FACULTAD DE FÍSICA
PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATÓLICA DE CHILE

Dinámica (FIS1514)

Coordenadas cilíndricas

Felipe Isaule

felipe.isaule@uc.cl

Miércoles 21 de Agosto de 2024

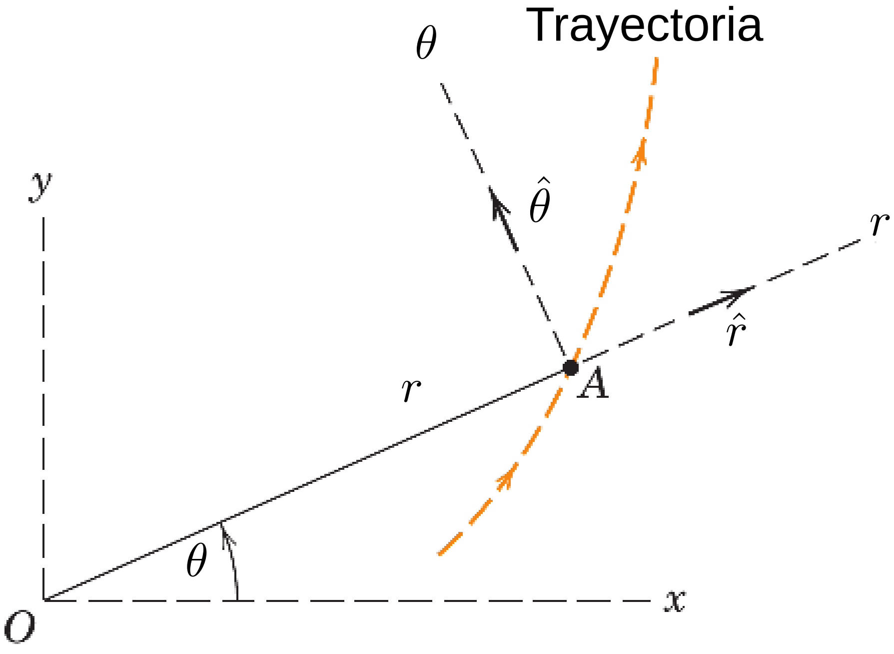
Resumen clase anterior

- Terminamos de revisar el **lanzamiento de un proyectil**.
- Introducimos las **coordenadas polares**.

$$\vec{r} = r\,\hat{r}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\,\hat{r} + r\,\dot{\theta}\,\hat{\theta}$$

