Crossover BCS-BEC

Felipe Isaule
Investigador Postdoctoral ANID
Instituto de Física, PUC

1ra Escuela Chilena de Átomos Ultrafríos
21/01/2025, PUC, Santiago, Chile

felipeisaule.github.io felipe.isaule@uc.cl 𝕏 felipeisaule

Literatura

- J. Annett, *Superconductivity, superfluids and condensates* (Oxford University Press, 2004).
- Q. Chen, J. Stajic, S. Tan, and K. Levin, Physics Reports **412**, 1 (2005).
- S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari, Rev. Mod. Phys. **80**, 1215 (2008).
- W. Zwerger (ed.), *The BCS-BEC crossover and the unitary Fermi gas* (Springer Science & Business Media, 2011).
- M. Randeria and E. Taylor, Annu. Rev. Condens. Matter Phys. **5**, 209 (2014).
- G. Strinati, P. Pieri, G. Röpke, P. Schuck, and M. Urban, Physics Reports **738**, 1 (2018)
- Y. Ohashi, H. Tajima, and P. van Wyk,Progress in Particle and Nuclear Physics **111**, 103739 (2020).

Crossover BCS-BEC

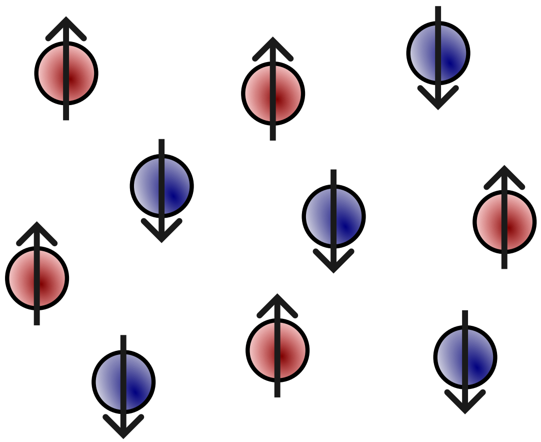
- **Gases de Fermi**. **Historia** del BCS-BEC crossover.
- Interacciones. Repaso **scattering** onda-*s*.
- **Detalle teórico**. Observables.
- Aplicaciones en **física nuclear**. Crossover **dos-dimensional**.

Crossover BCS-BEC

- **Gases de Fermi**. **Historia** del BCS-BEC crossover.
- Interacciones. Repaso **scattering** onda-*s*.
- **Detalle teórico**. Observables.
- Aplicaciones en **física nuclear**. Crossover **dos-dimensional**.

Gas de Fermi ideal

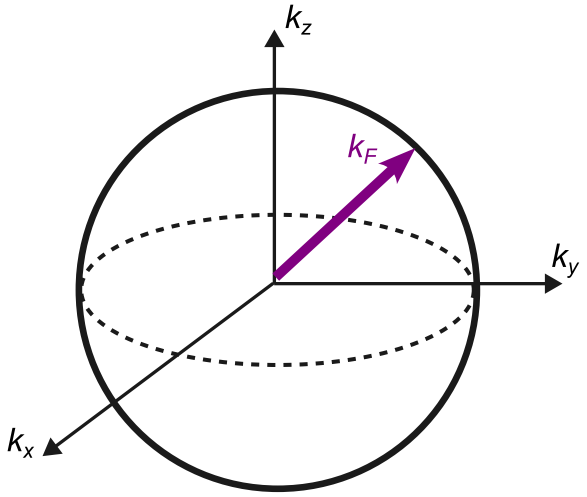
- Consideremos un **gas de Fermi** de **spin ½**.
- En el caso **no interactuante** (ideal), simplemente tenemos un **gas degenerado**.



Distribución de Fermi-Dirac

$$n_k = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} + 1} \qquad \longrightarrow \qquad n_k(T=0) = \Theta(\mu - \epsilon_k)$$

$\beta = 1/k_B T$



Esfera de Fermi en el continuo a *T*=0.

Momentum de Fermi:

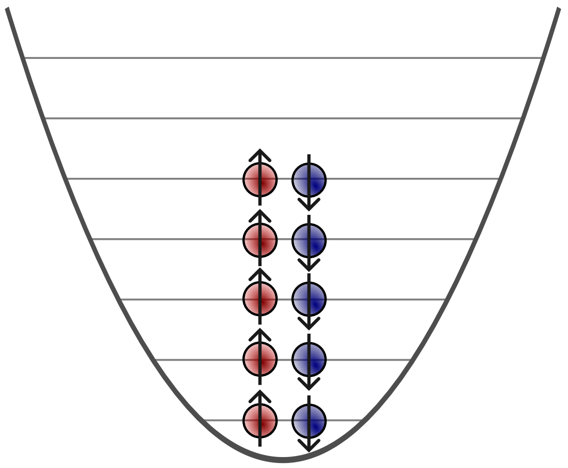
$$k_F = (3\pi^2 n)^{1/3}$$

Densidad:

$$n = N/V$$

Energía de Fermi:

$$\epsilon_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}$$



Mar de Fermi en una trampa armónica.

Superfluidos BEC y BCS

BEC S. Bose, A. Einstein (1924-1925)	**BCS** J. Bardeen, L. Cooper, J. Schrieffer (1956-1957)
Bosones	**Fermiones** interactuantes
Ocupación macroscópica de un estado cuántico	*Condensación* de **pares de Cooper**
Superfluidez en **gases interactuantes** N. Bogoliubov (1946)	**Teoría de la superconductividad**

BCS: Premio Nobel 1972.

