FACULTAD DE FÍSICA
PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATÓLICA DE CHILE

Dinámica (FIS1514)

Ejemplos Cinemática

Felipe Isaule

felipe.isaule@uc.cl

Miércoles 28 de Agosto de 2024

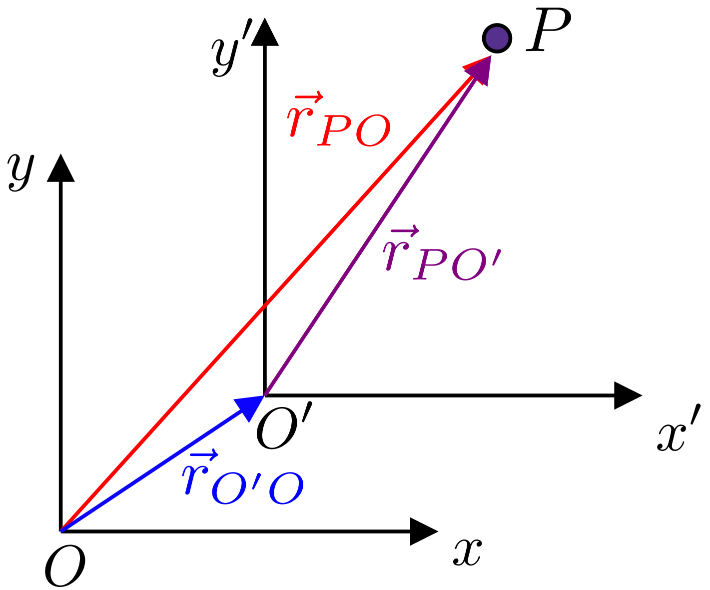
Movimiento relativo

- Si un **sistema de referencia** O' se encuentra a una posición $\vec{R}$ con respecto a **otro sistema de referencia** O. Una partícula P es descrita por

$$\vec{r}_{PO} = \vec{r}_{O'O} + \vec{r}_{PO'}$$

$$\vec{v}_{PO} = \vec{v}_{O'O} + \vec{v}_{PO'}$$

$$\vec{a}_{PO} = \vec{a}_{O'O} + \vec{a}_{PO'}$$

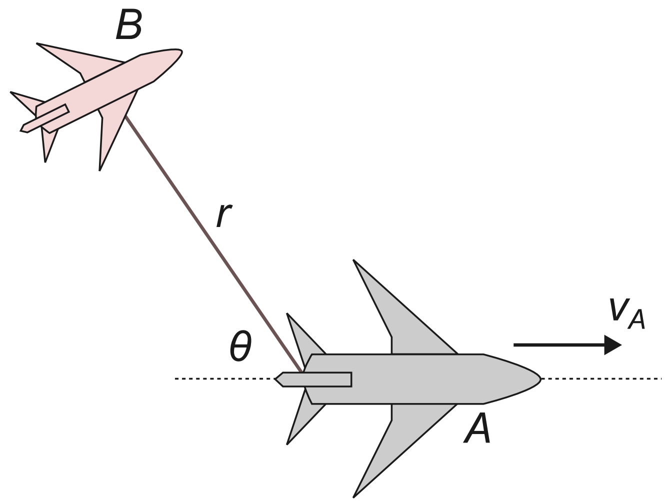


$$\vec{v}_{PO} = \dot{\vec{r}}_{PO} \quad \vec{v}_{O'O} = \dot{\vec{r}}_{O'O}\,, \quad \vec{v}_{PO'} = \dot{\vec{r}}_{PO'}$$

$$\vec{a}_{PO} = \dot{\vec{v}}_{PO} \quad \vec{a}_{O'O} = \dot{\vec{v}}_{O'O}\,, \quad \vec{a}_{PO'} = \dot{\vec{v}}_{PO'}$$

Ejemplo 1

- Un avión *A* vuela con una **rapidez constante** v_0 y acarrea un planeador *B* con un cable de **largo constante** r como muestra la figura. Si el ángulo θ **incrementa** de **manera constante** ω_0, encuentre la **rapidez** y **aceleración** del planeador B en **función de** $\boldsymbol{\theta}$ con respecto a un sistema estático.