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\hat{\theta}$$

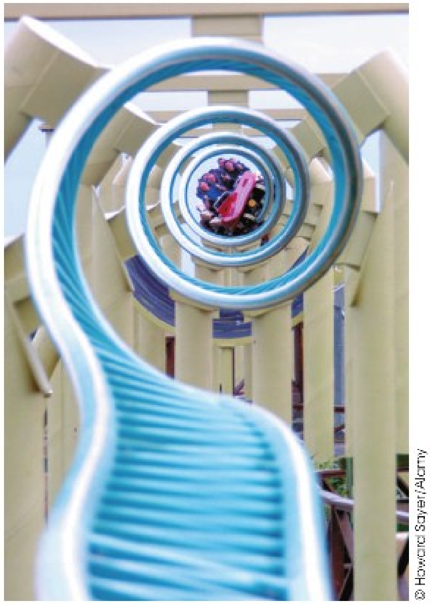


Clase 6: Coordenadas cilíndricas

- Coordenadas cilíndricas

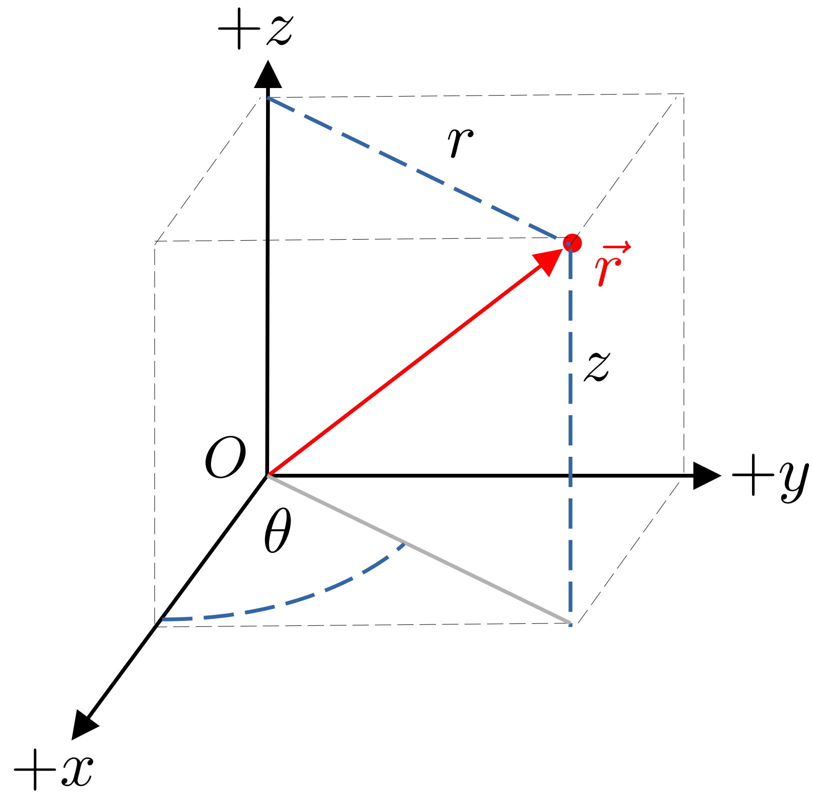
- Bibliografía recomendada:
  - Meriam (2.7).
  - Hibbeler (12.8).

Coordenadas cilíndricas



- Si un movimiento en **tres dimensiones** tiene una restricción a la **distancia radial desde un eje**, es conveniente utilizar **coordenades cilíndricas**.
- Las **coordenadas cilíndricas** corresponden a:
  - r : Distancia desde el eje a la partícula.
  - θ : Ángulo desde un eje a elección.
  - z : "Altura".
- La **posición** viene dada por

$$\boxed{\vec{r} = r\,\hat{r} + z\hat{k}}$$



Coordenadas cilíndricas: Velocidad

- El vector **velocidad** en coordenadas cilíndricas:

$$\boxed{\vec{v} = \dot{r}\,\hat{r} + r\,\dot{\theta}\,\hat{\theta} + \dot{z}\hat{k}}$$

- Donde sus **componentes**

$$v_r = \dot{r} \qquad v_\theta = r\,\dot{\theta} \qquad v_z = \dot{z}$$

- La **rapidez**

$$\boxed{v = \|\vec{v}\| = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2 + v_z^2}}$$

Coordenadas cilíndricas: Aceleración

- El vector **aceleración** en coordenadas cilíndricas:

$$\boxed{\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\hat{\theta} + \ddot{z}\hat{k}}$$

- Donde sus **componentes**

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \qquad a_\theta = r\,\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \qquad a_z = \ddot{z}$$

- Su **magnitud**

$$\boxed{a = \|\vec{a}\| = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2 + a_z^2}}$$

Coordenas cilíndricas y cartesianas

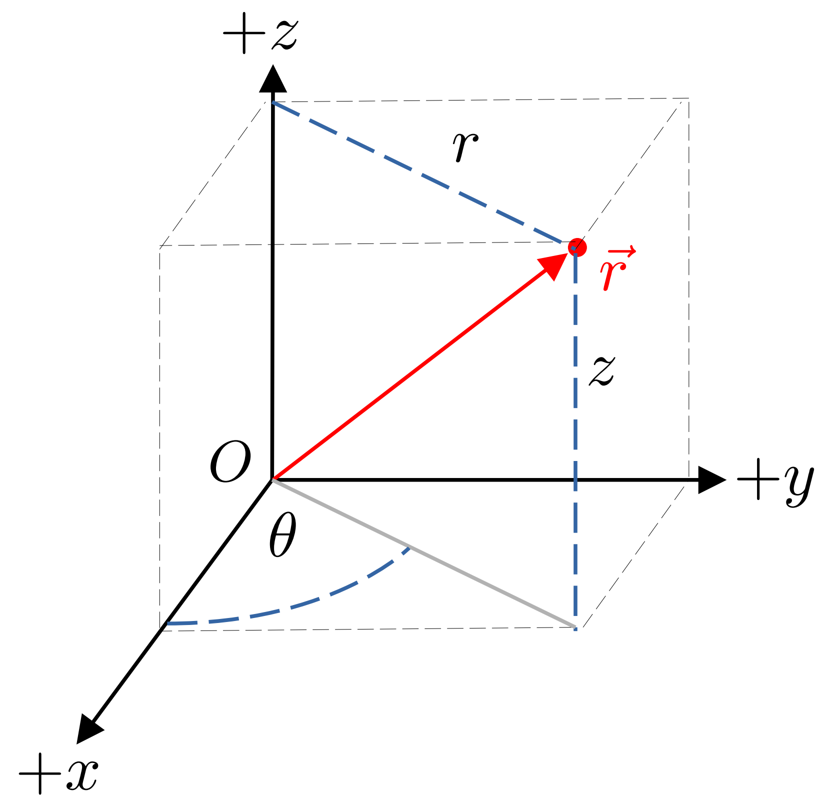
- Podemos facilmente convertir cantidades entre sistemas de coordenadas.