Gas de Fermi interactuante

- Ahora consideremos un **gas de fermiones** de spin ½ que **interactúan atractivamente** mediante onda-*s*:

$$\hat{H} = \sum_{\boldsymbol{k}\sigma} (\underbrace{\epsilon_{\boldsymbol{k}}}_{\text{Energía cinética}} - \underbrace{\mu}_{\text{Potencial químico}}) \hat{c}^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\sigma} \hat{c}_{\boldsymbol{k}\sigma} + \frac{U}{\mathcal{V}} \sum_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'\boldsymbol{q}} \hat{c}^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\uparrow} \hat{c}^{\dagger}_{\boldsymbol{k}'\downarrow} \hat{c}_{\boldsymbol{k}'+\boldsymbol{q}\downarrow} \hat{c}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}\uparrow}.$$

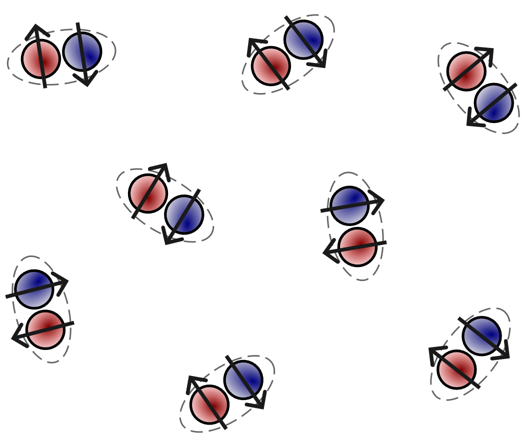
Interacción atractiva $U<0$

$$\epsilon_{\boldsymbol{k}} = \hbar^2 k^2 / 2m$$

$$\sigma = \uparrow, \downarrow$$

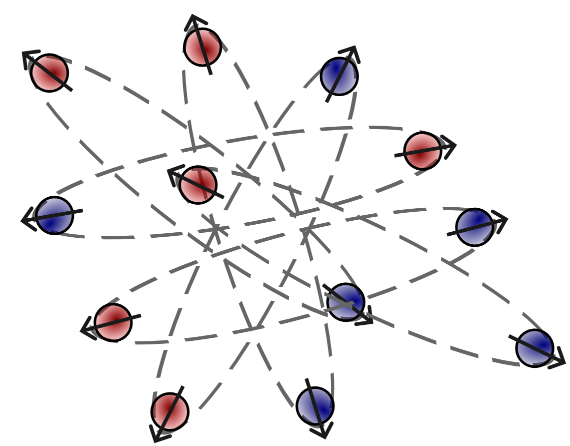
- Con onda-*s*, podemos considerar dos límites **superfluidos**:

BEC
Atracción muy fuerte



Dímeros bosónicos

BCS
Atracción muy débil

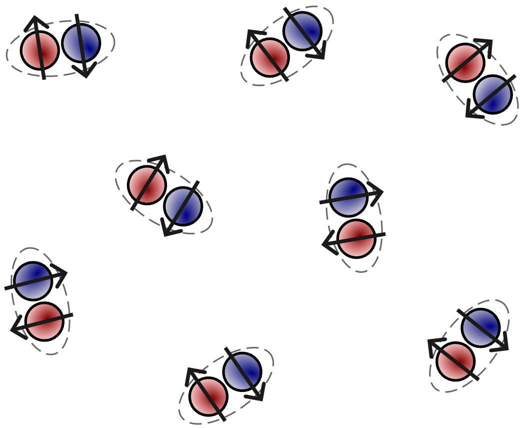


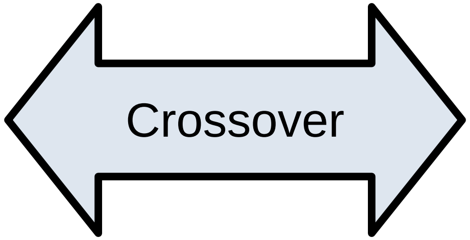
Pares de Cooper

En superconductores convencionales los pares tienen tamaños del orden de ~10^3 veces la distancia promedio entre partículas

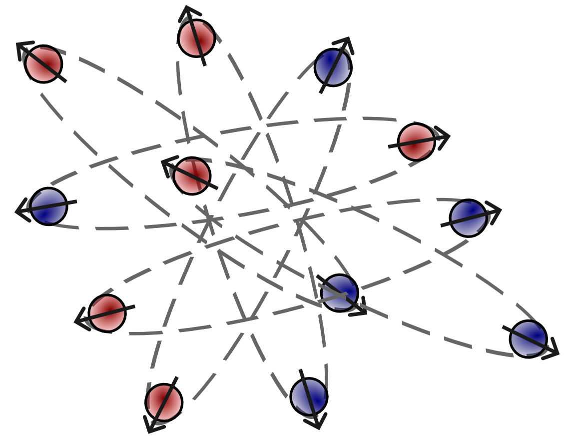
Crossover BCS-BEC

BEC
Atracción muy fuerte





BCS
Atracción muy débil



- Entre los dos límites existe un **crossover** en **vez de una transición de fase***.

- Por mucho tiempo el crossover fue sólo una curiosidad teórica.

  D. M. Eagles, Phys. Rev. **186**, 456 (1969).
  A. J. Leggett, *Diatomic molecules and Cooper pairs*, in *Modern trends in the theory of condensed matter* (Springer-Verlag, Berlin, 1980, p. 13).
  P. Nozières and S. Schmitt-Rink, J. Low Temp. Phys. **59**, 195 (1985).

- Sin embargo, los gases átomos ultrafríos han permitido realizar experimentalmente el crossover BCS-BEC.

*Gases con onda-*p* sí muestran una transición de fase.

Experimentos con átomos ultrafríos

- <u>2001:</u> **Gas degenerado** de Fermi.
  JILA (^{40}K): B. DeMarco, S. B. Papp, and D. S. Jin, Phys. Rev. Lett. **86**, 5409 (2001).

- <u>2003:</u> **Condensación** de **pares de fermiones** (BEC).
  JILA (^{40}K): M. Greiner, C. A. Regal and D. S. Jin, Nature **426**, 537 (2003). **MIT** (^{6}Li): M.W. Zwierlein et al., Phys. Rev. Lett. **91**, 250401 (2003).