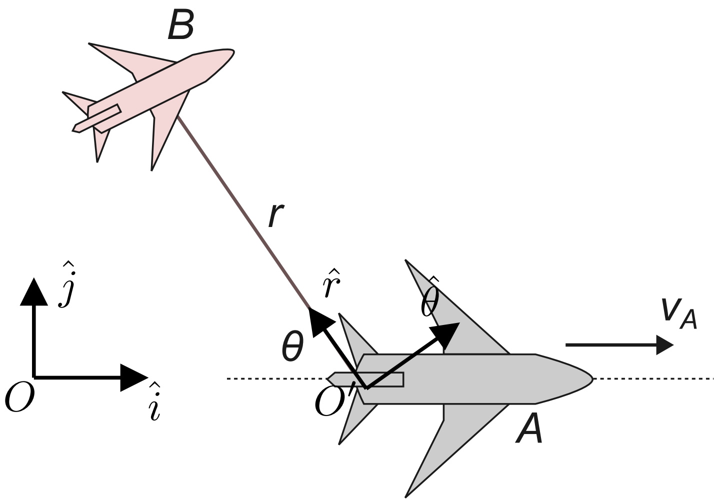
Ejemplo 1

- Un avión *A* vuela con una **rapidez constante** v_0 y acarrea un planeador *B* con un cable de **largo constante** r como muestra la figura. Si el ángulo θ **incrementa** de **manera constante** ω_0, encuentre la **rapidez** y **aceleración** del planeador B en **función de** $\boldsymbol{\theta}$ con respecto a un sistema estático.

Fijamos un sistema con coordenadas polares
Sobre el avión *A* y que describe el planeador *B*.

La velocidad de B respecto al sistema estático:

$$\vec{v}_B = \vec{V} + \vec{v}'_B$$



Tenemos que:

$$\vec{V} = \vec{v}_A = v_A\hat{i}$$

$$\vec{v}'_B = r\dot{\theta}\hat{\theta} = r\omega_0\hat{\theta}$$

Debemos relacionar los vectores unitarios en polares con los en rectangulares:

$$\hat{r} = -\cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}$$

$$\hat{\theta} = \sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}$$

Notar que

$$\hat{r}\cdot\hat{\theta} = 0$$

Obtenemos:

$$\vec{v}'_B = r\omega_0(\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j})$$

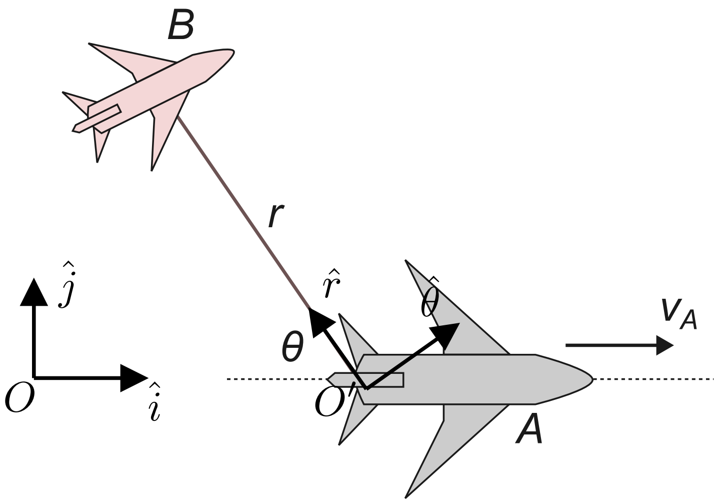
Ejemplo 1

- Un avión *A* vuela con una **rapidez constante** v_0 y acarrea un planeador *B* con un cable de **largo constante** r como muestra la figura. Si el ángulo θ **incrementa** de **manera constante** ω_0, encuentre la **rapidez** y **aceleración** del planeador B en **función de $\boldsymbol{\theta}$** con respecto a un sistema estático.