$$\vec{r} = r\hat{r} + z\hat{k} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta\,.$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\,, \quad \theta = \arctan(y/x)\,,$$

$$z = z$$



Ejemplo 1

- Una partícula presenta un movimiento descrito en **coordenadas cilíndricas** dado por

$$r(t) = R_0, \quad \theta(t) = \omega_0\, t, \quad z(t) = A\, t,$$

donde R_0, ω_0, A y son **constantes** conocidas. Encuentre la **velocidad** y **aceleración**.

Ejemplo 1

- Una partícula presenta un movimiento descrito en **coordenadas cilíndricas** dado por

$$r(t) = R_0, \quad \theta(t) = \omega_0\, t, \quad z(t) = A\, t,$$

donde R_0, ω_0, A y son **constantes** conocidas. Encuentre la **velocidad** y **aceleración**.

Primero calculamos todas las derivadas necesarias:

$$\dot{r} = \ddot{r} = 0$$

$$\dot{\theta} = \omega_0, \quad \ddot{\theta} = 0$$

$$\dot{z} = A, \quad \ddot{z} = 0$$

Entonces la velocidad:

$$\vec{v} = \dot{r}\,\hat{r} + r\,\dot{\theta}\,\hat{\theta} + \dot{z}\hat{k} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\vec{v} = R_0\omega_0\,\hat{\theta} + A\hat{k}}$$

La aceleración:

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\hat{\theta} + \ddot{z}\hat{k}$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\vec{a} = -R_0\omega_0^2\hat{r}}$$

Ejemplo 1

- Una partícula presenta un movimiento descrito en **coordenadas cilíndricas** dado por

$$r(t) = R_0, \quad \theta(t) = \omega_0\, t, \quad z(t) = A\, t,$$

donde R_0, ω_0, A y son **constantes** conocidas. Encuentre la **velocidad** y **aceleración**.

Primero calculamos todas las derivadas necesarias:

$$\dot{r} = \ddot{r} = 0$$

$$\dot{\theta} = \omega_0, \quad \ddot{\theta} = 0$$

$$\dot{z} = A, \quad \ddot{z} = 0$$

Entonces la velocidad:

$$\vec{v} = \dot{r}\,\hat{r} + r\,\dot{\theta}\,\hat{\theta} + \dot{z}\hat{k} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\vec{v} = R_0\omega_0\,\hat{\theta} + A\hat{k}}$$

La aceleración:

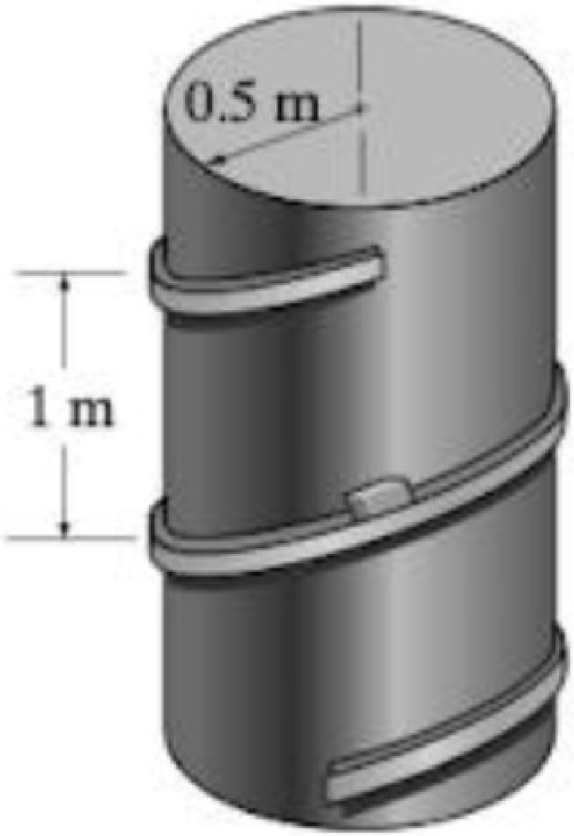
$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\hat{\theta} + \ddot{z}\hat{k}$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\vec{a} = -R_0\omega_0^2\hat{r}}$$

- Tarea: Encontrar el vector desplazamiento en un intervalo de tiempo $\Delta t = 2\pi/\omega_0$.

