiento de un proyectil

- Una **partícula** es lanzada con un **ángulo** θ respecto a la superficie con una **rapidez inicial** v_0 . Si la partícula está sujeta a la gravedad,
 - ¿Cuál es su **trayectoria** y **velocidad**?
 - ¿A qué **altura** llega la partícula? Asuma que la partícula es lanzada desde la **superficie**.
 - ¿Qué **distancia horizontal** recorre la partícula al tocar nuevamente la superficie?



Movimiento de un proyectil

- Una **partícula** es lanzada con un **ángulo** θ respecto a la superficie con una **rapidez inicial** v_0 . Si la partícula está sujeta a la gravedad,
 - ¿Cuál es su **trayectoria** y **velocidad**?

La aceleración es nula en el eje x , y constante hacia la superficie en el eje y :

$$a_x = 0, \quad a_y = -g$$

La velocidad es un movimiento con aceleración constante en cada componente:

$$\begin{aligned} \longrightarrow & \quad v_x = v_{x,0} \\ \longrightarrow & \quad v_y = v_{y,0} - gt \end{aligned}$$

En este ejemplo:

$$v_{x,0} = v_0 \cos \theta$$

$$v_{y,0} = v_0 \sin \theta$$

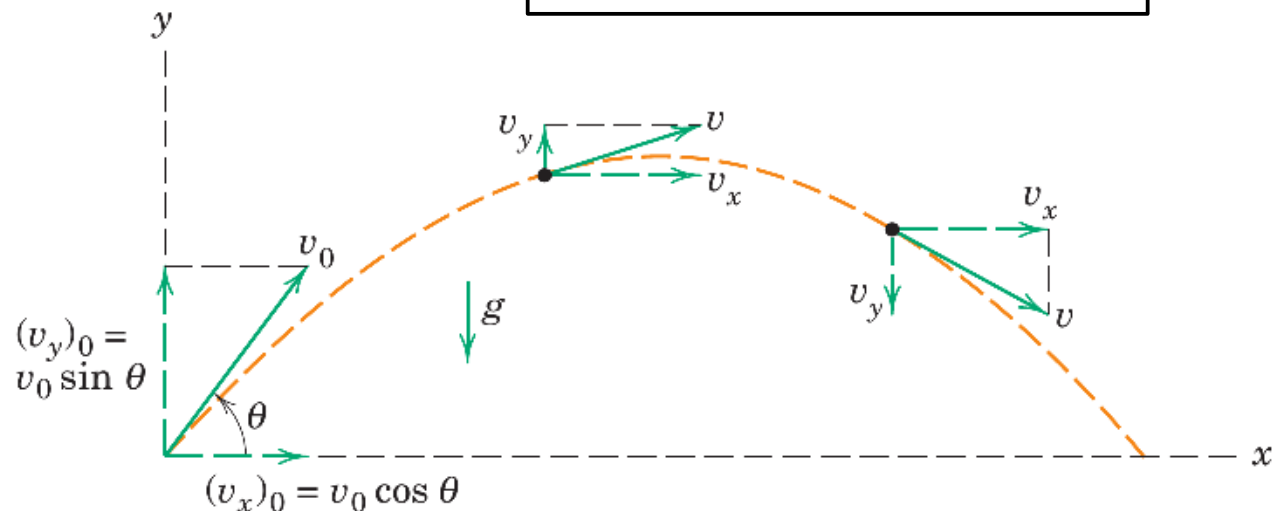
$$x_0 = y_0 = 0$$

Mientras que la posición:

$$\begin{aligned} \longrightarrow & \quad x = x_0 + v_{x,0} t \\ \longrightarrow & \quad y = y_0 + v_{y,0} t - gt^2/2 \end{aligned}$$

También podemos escribir:

$$\longrightarrow \quad v_y^2 = v_0^2 - 2g(y - y_0)$$



Movimiento de un proyectil

- Una **partícula** es lanzada con un **ángulo** θ respecto a la superficie con una **rapidez inicial** v_0 . Si la partícula está sujeta a la gravedad,
 - ¿A qué **altura** llega la partícula? Asuma que la partícula es lanzada desde la **superficie**.

La **cima** se alcanza cuando la **velocidad vertical** es cero. La aceleración vertical sigue siendo $-g$.

La altura alcanzada es:

$$v_y^2 = v_{y,0}^2 - 2g(y - y_0)$$

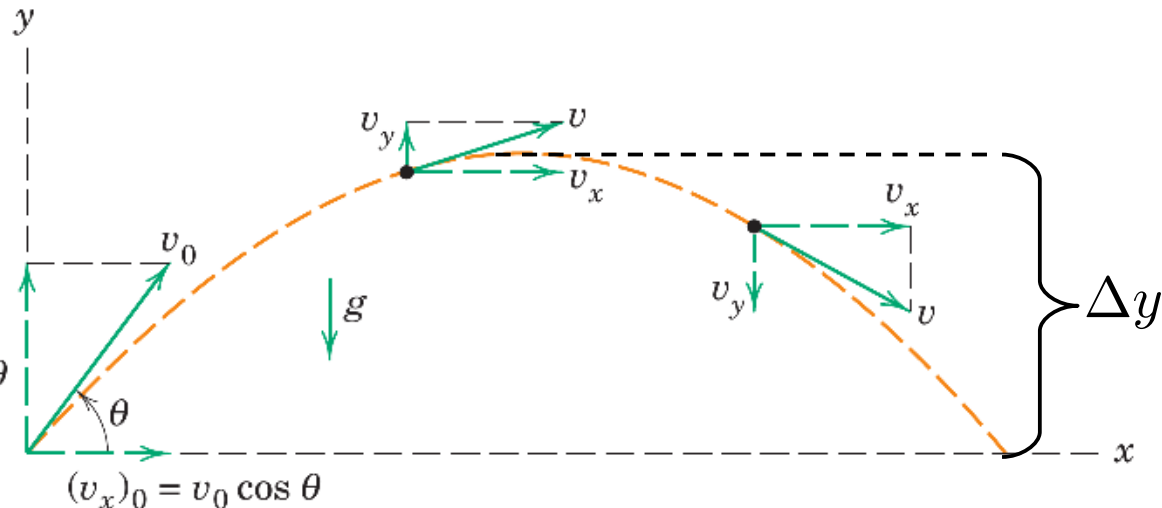
→

$$\Delta y = \frac{v_{y,0}^2}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$$



$$y_0 = 0$$

$v_y=0$ en el punto de **altura máxima**



- Si $\theta=0$, entonces $\Delta y=0$. La partícula se mantiene en el suelo.
- Por otro lado, la altura es máxima para $\theta=90^\circ$.

Movimiento de un proyectil

- Una **partícula** es lanzada con un **ángulo** θ respecto a la superficie con una **rapidez inicial** v_0 . Si la partícula está sujeta a la gravedad,
 - ¿Qué **distancia horizontal** recorre la partícula al tocar nuevamente la superficie?

Primero obtenemos el tiempo que toma volver a tocar el suelo:

$$y = y_0 + v_{y,0} t - gt^2/2$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$y_0 = 0$$

$y=0$ cuando vuelve a tocar el suelo

$$\rightarrow \Delta t = \frac{2v_{y,0}}{g} = \frac{2v_0 \sin \theta}{g}$$

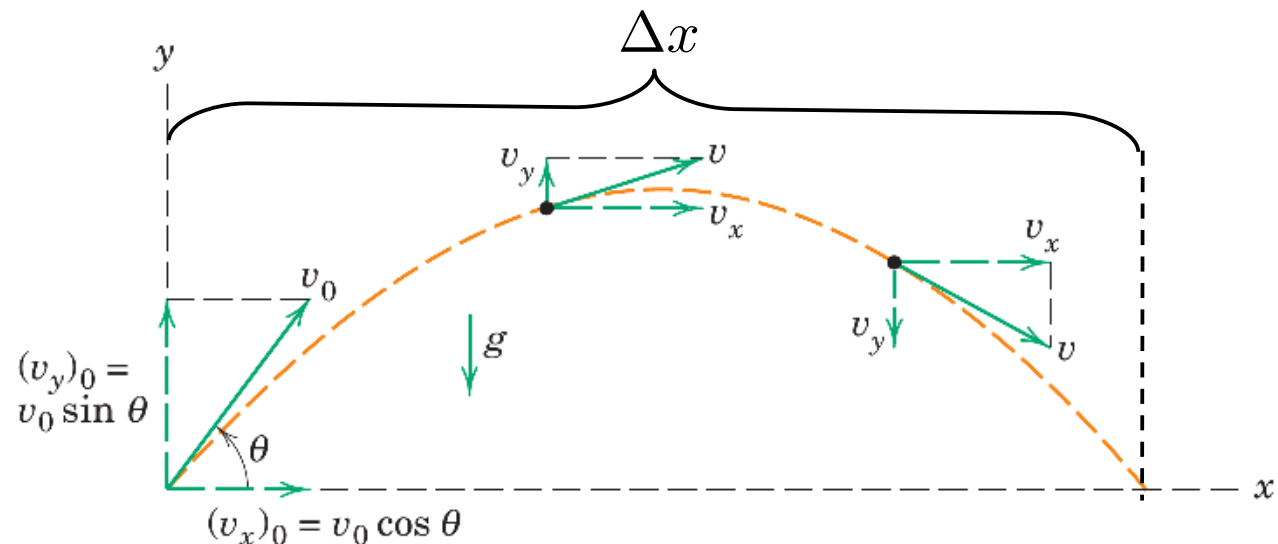
* Si $\theta=90^\circ$, entonces $\Delta x=0$. La partícula es lanzada verticalmente.

Ahora utilizamos la trayectoria horizontal:

$$x = x_0 + v_{x,0} t$$

\rightarrow

$$\Delta x = v_{x,0} \Delta t = \frac{2v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g}$$



Resumen

- Introducimos la cinemática en dos dimensiones (**movimiento plano curvilíneo**).
- Hemos revisado el problema del **lanzamiento de un proyectil**.
- Próxima clase:
 - Lanzamiento de proyectil (continuación)
 - Coordenadas polares