FACULTAD DE FÍSICA
PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATÓLICA DE CHILE

Dinámica (FIS1514)

Lanzamiento de proyectil y coordenadas polares

Felipe Isaule

felipe.isaule@uc.cl

Lunes 19 de Agosto de 2024

Resumen clase anterior

- Comenzamos a estudiar cinemática en **dos dimensiones**.
- Revisamos el **lanzamiento de un proyectil**.

Clase 5: Proyectiles y coordenadas polares

- Lanzamiento de proyectil.
- Coordenadas polares

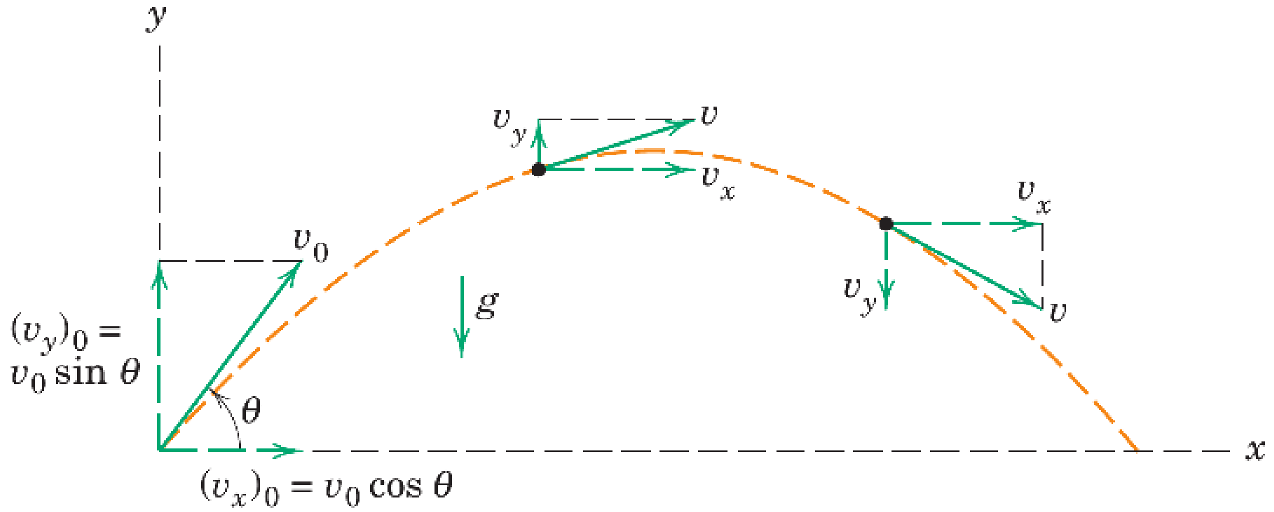
- Bibliografía recomendada:
  - Meriam (2.4, 2.6).
  - Hibbeler (12.6, 12.8).

Clase 5: Proyectiles y coordenadas polares

- **Lanzamiento de proyectil.**
- Coordenadas polares

Movimiento de un proyectil

- Una **partícula** es lanzada con un **ángulo** θ respecto a la superficie con una **rapidez inicial** v_0. Si la partícula está sujeta a la gravedad,
  - ¿Cuál es su **trayectoria** y **velocidad**?
  - ¿A qué **altura** llega la partícula? Asuma que la partícula es lanzada desde la **superficie**.
  - ¿Qué **distancia horizontal** recorre la partícula al tocar nuevamente la superficie?



Lanzamiento de un proyectil

- **Trayectoria** y **velocidad**:

La aceleración es nula en el eje *x*, y constante hacia la superficie en el eje *y*:

$$a_x = 0\,, \quad a_y = -g$$

La velocidad es un movimiento con aceleración constante en cada componente:

$$\longrightarrow \quad v_x = v_{x,0}$$

$$\longrightarrow \quad v_y = v_{y,0} - gt$$

Mientras que la posición:

$$\longrightarrow \quad x = x_0 + v_{x,0}\, t$$

$$\longrightarrow \quad y = y_0 + v_{y,0}\, t - gt^2/2$$

También podemos escribir:

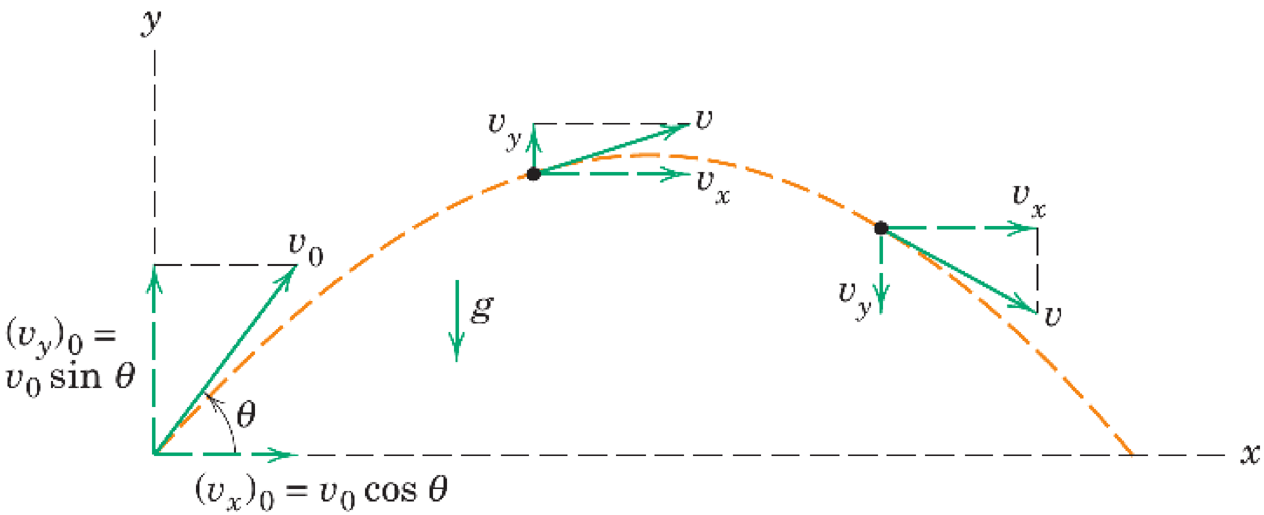
$$\longrightarrow \quad \boxed{v_y^2 = v_0^2 - 2g(y - y_0)}$$

En este ejemplo:

$$v_{x,0} = v_0 \cos\theta$$

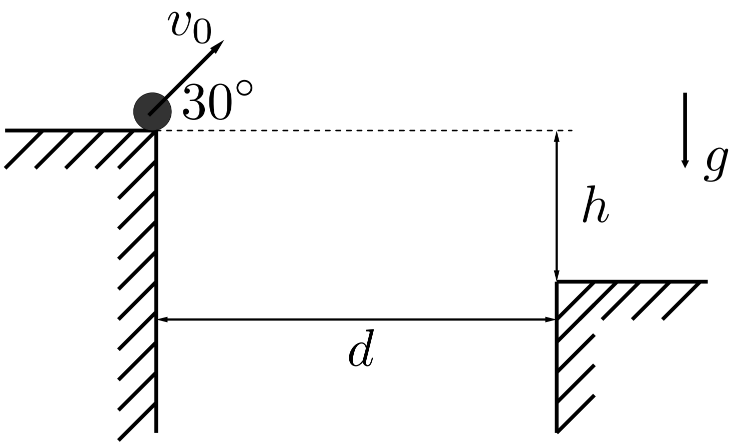
$$v_{y,0} = v_0 \sin\theta$$

$$x_0 = y_0 = 0$$



Ejemplo

- Una pelota es lanzada desde la superficie izquierda con una **rapidez** v_0 y un **ángulo** de 30° con respecto a la horizontal como muestra la figura. Encuentre la **rapidez mínima** para que la pelota llegue a la superficie derecha.



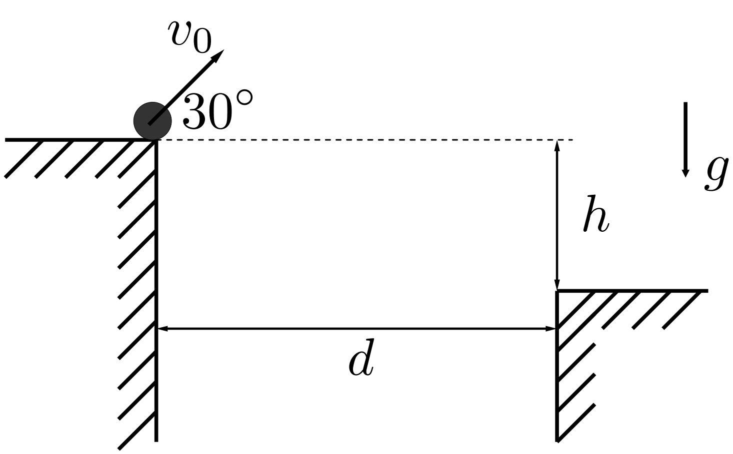
Ejemplo

- Una pelota es lanzada desde la superficie izquierda con una **rapidez** v_0 y un **ángulo** de 30° con respecto a la horizontal como muestra la figura. Encuentre la **rapidez mínima** para que la pelota llegue a la superficie derecha.