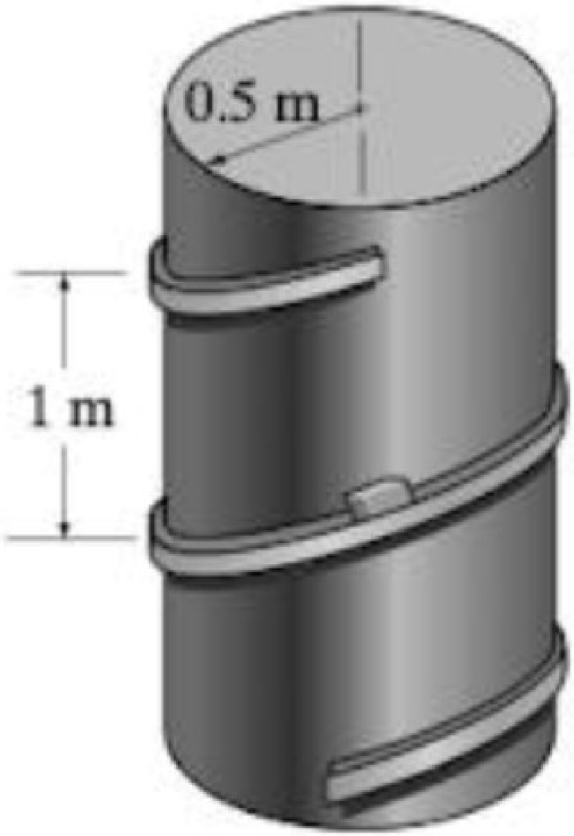
Ejemplo 2

- Una caja se desliza por una **rampa helicoidal** que está definida por: $\boldsymbol{r = 0.5\ \mathrm{m}}$, $\boldsymbol{\theta = 0.5t^3\ \mathrm{rad}}$ y $\boldsymbol{z = 2 - 0{,}2t^2\ \mathrm{m}}$, donde t se mide en segundos. Determine la **aceleración** de la caja en el instante en que $\boldsymbol{t = 2\mathrm{s}}$.



Ejemplo 2

- Una caja se desliza por una **rampa helicoidal** que está definida por: $\boldsymbol{r}$**=0.5 m**, $\boldsymbol{\theta}$**=0.5**$\boldsymbol{t^3}$ **rad** y $\boldsymbol{z}$**=2−0.2**$\boldsymbol{t^2}$ **m**, donde *t* se mide en segundos. Determine la **aceleración** de la caja en el instante en que ***t* = 2s**.



Del enunciado:

$$r = 5\text{m} \quad \rightarrow \quad \dot{r} = \ddot{r} = 0$$

$$\theta = 0.5t^3\text{rad} \quad \rightarrow \quad \dot{\theta} = 1.5t^2\text{rad/s}$$

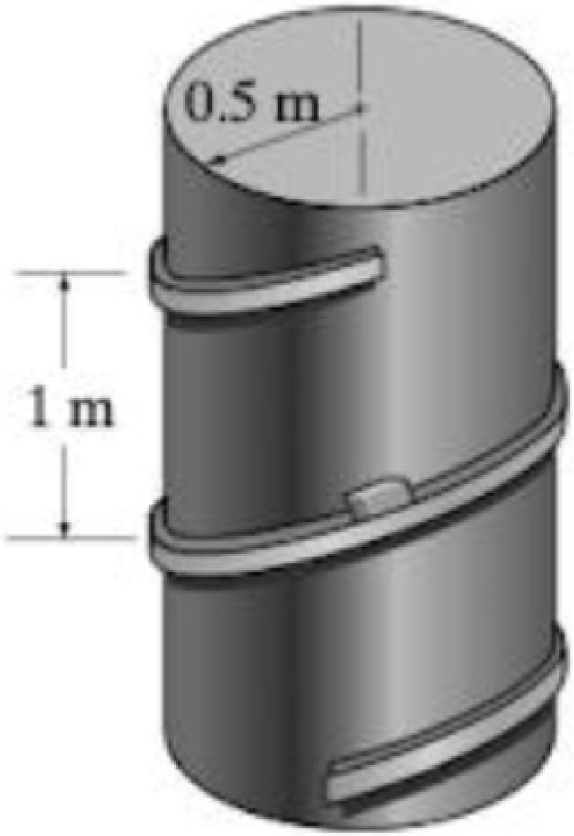
$$\rightarrow \quad \ddot{\theta} = 3t\,\text{rad/s}^2$$