- <u>2004</u>: Realización del **crossover BCS-BEC**.
  JILA (^{40}K): C. A. Regal, M. Greiner, and D. S. Jin, Phys. Rev. Lett. **92**, 040403 (2004).
  MIT (^{6}Li): M.W. Zwierlein, C.A. Stan, C.H. Schunck, S.M.F. Raupach, A.J. Kerman, and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **92**, 120403 (2004).
  LKB-ENS (^{6}Li): T. Bourdel *et al.*, Phys. Rev. Lett. **93**, 050401 (2004).
  Innsbruck (^{6}Li): C. Chin, M. Bartenstein, A. Altmeyer, S. Riedl, S. Jochim, J. Hecker-Denschlag, and R. Grimm, Science **305**, 1128 (2004).

Número de átomos: 10^5 - 10^7 átomos

Gases diluídos: $k_F^{-1} \sim 0.3\mu\mathrm{m}$

Temperaturas: $T \sim 10^{-1} T_F$

- Estos desarrollos incrementaron enormemente el interés en el crossover BCS-BEC y en los sistemas fermiónicos **fuertemente interactuantes**.

Crossover BCS-BEC

- **Gases de Fermi**. **Historia** del BCS-BEC crossover.
- Interacciones. Repaso **scattering** onda-*s*.
- **Detalle teórico**. Observables.
- Aplicaciones en **física nuclear**. Crossover **dos-dimensional**.

Interacciones y scattering entre átomos

- Recordemos que la amplitud de scattering toma la forma:

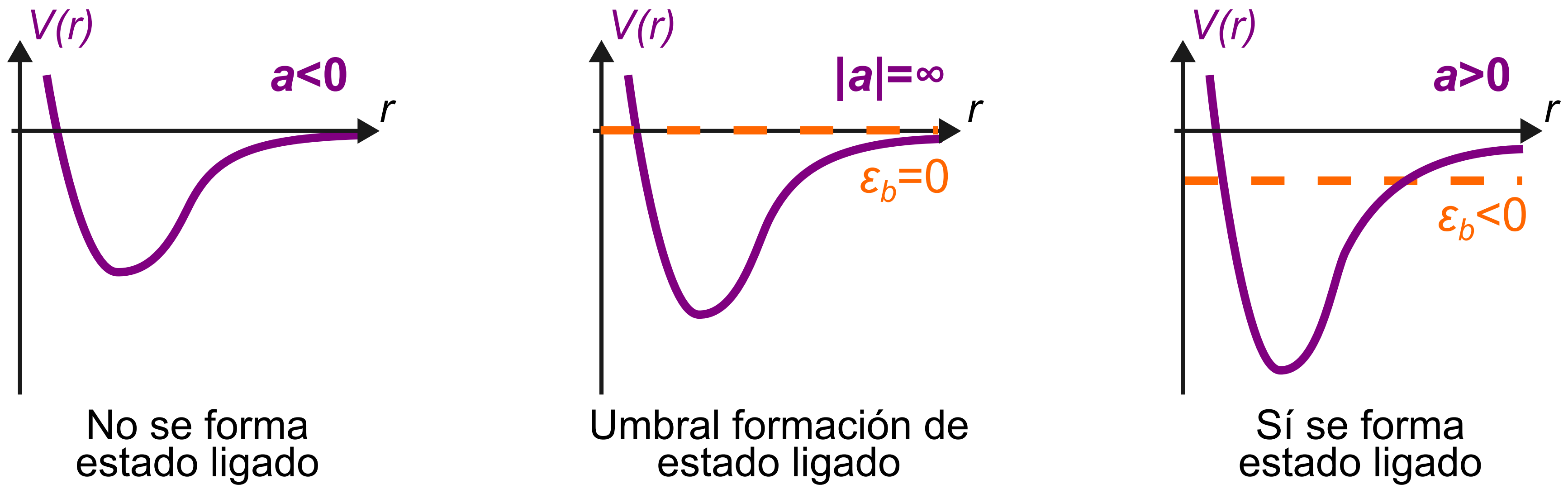
$$f_0(k) = -\frac{1}{a^{-1} - k^2 r_{\text{eff}}/2 + ik} \approx -\frac{1}{a^{-1} + ik}.$$

a : **longitud de scattering** de onda-s
r_{eff} : rango efectivo

- En **interacciones repulsivas** a es siempre **positivo**.

- En **interacciones atractivas** el **signo** de a depende de si es posible o no la formación de un **estado ligado**.