Utilizamos las ecuaciones del lanzamiento de un proyectil:

$$\underset{d}{x} = \overset{0}{\cancel{x_0}} + \underset{v_0 \cos 30^\circ = v0\frac{\sqrt{3}}{2}}{v_{x,0}}\, t^*$$

$$\underset{-h}{y} = \overset{0}{\cancel{y_0}} + \underset{v_0 \sin 30^\circ = \frac{v_0}{2}}{v_{y,0}}\, t^* - g t^{*2}/2$$



Tenemos dos incógnitas, v_0 y t . Primero despejamos el tiempo.

$$t^* = \frac{2d}{v_0\sqrt{3}}$$

Ahora remplazamos *t* en la ecuación para *y*, y obtenemos la rapidez mínima:

$$\boxed{v_0 = d\sqrt{\frac{2g}{3(h + d/\sqrt{3})}}}$$

Clase 5: Proyectiles y coordenadas polares

- Lanzamiento de proyectil.
- **Coordenadas polares**

Coordenadas polares

- Si un movimiento en **dos dimensiones** tiene una restricción a la **distancia radial**, es conveniente utilizar **coordenades polares**.

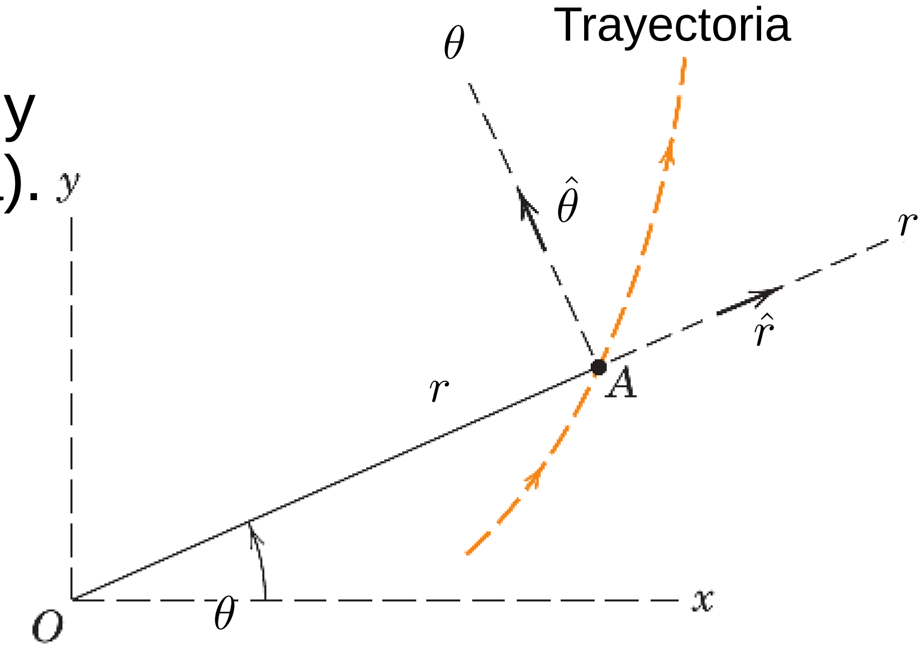
- Las **coordenadas polares** corresponden a:
  - r : Distancia del origen a la partícula.
  - θ : Ángulo desde un eje a elección.

    (Usualmente medido en radianes)

- Los **vectores unitarios** asociados $\hat{r}$ y $\hat{\theta}$ se mueven con el vector (partícula).