$$z = (2 - 0.2t^2)\text{m} \quad \rightarrow \quad \dot{z} = -0.4t\,\text{m/s}$$

$$\rightarrow \quad \ddot{z} = -0.4\,\text{m/s}^2$$

Ejemplo 2

- Una caja se desliza por una **rampa helicoidal** que está definida por: ***r*=0.5 m**, ***θ*=0.5*t*³ rad** y ***z*=2−0.2*t*² m**, donde *t* se mide en segundos. Determine la **aceleración** de la caja en el instante en que ***t* = 2s**.



La aceleración:

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\hat{\theta} + \ddot{z}\hat{k}$$

Remplazando:

$$\vec{a} = -0.5\,\mathrm{m} \times (1.5t^2)^2\mathrm{rad}^2/\mathrm{s}^2\hat{r}$$

$$+0.5\,\mathrm{m} \times 3t\,\mathrm{rad}/\mathrm{s}^2\hat{\theta} - 0.4\mathrm{m}/\mathrm{s}^2\hat{k}$$

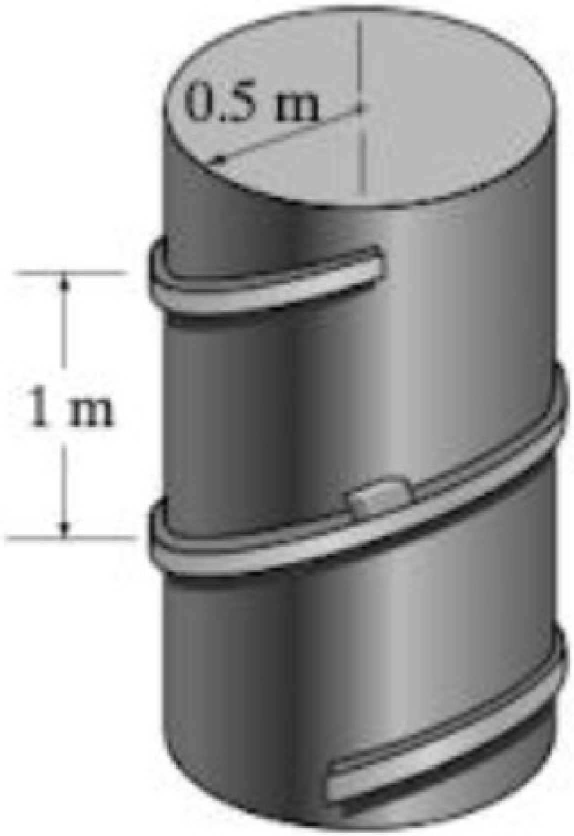
Evaluando en *t*=2s:

$$\vec{a} = -0.5 \ \times (1.5 \times 4)^2\mathrm{m}/\mathrm{s}^2\hat{r}$$

$$+1.5 \times 2\,\mathrm{m}/\mathrm{s}^2\hat{\theta} - 0.4\mathrm{m}/\mathrm{s}^2\hat{k}$$

Ejemplo 2

- Una caja se desliza por una **rampa helicoidal** que está definida por: ***r*=0.5 m**, ***θ*=0.5*t*³ rad** y ***z*=2−0.2*t*² m**, donde *t* se mide en segundos. Determine la **aceleración** de la caja en el instante en que ***t* = 2s**.



Evaluando en *t*=2s:

$$\vec{a} = -0.5\ \times (1.5 \times 4)^2 \mathrm{m/s}^2 \hat{r} + 1.5 \times 2\,\mathrm{m/s}^2 \hat{\theta} - 0.4 \mathrm{m/s}^2 \hat{k}$$

Desarrollando:

$$\boxed{\vec{a} = \left(-18\hat{r} + 3\hat{\theta} - 0.4\hat{k}\right) \mathrm{m/s}^2}$$

Ejemplo 3

- La **trayectoria** de una partícula en **coordenadas cilíndricas** está dada por:

$$r(\theta) = Ae^{k\theta}, \quad z = h\,r,$$

  donde *A*, *k*, y *h* son constantes conocidas. Si la partícula se mueve con rapidez constante v_0 .