Límite Unitario

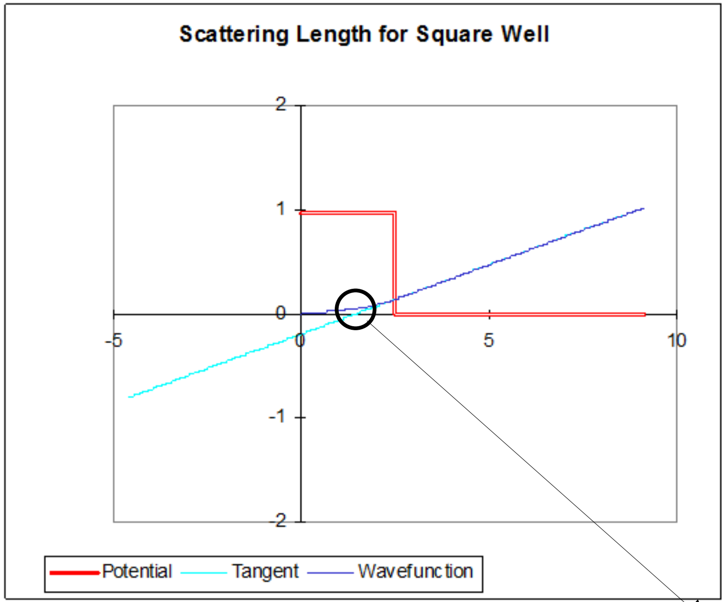


ε_B: energía de ligazón

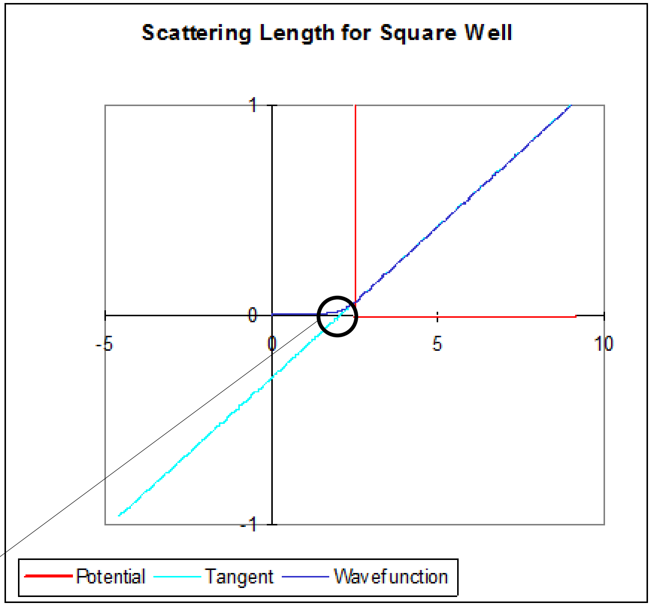
Longitud de scattering

- Para poder **interpretar** la longitud de scattering, examinemos el comportamiento de $u(r) = rR(r)$ en potenciales cuadrados.
- La longitud de scattering corresponde a la distancia donde la **tangente** de $u(r)$ cruza el eje-r.
- En **potenciales repulsivos**:

Esfera suave



Esfera sólida



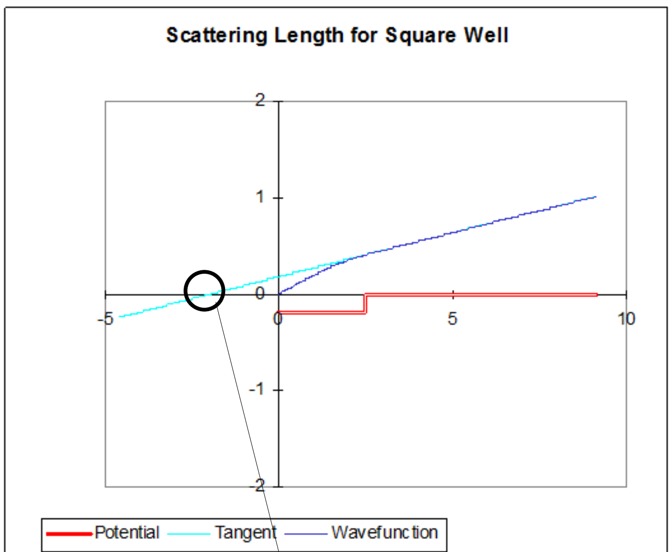
$a > 0$

Figuras tomadas de https://galileo.phys.virginia.edu/classes/752.mf1i.spring03/Scattering_II.htm

Longitud de scattering

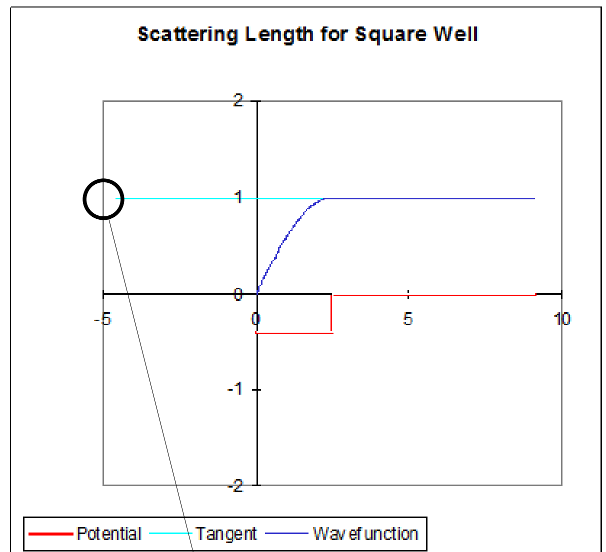
- En **potenciales atractivos**:

No se forma estado ligado



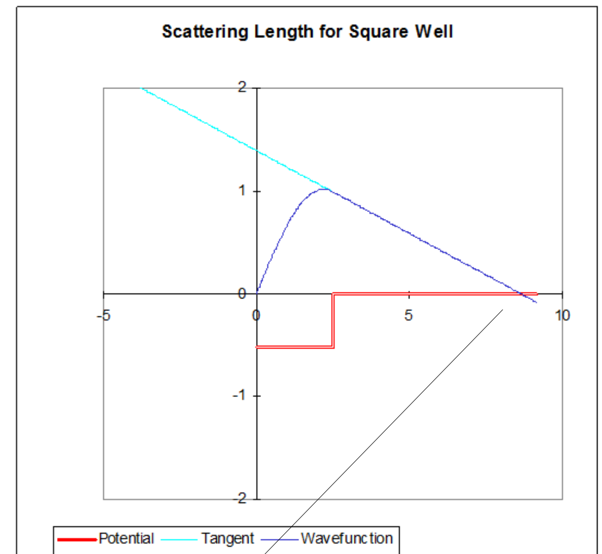
$a < 0$

Umbral



$|a| \to \infty$

Sí se forma estado ligado



$a > 0$

- En el **límite Unitario (resonancia):**

$$f_0(k) \approx -\frac{1}{a^{-1} + ik} \longrightarrow -\frac{1}{ik} \longrightarrow$$ **No depende de a.**

Figuras tomadas de https://galileo.phys.virginia.edu/classes/752.mf1i.spring03/Scattering_II.htm

Longitud de scattering en sistemas nucleares

- La longitud de scattering **entre dos neutrones**:

$$a_{\mathrm{nn}} \approx -18.5\ \mathrm{fm} \qquad r_{\mathrm{nn,eff}} \approx 2.7\ \mathrm{fm}$$

G.F. d. Téramond and B. Gabioud, Phys. Rev. C **36**, 691 (1987). A. Gårdestig, J. Phys. G **36**, 053001 (2009).