Remplazando obtenemos:

$$\vec{v}_B = \vec{V} + \vec{v}'_B$$

$$\vec{v}_B = v_A\hat{i} + r\omega_0(\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j})$$



La rapidez:

$$v_B = \sqrt{(v_A + r\omega_0\sin\theta)^2 + r^2\omega_0^2\cos^2\theta}$$

$$\boxed{v_B = \sqrt{v_A^2 + 2v_Ar\omega_0\sin\theta + r^2\omega_0^2}}$$

Ejemplo 1

- Un avión *A* vuela con una **rapidez constante** v_0 y acarrea un planeador *B* con un cable de **largo constante** r como muestra la figura. Si el ángulo θ **incrementa** de **manera constante** ω_0, encuentre la **rapidez** y **aceleración** del planeador B en **función de** $\boldsymbol{\theta}$ con respecto a un sistema estático.

La aceleración de B respecto al sistema estático:

$$\vec{a}_B = \vec{A} + \vec{a}'_B$$

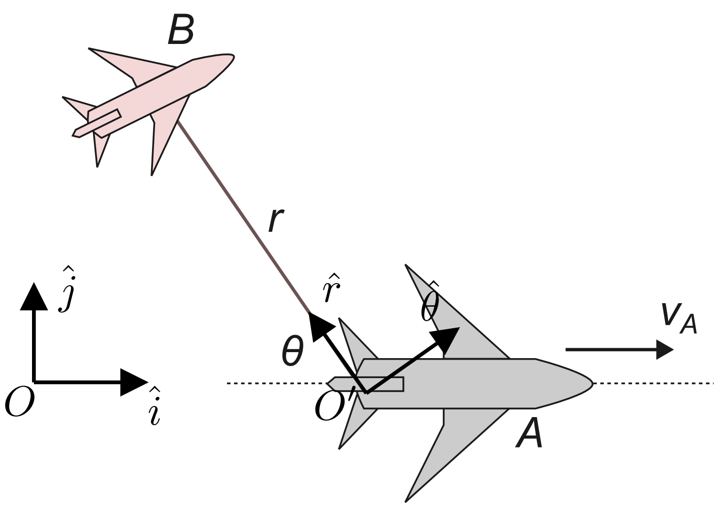
Tenemos que:

$$\vec{A} = \vec{a}_A = 0$$

$$\vec{a}'_B = -r\dot{\theta}^2\hat{r} = -r\omega_0^2\hat{r}$$

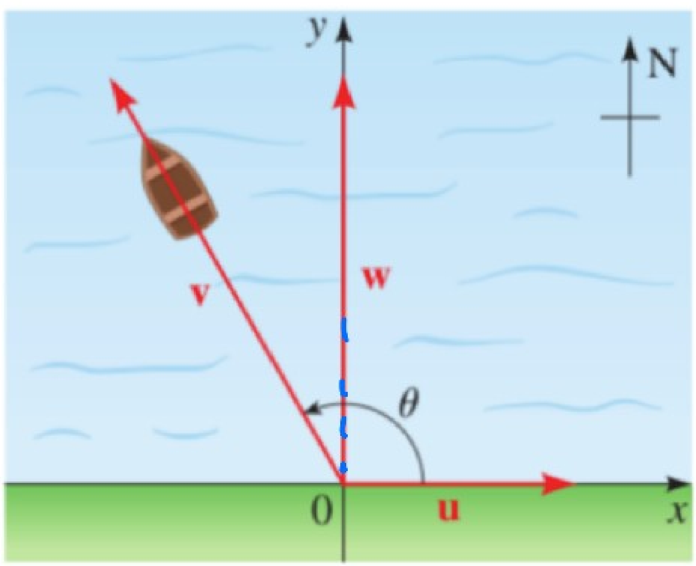
Entonces:

$$\boxed{\vec{a}_B = r\omega_0^2(\cos\theta\hat{i} - \sin\theta\hat{j})}$$



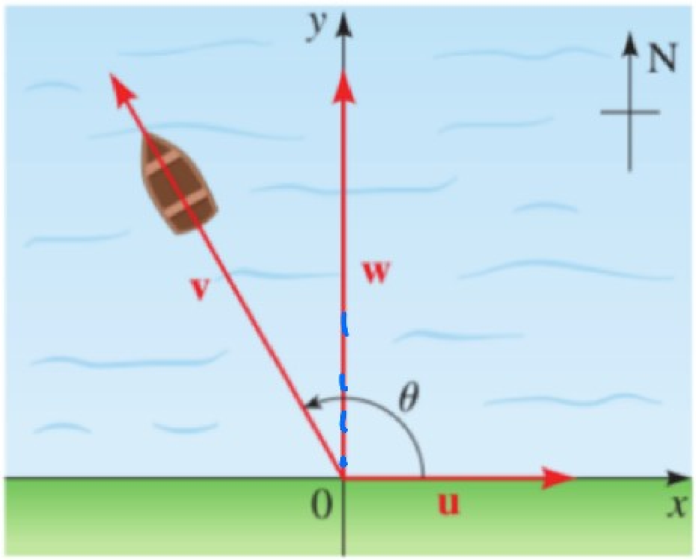
Ejemplo 2

- Suponga que se desea cruzar un **río** en un **bote** y alcanzar el punto de la **rivera opuesta** justo **en frente de usted** siguiendo una **trayectoria rectilínea**. Si la **rapidez del bote relativa al agua** es de $v = 10 \mathrm{km/h},$ y el **río transporta agua** a $u = 5 \mathrm{km/h}$. ¿Con qué **ángulo** se debería **lanzar el bote inicialmente** para llegar al punto deseado?



Ejemplo 2

- Suponga que se desea cruzar un **río** en un **bote** y alcanzar el punto de la **rivera opuesta** justo **en frente de usted** siguiendo una **trayectoria rectilínea**. Si la **rapidez del bote relativa al agua** es de $v = 10 \mathrm{km/h},$ y el **río transporta agua** a $u = 5 \mathrm{km/h}$. ¿Con qué **ángulo** se debería **lanzar el bote inicialmente** para llegar al punto deseado?



El bote es lanzado con una velocidad (relativa al agua):

$$\vec{v} = v\left(-\cos(\pi-\theta)\hat{i} + \sin(\pi-\theta)\hat{j}\right)$$

Utilizamos que:

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\longrightarrow \qquad \vec{v} = v\left(\cos(\theta)\hat{i} + \sin(\theta)\hat{j}\right)$$

La velocidad del bote (relativa a la orilla):

$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = \left((u + v\cos(\theta))\hat{i} + v\sin(\theta)\hat{j}\right)$$

Ejemplo 2

- Suponga que se desea cruzar un **río** en un **bote** y alcanzar el punto de la **rivera opuesta** justo **en frente de usted** siguiendo una **trayectoria rectilínea**. Si la **rapidez del bote relativa al agua** es de $v = 10 \mathrm{km/h}$, y el **río transporta agua** a $u = 5 \mathrm{km/h}$. ¿Con qué **ángulo** se debería **lanzar el bote inicialmente** para llegar al punto deseado?

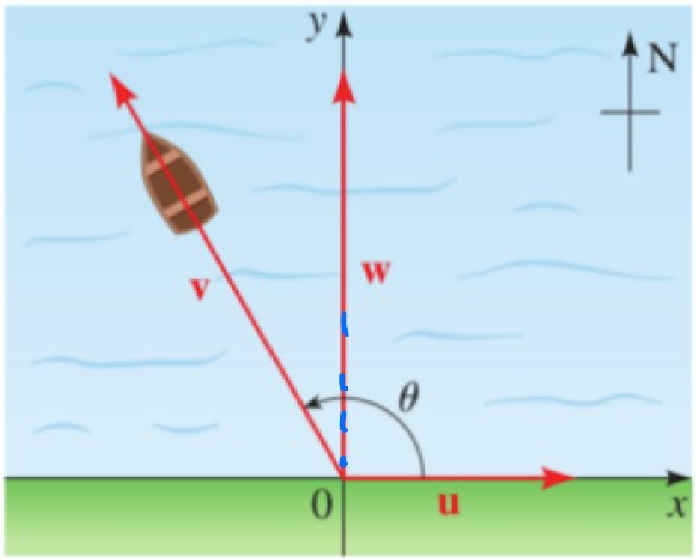
Para que sea un movimiento rectilineo en *y*:

$$u + v\cos(\theta) = 0$$

$$\longrightarrow \quad \cos(\theta) = -u/v = -5/10 = -1/2$$

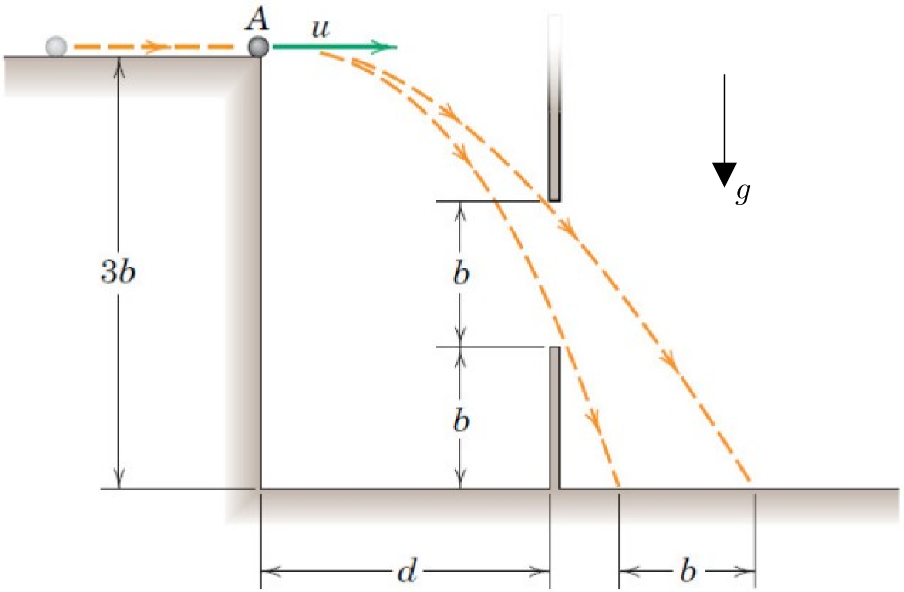
$$\longrightarrow \quad \theta = \arccos(-1/2)$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\theta = 120^\circ}$$



Ejemplo 3

- Una partícula aftectada por la **gravedad** se lanza **horizontalmente** con una **rapidez** u desde una plataforma de **altura** $3b$ y pasa por una abertura de **anchura** b a una altura b como muestra la figura. Encuentre la distancia d para que la región de **aterrizaje** sea de un **ancho** b. Además, determine el **rango** de u para que la partícula **pase por la abertura**.

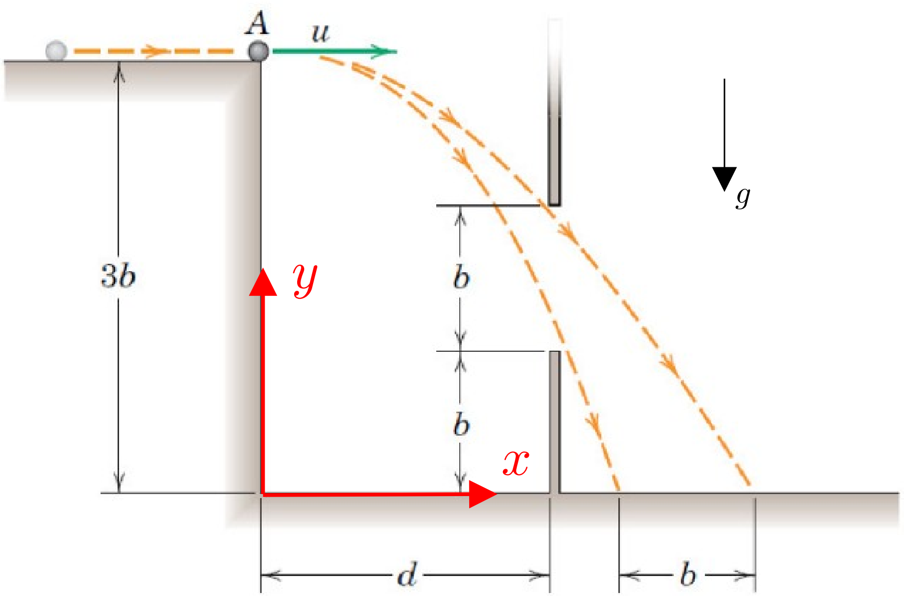


Ejemplo 3

- Una partícula aftectada por la **gravedad** se lanza **horizontalmente** con una **rapidez** u desde una plataforma de **altura** $3b$ y pasa por una abertura de **anchura** b a una altura b como muestra la figura. Encuentre la distancia d para que la región de **aterrizaje** sea de un **ancho** b. Además, determine el **rango** de u para que la partícula **pase por la abertura**.