- La **posición** viene dada por

$$\boxed{\vec{r} = r\,\hat{r}}$$



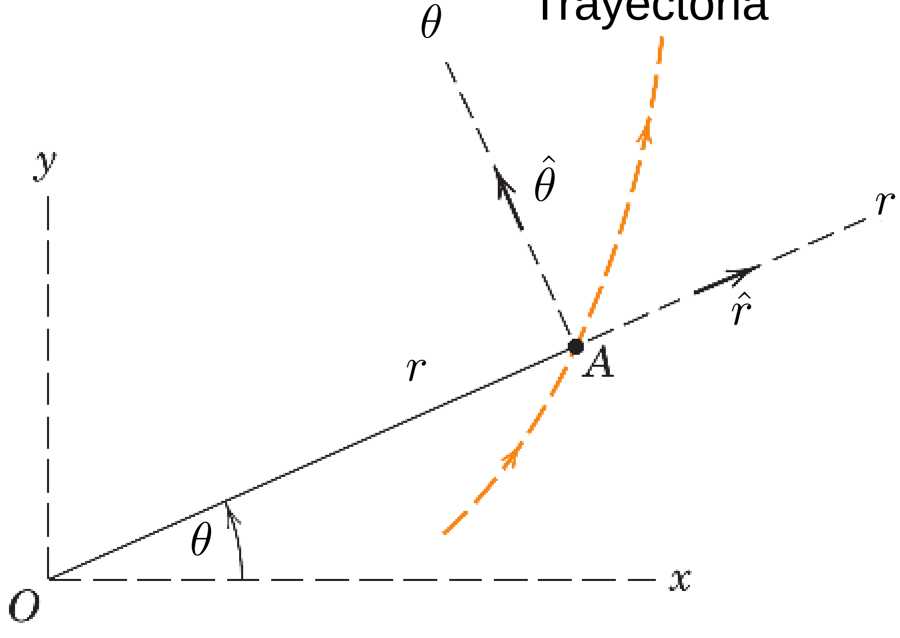
Coordenas polares y rectangulares

- Podemos facilmente convertir cantidades entre sistemas de coordenadas.

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta\,.$$

$$\vec{r} = r\hat{r} = x\hat{i} + y\hat{j} \quad \longrightarrow$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2}\,, \quad \theta = \arctan(y/x)\,,$$



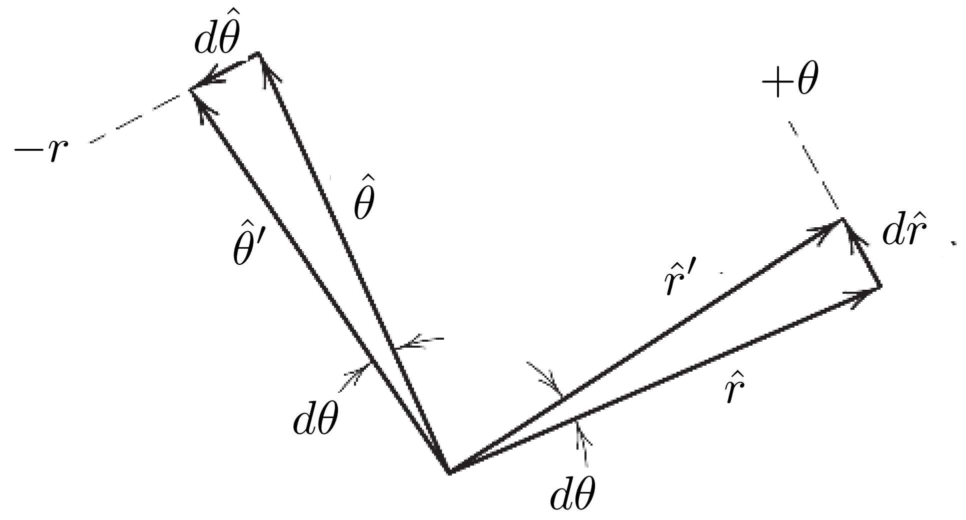
Coordenadas polares: Vector unitarios

- Las derivadas de los vectores unitarios con respecto a θ :

$$\frac{d\hat{r}}{d\theta} = \hat{\theta}\,, \qquad \frac{d\hat{\theta}}{d\theta} = -\hat{r}\,.$$

- Por tanto, sus derivadas temporales:

$$\boxed{\dot{\hat{r}} = \frac{d\hat{r}}{dt} = \dot{\theta}\,\hat{\theta}\,,} \qquad \boxed{\dot{\hat{\theta}} = \frac{d\hat{\theta}}{dt} = -\dot{\theta}\,\hat{r}\,.}$$



Coordenadas polares: Velocidad

- El vector **velocidad** en coordenadas polares:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}(r\hat{r}) = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\hat{r}} \qquad \longrightarrow \qquad \boxed{\vec{v} = \dot{r}\,\hat{r} + r\,\dot{\theta}\,\hat{\theta}}$$