No hay estado ligado entre dos neutrones. Es decir, **no existe el dineutrón en el vacío**.

- La longitud de scattering **entre un protón y neutrón**:

$$a^{(t)}_{\mathrm{pn}} \approx 5.42\ \mathrm{fm} \qquad r^{(t)}_{\mathrm{nn,eff}} \approx 1.76\ \mathrm{fm}$$

B. Wiringa, V.G.J. Stoks, and R. Schiavilla, Phys. Rev. C **51**, 38 (1995).

Sí hay estado ligado. Es decir, **sí existe el deuterón.**

$$\xrightarrow{\text{Energía de ligazón deuterón (d)}} \quad E_{\mathrm{d}} \approx 2.22\ \mathrm{MeV}$$

Energía de ligazón

- La energía de ligazón se obtiene del **polo** de $f_0(k)$:

$$f_0(k) = -\frac{1}{a^{-1} - k^2 r_{\text{eff}}/2 + ik} \approx -\frac{1}{a^{-1} + ik}.$$

$$k = i\sqrt{m\epsilon_b/\hbar^2}$$

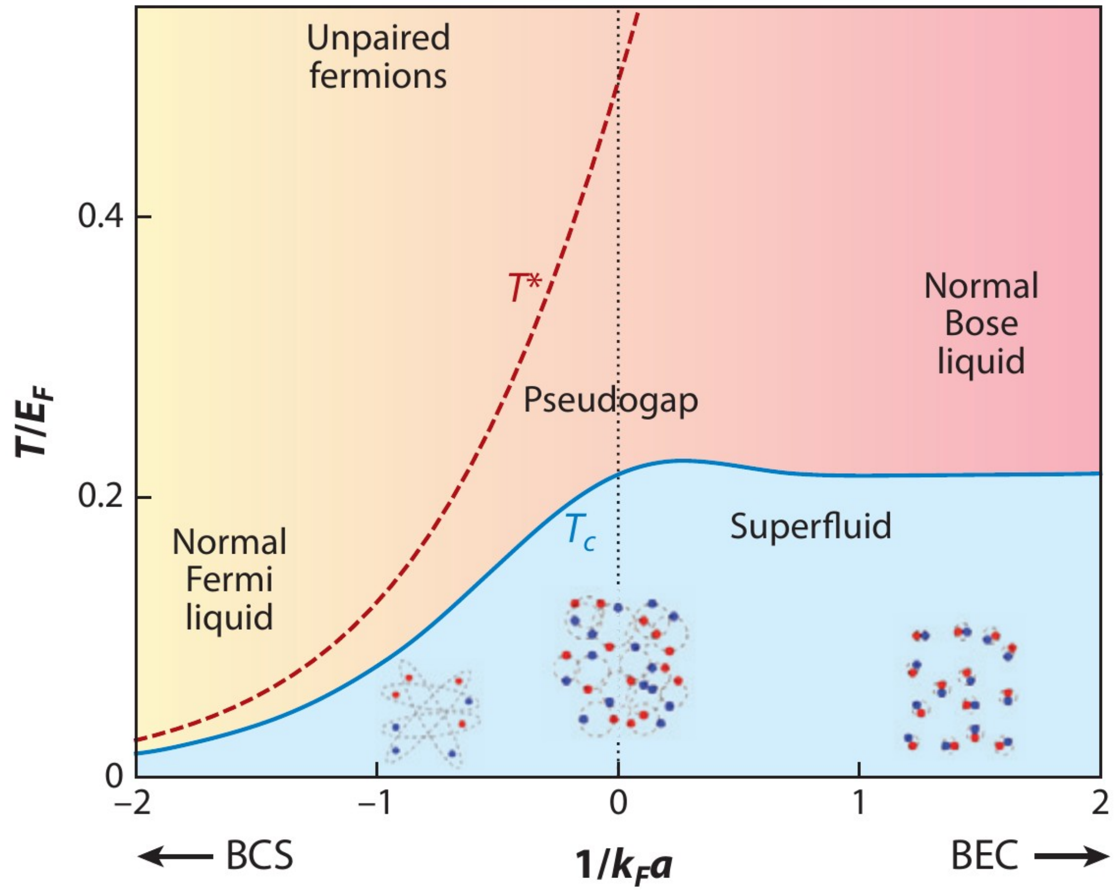
- Se obtiene:

$$\epsilon_b = -\frac{\hbar^2}{ma^2}\Theta(a).$$

Crossover BCS-BEC

- **Gases de Fermi**. **Historia** del BCS-BEC crossover.
- Interacciones. Repaso **scattering** onda-*s*.
- **Detalle teórico**. Observables.
- Aplicaciones en **física nuclear**. Crossover **dos-dimensional**.

Crossover BCS-BEC



Pares de Cooper con tamaño $\gg k_F^2$

Pares con tamaño $\approx k_F^2$

Dímeros bosónicos con tamaño $\ll k_F^2$

- Pares se forman **para todo** a.

$$k_F = (3\pi^2 n)^{1/3}$$

Figura tomada de M. Randeria and E. Taylor, Annu. Rev. Condens. Matter Phys. **5**, 209 (2014).