La posición y velocidad inicial:

$$\vec{r}_0 = 3b\hat{j} \qquad \vec{v}_0 = u\hat{i}$$



La posición en cada coordenada en función del tiempo:

$$x = \cancel{x_0} + \underbrace{v_{x,0}}_{u} t + \cancel{\frac{a_x}{2}} t^2 = u\,t$$

$$y = \underbrace{y_0}_{3b} + \cancel{v_{y,0}} t + \frac{\underbrace{a_y}_{-g}}{2} t^2 = 3b - \frac{g}{2} t^2$$

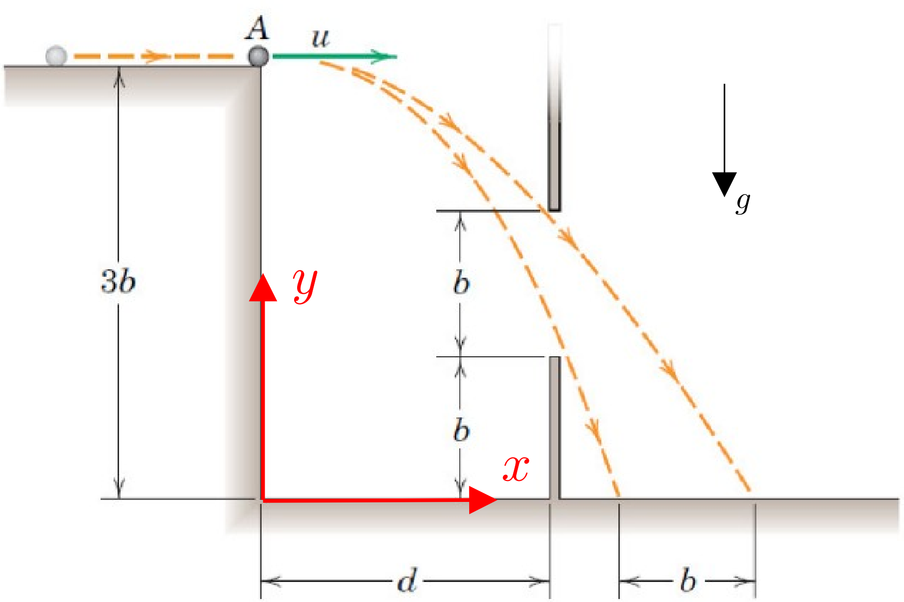
Primero, para la **rapidez menor** la partícula pasa por la parte inferior de la abertura:

$$x \longrightarrow d = u_1 t_1 \longrightarrow t_1 = d/u_1$$

$$y \longrightarrow b = 3b - \frac{g}{2} t_1^2$$

Ejemplo 3

- Una partícula aftectada por la **gravedad** se lanza **horizontalmente** con una **rapidez** u desde una plataforma de **altura** $3b$ y pasa por una abertura de **anchura** b a una altura b como muestra la figura. Encuentre la distancia d para que la región de **aterrizaje** sea de un **ancho** b. Además, determine el **rango** de u para que la partícula **pase por la abertura**.