- Donde sus **componentes**

$$v_r = \dot{r} \qquad\qquad v_\theta = r\,\dot{\theta}$$

- La **rapidez**

$$\boxed{v = \|\vec{v}\| = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}}$$

Coordenadas polares: Aceleración

- El vector **aceleración** en coordenadas polares:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt}\left(\dot{r}\,\hat{r} + r\,\dot{\theta}\,\hat{\theta}\right) \quad \longrightarrow \quad \boxed{\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\hat{\theta}}$$

- Donde sus **componentes**

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \qquad a_\theta = r\,\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

- Su **magnitud**

$$\boxed{a = \|\vec{a}\| = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2}}$$

- También podemos escribir

$$a_\theta = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right)$$

Movimiento circular

- Un movimiento es circular cuando r es **constante**.
- La velocidad y aceleración se simplifican

$$\dot{r} = 0 \qquad \longrightarrow \qquad \boxed{\begin{aligned} v_r &= 0\,, & v_\theta &= r\dot{\theta}\,. \\ a_r &= -r\dot{\theta}^2\,, & a_\theta &= r\ddot{\theta}\,. \end{aligned}}$$

- La **velocidad angular** corresponde a

$$\boxed{\omega = \dot{\theta}}$$

- También llamamos a_r la **aceleración centrípeta** y $\dot{\omega} = \ddot{\theta}$ la **aceleración angular**.
- El **camino recorrido**:

$$\Delta s = r\Delta\theta$$

Ejemplo

- Una partícula se mueve con **rapidez constante** v_0 a lo **largo de una espiral** $r(\theta)=Ae^{k\theta}$, donde A y k son constantes. Encuentre:
  - Vector **velocidad** en función de θ.
  - Vector **aceleración** en función de θ.

Ejemplo

- Una partícula se mueve con **rapidez constante** v_0 a lo **largo de una espiral** $r(\theta)=Ae^{k\theta}$, donde A y k son constantes. Encuentre:
  - Vector **velocidad** en función de θ.

$$v_r = \dot{r} = Ak\dot{\theta}e^{k\theta}$$

$$v_\theta = r\dot{\theta} = A\dot{\theta}e^{k\theta}$$

$$\longrightarrow \quad v_0^2 = v_r^2 + v_\phi^2 = A^2\dot{\theta}^2(k^2+1)e^{2k\theta}$$

$$\dot{\theta} = \frac{v_0}{A\sqrt{k^2+1}}e^{-k\theta}$$

$$\longrightarrow \boxed{v_r = \frac{k\,v_0}{\sqrt{k^2+1}} \qquad v_\theta = \frac{v_0}{\sqrt{k^2+1}}}$$

*La velocidad no depende de θ.

Ejemplo

- Una partícula se mueve con **rapidez constante** v_0 a lo **largo de una espiral** $r(\theta)=Ae^{k\theta}$, donde A y k son constantes. Encuentre:
  - Vector **aceleración** en función de θ.

$$\dot{r} = v_r = \frac{k\,v_0}{\sqrt{k^2+1}} \quad \longrightarrow \quad \ddot{r} = 0$$

$$\dot{\theta} = \frac{v_0}{A\sqrt{k^2+1}}e^{-k\theta} \quad \longrightarrow \quad \dot{\theta}^2 = \frac{v_0^2}{A^2(k^2+1)}e^{-2k\theta}\,, \quad \ddot{\theta} = \frac{-k\,v_0^2}{A^2(k^2+1)}e^{-2k\theta}$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \quad \longrightarrow \quad \boxed{a_r = -\frac{v_0^2}{A(k^2+1)}e^{-k\theta}}$$

$$a_\theta = r\,\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \quad \longrightarrow \quad \boxed{a_\theta = \frac{k\,v_0^2}{A(k^2+1)}e^{-k\theta}}$$

Ejemplo

- Una partícula se mueve con **rapidez constante** v_0 a lo **largo de una espiral** $r(\theta)=Ae^{k\theta}$, donde A y k son constantes. Encuentre:
  - Vector **velocidad** en función de θ.
  - Vector **aceleración** en función de θ.
  - Tarea: La **velocidad** y **aceleración** en función del **tiempo**. Asuma que $\theta(t=0)=0$.

Resumen

- Revisamos ejemplos de **lanzamiento de un proyectil**.
- Hemos definido el sistema de **coordenadas polares** para movimientos en un plano.
- Próxima clase:
  - Coordenadas cilíndricas.