Crossover BCS-BEC

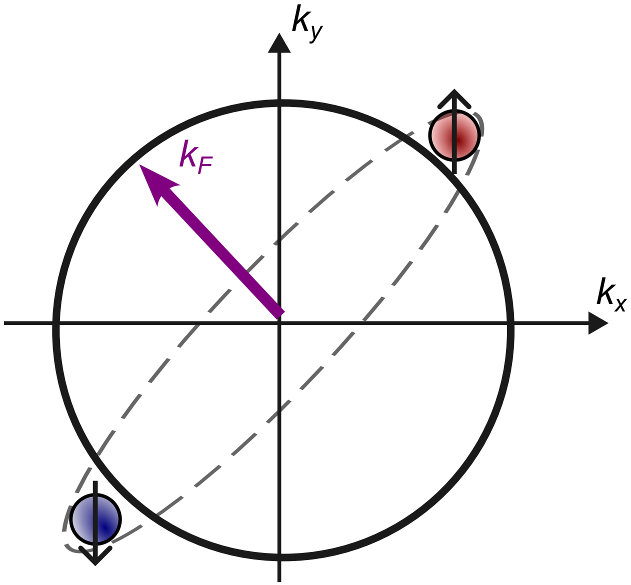
- Los límites BCS y BEC son **débilmente interactuantes**.
- Por otro lado, la región del crossover es **fuértemente interactuante**.
- En el crossover **no hay parámetro pequeño** para realizar teoría de perturbaciones.

$$|k_F a| \to \infty.$$

- Esto significa que uno necesita utilizar **métodos no-perturbativos** para describir el crossover teóricamente.
  - ➔ Simulaciones de Monte-Carlo, grupo de renormalización, expansiones ε, etc.

Teoría BCS

- La **inestabilidad de Cooper** dicta que un mar de Fermi es inestable ante la presencia de **atracción**.
- Ante dicha inestabilidad, dos fermiones sobre el mar de Fermi formarán un **par de Cooper**.



- En superconductores aparece una **atracción entre electrones** debido a la deformación de la red cristalina (**electrón-fonón**).
- Con átomos ultrafríos se puede inducir una atracción con técnicas de resonancias de Feshbach.

J. Annett, *Superconductivity, superfluids and condensates* (Oxford University Press, 2004).

Teoría BCS

- Se define un **operador** que crea un par de Cooper:

$$\hat{P}^\dagger_{\boldsymbol{k}} = \hat{c}^\dagger_{\boldsymbol{k}\uparrow}\hat{c}^\dagger_{-\boldsymbol{k}\downarrow}.$$

- La **función de onda BCS** (estado coherente):

$$|\Psi_{\text{BCS}}\rangle \propto \exp\left(\sum_{\boldsymbol{k}} \alpha_{\boldsymbol{k}} \hat{P}_{\boldsymbol{k}}\right)|0\rangle \approx \prod_{\boldsymbol{k}}\left(1 + \alpha_{\boldsymbol{k}}\hat{P}_{\boldsymbol{k}}\right)|0\rangle.$$

- Usualmente se escribe de la siguiente forma:

$$|\Psi_{\text{BCS}}\rangle = \prod_{\boldsymbol{k}}\left(u_{\boldsymbol{k}} + v_{\boldsymbol{k}}\hat{P}_{\boldsymbol{k}}\right)|0\rangle.$$

donde

$$\hat{u}^\dagger_{\boldsymbol{k}} = \frac{1}{1+|\alpha_{\boldsymbol{k}}|^2}, \qquad \hat{v}^\dagger_{\boldsymbol{k}} = \frac{\alpha_{\boldsymbol{k}}}{1+|\alpha_{\boldsymbol{k}}|^2}.$$

$$|u_{\boldsymbol{k}}|^2 + |v_{\boldsymbol{k}}|^2 = 1$$

son coeficientes de **Bogoliubov**.

J. Annett, *Superconductivity, superfluids and condensates* (Oxford University Press, 2004).

Teoría BCS

- La **ecuación BCS**:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{\boldsymbol{k}} - \mu & \Delta \\ \Delta^* & -(\epsilon_{\boldsymbol{k}} - \mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\boldsymbol{k}} \\ v_{\boldsymbol{k}} \end{pmatrix} = E_{\boldsymbol{k}} \begin{pmatrix} u_{\boldsymbol{k}} \\ v_{\boldsymbol{k}} \end{pmatrix}, \qquad \epsilon_{\boldsymbol{k}} = \frac{\hbar^2 \boldsymbol{k}^2}{2m}$$

que tiene como solución

$$E_{\boldsymbol{k}} = \sqrt{(\epsilon_{\boldsymbol{k}} - \mu)^2 + |\Delta|^2}.$$

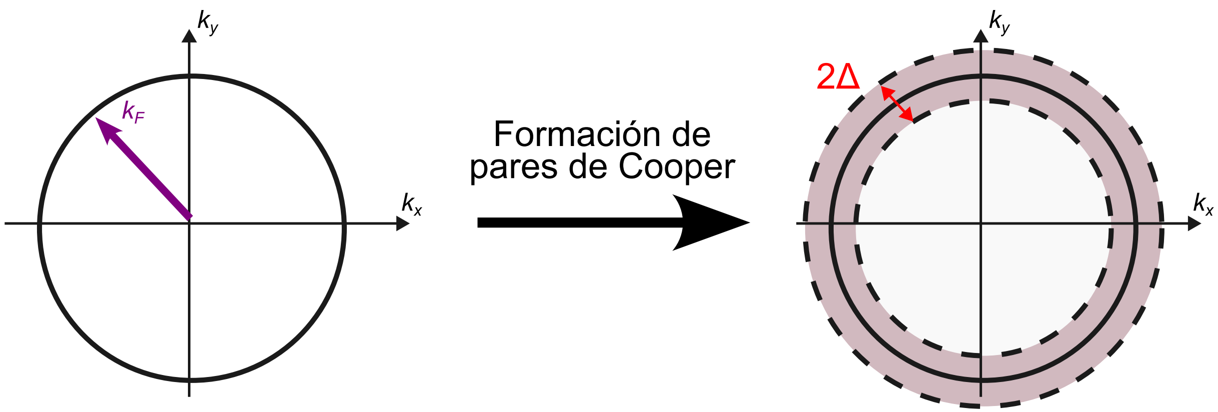
- La **ecuación de gap**:

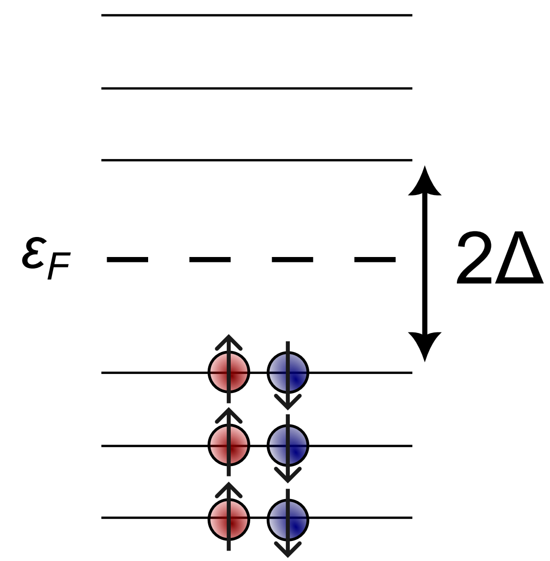
$$\Delta = \frac{U}{\mathcal{V}} \sum_{\boldsymbol{k}} u_{\boldsymbol{k}} v_{\boldsymbol{k}}^* = \frac{U}{\mathcal{V}} \sum_{\boldsymbol{k}} \langle \hat{P}_{\boldsymbol{k}} \rangle \quad \longrightarrow \quad \Delta = \frac{U}{\mathcal{V}} \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{\Delta}{2E_{\boldsymbol{k}}}.$$

J. Annett, *Superconductivity, superfluids and condensates* (Oxford University Press, 2004).

Teoría BCS

- El gap es la **diferencia de energía** entre el estado superfluido fundamental y el primer excitado.





- La teoría BCS predice que

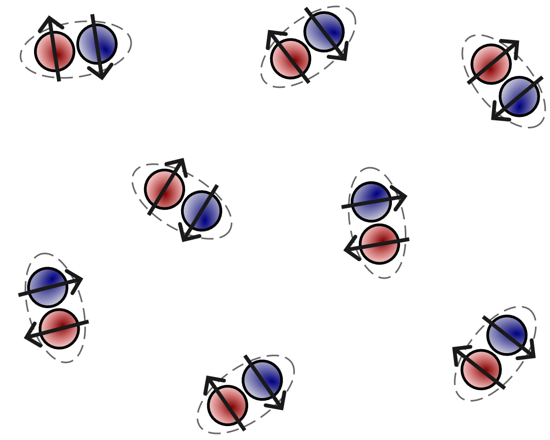
T. Papenbrock and G. F. Bertsch, Phys. Rev. C **59**, 2052 (1999).

$$\Delta/\epsilon_F = \frac{8}{e^2} e^{\frac{\pi}{2k_F a}}.$$

$$\epsilon_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}$$

J. Annett, *Superconductivity, superfluids and condensates* (Oxford University Press, 2004).

BEC



- En el **límite BEC**, el sistema es un **gas de Bose** que interactúa **repulsivamente**.
- Se puede trabajar en término de pares (**dímeros**) que se crean con el operador $\hat{P}^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}$.
- La **función de onda** de un gas **completamente condensado**:

$$|\Psi_{\mathrm{BEC}}\rangle \propto \exp\left(\alpha_0 \hat{P}_0\right)|0\rangle.$$

que permite llegar a ecuaciones similares a las de BCS.

- La longitud de scattering **repulsiva** entre dímeros:

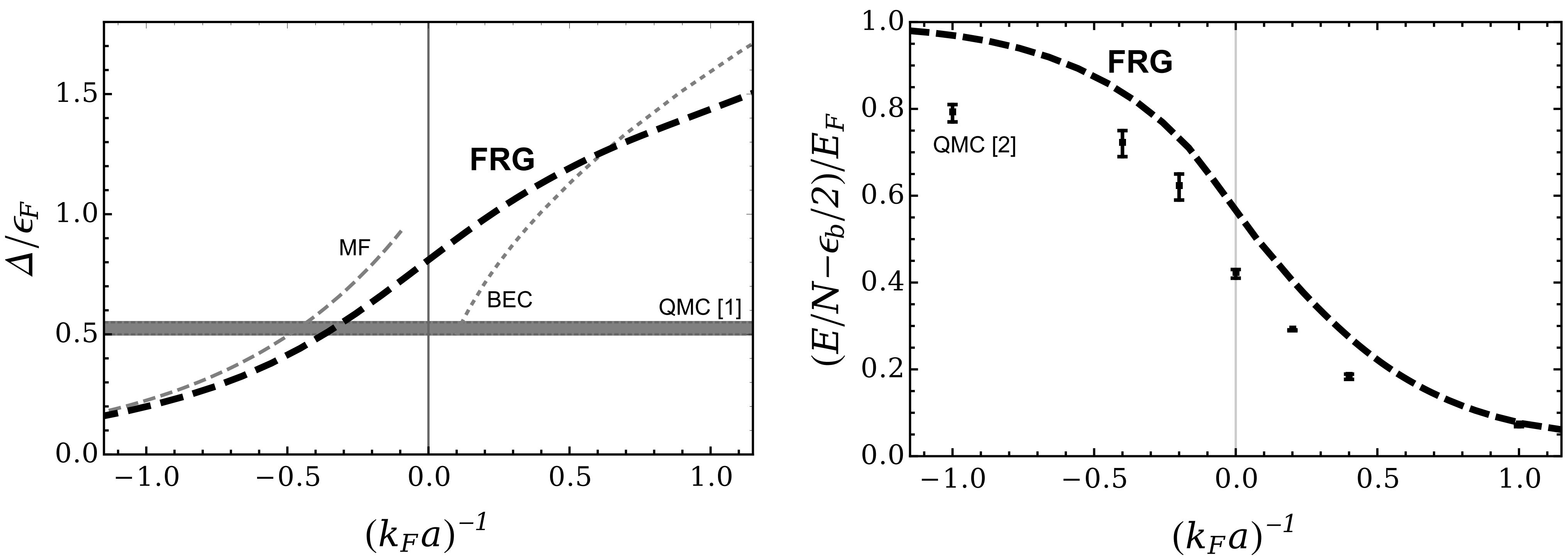
D. S. Petrov, C. Salomon, and G. V. Shlyapnikov, Phys. Rev. A **71**, 012708 (2005).