Remplazando t_1 en la ecuación en y :

$$2b = \frac{gd^2}{2u_1^2} \quad \longrightarrow \quad u_1 = \frac{d}{2}\sqrt{\frac{g}{b}}$$

Ahora para la **rapidez mayor** la partícula pasa por la parte superior de la abertura:

$$x \quad \longrightarrow \quad d = u_2 t_2 \quad \longrightarrow \quad t_2 = d/u_2$$

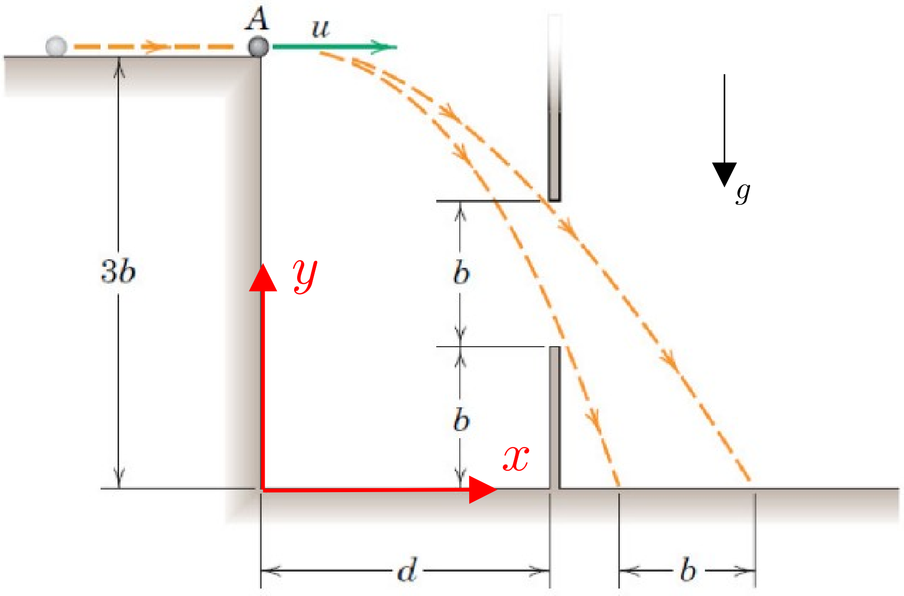
$$y \quad \longrightarrow \quad 2b = 3b - \frac{g}{2}t_2^2$$

Remplazando t_2 en la ecuación en y :

$$b = \frac{gd^2}{2u_2^2} \quad \longrightarrow \quad u_2 = d\sqrt{\frac{g}{2b}}$$

Ejemplo 3

- Una partícula afectada por la **gravedad** se lanza **horizontalmente** con una **rapidez** u desde una plataforma de **altura** $3b$ y pasa por una abertura de **anchura** b a una altura b como muestra la figura. Encuentre la distancia d para que la región de **aterrizaje** sea de un **ancho** b. Además, determine el **rango** de u para que la partícula **pase por la abertura**.



Ahora tenemos que imponer que la zona de aterrizaje tenga un ancho b.

Primero usamos la ecuación en y para imponer que la partícula llega a la superficie:

$$y \quad \longrightarrow \quad 0 = 3b - \frac{g}{2}t_f^2 \quad \longrightarrow t_f = \sqrt{6b/g}$$

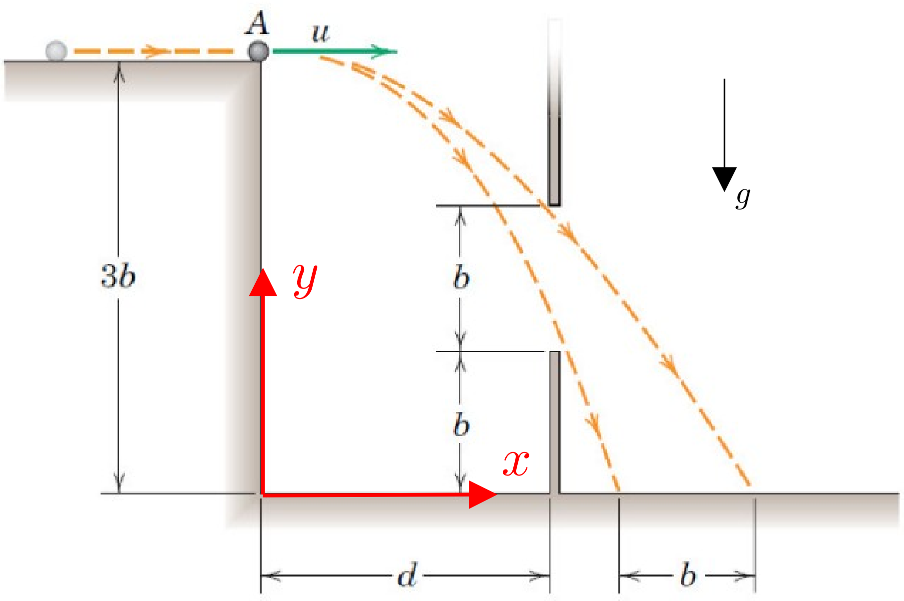
La partícula siempre llega a la superficie en el **mismo tiempo**.