  - Encuentre la **velocidad** en **función de $\boldsymbol{\theta}$**.
  - Encuentre la **aceleración** en **función de $\boldsymbol{\theta}$**.
  - Encuentre $\boldsymbol{\theta(t)}$ utilizando que $\theta(t{=}0){=}0$.

Ejemplo 3

- La **trayectoria** de una partícula en **coordenadas cilíndricas** está dada por:

$$r(\theta) = Ae^{k\theta}, \quad z = h\, r,$$

  donde *A*, *k*, y *h* son constantes conocidas. Si la partícula se mueve con rapidez constante v_0 .

  - Encuentre la **velocidad** en **función de** $\boldsymbol{\theta}$.

Cada componente de la velocidad:

$$v_r = \dot{r} = Ak\dot{\theta}e^{k\theta}$$

$$v_\theta = r\dot{\theta} = A\dot{\theta}e^{k\theta}$$

$$v_z = \dot{z} = hAk\dot{\theta}e^{k\theta}$$

La rapidez:

$$\longrightarrow \quad v_0^2 = v_r^2 + v_\phi^2 + v_z^2 = A^2\dot{\theta}^2(k^2(1+h^2)+1)e^{2k\theta}$$

$$\longrightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{v_0}{A\sqrt{k^2(1+h^2)+1}}e^{-k\theta}$$

Se obtiene:

$$\longrightarrow \quad \boxed{\vec{v} = \frac{v_0}{\sqrt{k^2(1+h^2)+1}}(k\hat{r} + \hat{\theta} + kh\hat{z})}$$

Ejemplo 3

- La **trayectoria** de una partícula en **coordenadas cilíndricas** está dada por:

$$r(\theta) = Ae^{k\theta}, \quad z = h\,r,$$

  donde *A*, *k*, y *h* son constantes conocidas. Si la partícula se mueve con rapidez constante v_0 .

  - Encuentre la **aceleración** en **función de θ**.

Seguimos derivando:

$$\dot{r} = v_r = \frac{k\,v_0}{\sqrt{k^2(h^2+1)+1}} \quad \longrightarrow \quad \ddot{r} = \ddot{z} = 0$$

$$\dot{\theta} = \frac{v_0}{A\sqrt{k^2(h^2+1)+1}}e^{-k\theta} \quad \longrightarrow \quad \dot{\theta}^2 = \frac{v_0^2}{A^2(k^2(h^2+1)+1)}e^{-2k\theta}$$

$$\longrightarrow \quad \ddot{\theta} = \frac{-k\,v_0^2}{A^2(k^2(h^2+1)+1)}e^{-2k\theta}$$

Entonces la aceleración:

$$\longrightarrow \quad \boxed{\vec{a} = \frac{v_0^2}{A(k^2(h^2+1)+1)}e^{-k\theta}(-\hat{r} + k\hat{\theta})}$$

Ejemplo 3

- La **trayectoria** de una partícula en **coordenadas cilíndricas** está dada por:

$$r(\theta) = Ae^{k\theta}, \quad z = h\,r,$$

  donde *A*, *k*, y *h* son constantes conocidas. Si la partícula se mueve con rapidez constante v_0 .

  - Encuentre $\boldsymbol{\theta(t)}$ utilizando que $\theta(t{=}0){=}0$.

Tenemos que:

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{v_0}{A\sqrt{k^2(1+h^2)+1}}e^{-k\theta}$$

Integramos:

$$\int_0^\theta e^{k\theta}d\theta = \int_0^t \frac{v_0}{A\sqrt{k^2(1+h^2)+1}}dt$$

$$\frac{e^{k\theta}}{k} - \frac{1}{k} = \frac{v_0}{A\sqrt{k^2(1+h^2)+1}}t \quad \longrightarrow \quad \boxed{\theta(t) = \frac{1}{k}\ln\left(\frac{kv_0}{A\sqrt{k^2(1+h^2)+1}}t+1\right)}$$

Resumen

- Hemos definido el sistema de **coordenadas polares** para movimientos en un plano.
- Generalizamos las coordenadas polares a movimientos tridimensionales, definiendo las **coordenadas cilíndricas**.
- Próxima clase:
    - ➔ Movimiento relativo.