Ahora utilizamos la ecuación en x

$$x \quad \longrightarrow \quad \Delta x = b = u_2 t_f - u_1 t_f$$

Ejemplo 3

- Una partícula aftectada por la **gravedad** se lanza **horizontalmente** con una **rapidez** u desde una plataforma de **altura** $3b$ y pasa por una abertura de **anchura** b a una altura b como muestra la figura. Encuentre la distancia d para que la región de **aterrizaje** sea de un **ancho** b. Además, determine el **rango** de u para que la partícula **pase por la abertura**.



Remplazando:

$$b = (u_2 - u_1)\, t_f$$

$$b = \left(d\sqrt{\frac{g}{2b}} - \frac{d}{2}\sqrt{\frac{g}{b}} \right) \sqrt{\frac{6b}{g}}$$

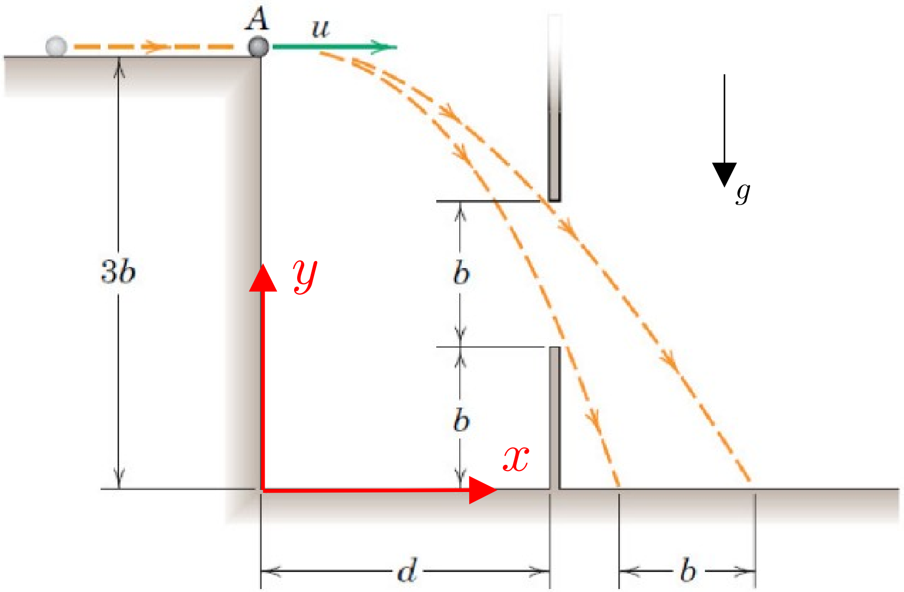
$$= d\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \right) \sqrt{6}$$

$$= d\sqrt{3/2}(\sqrt{2} - 1)$$

$$\longrightarrow \boxed{d = b\sqrt{\frac{2}{3}}\left(1 + \sqrt{2}\right)}$$

Ejemplo 3

- Una partícula aftectada por la **gravedad** se lanza **horizontalmente** con una **rapidez** u desde una plataforma de **altura** $3b$ y pasa por una abertura de **anchura** b a una altura b como muestra la figura. Encuentre la distancia d para que la región de **aterrizaje** sea de un **ancho** b. Además, determine el **rango** de u para que la partícula **pase por la abertura**.



Ahora remplazamos en u_1 y u_2 :

$$\longrightarrow \boxed{u_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2gb}{3}}\left(1+\sqrt{2}\right)}$$

$$\longrightarrow \boxed{u_2 = \sqrt{\frac{gb}{3}}\left(1+\sqrt{2}\right)}$$