$$a_{dd} = 0.6a.$$

- Se puede obtener que

$$\Delta/\epsilon_F = \sqrt{16/3\pi k_F a}.$$

Algunos resultados



[1] J. Carlson, S.-Y. Chang, V. R. Pandharipande, and K. E. Schmidt, Phys. Rev. Lett. **91**, 050401 (2003).
[2] G. E. Astrakharchik, J. Boronat, J. Casulleras, and a. S. Giorgini, Phys. Rev. Lett. **93**, 200404 (2004).

Límite Unitario

- En el límite unitario $(a^{-1}=0)$ con rango efectivo cero $(r_{\rm eff}=0)$ **no hay escalas en el sistema**.
- La física debe ser **universal**.

Energía por partícula: $$\frac{E}{N}=\xi_s\frac{3}{5}\epsilon_F.$$

ξ_s : Parámetro de Bertsch

- Algunos resultados en el límite Unitario:

	ξ_s	Δ/ε_F
Campo Medio	0.59 [1]	0.68 [1]
Monte-Carlo	<0.383 [2]	0.54 [3]
FRG	-	0.46 [4]
Experimento	0.376 [5]	0.44 [6]

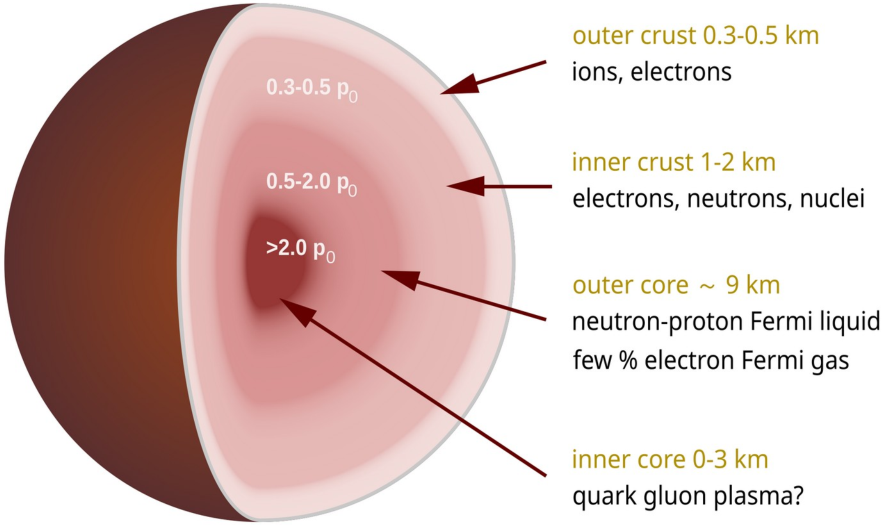
[1] J. R. Engelbrecht M. Randeria , and C. A. R. Sá de Melo , Phys. Rev. B **55**, 15153 (1997).
[2] G. E. Astrakharchik, J. Boronat, J. Casulleras, and S. Giorgini, Phys. Rev. Lett. **93**, 200404 (2004).
[3] J. Carlson, S.-Y. Chang, V. R. Pandharipande, and K. E. Schmidt, Phys. Rev. Lett. **91**, 050401 (2003).
[4] S. Floerchinger, M. M. Scherer, and C. Wetterich, Phys. Rev. A **81**, 063619 (2010).
[5] G. Zürn, T. Lompe, A. N. Wenz, S. Jochim, P. S. Julienne, and J. M. Hutson, Phys. Rev. Lett. **110**, 135301 (2013).
[6] A. Schirotzek, Y.-i. Shin, C. H.. Schunck, and W. Ketterle , Phys. Rev. Lett. **101**, 140403 (2008).

Crossover BCS-BEC

- **Gases de Fermi**. **Historia** del BCS-BEC crossover.
- Interacciones. Repaso **scattering** onda-*s*.
- **Detalle teórico**. Observables.
- Aplicaciones en **física nuclear**. Crossover **dos-dimensional**.

Estrellas de neutrones y materia neutrónica

- Las **estrellas de neutrones** se encuentran en su mayoría compuestas de…..neutrones.
- En su interior presentan **partículas superfluidas** y **superconductoras.**



- Podemos pensar que están compuestas por un gas de neutrones: **materia neutrónica**.
- La **interacción nuclear** es mucho más **complicada** que la entre átomos ultrafríos.
- Sin embargo, a **baja densidad** (corteza interna de una estrella de neutrones), la onda-*s* domina.

Estrellas de neutrones y materia neutrónica

- A **baja densidad**, la materia neutrónica es escencialmente un **gas de fermiones** de spin ½ que interactúa por **onda-s**.
- Es decir, gases de átomos ultrafríos permiten **simular** materia neutrónica a baja densidad.

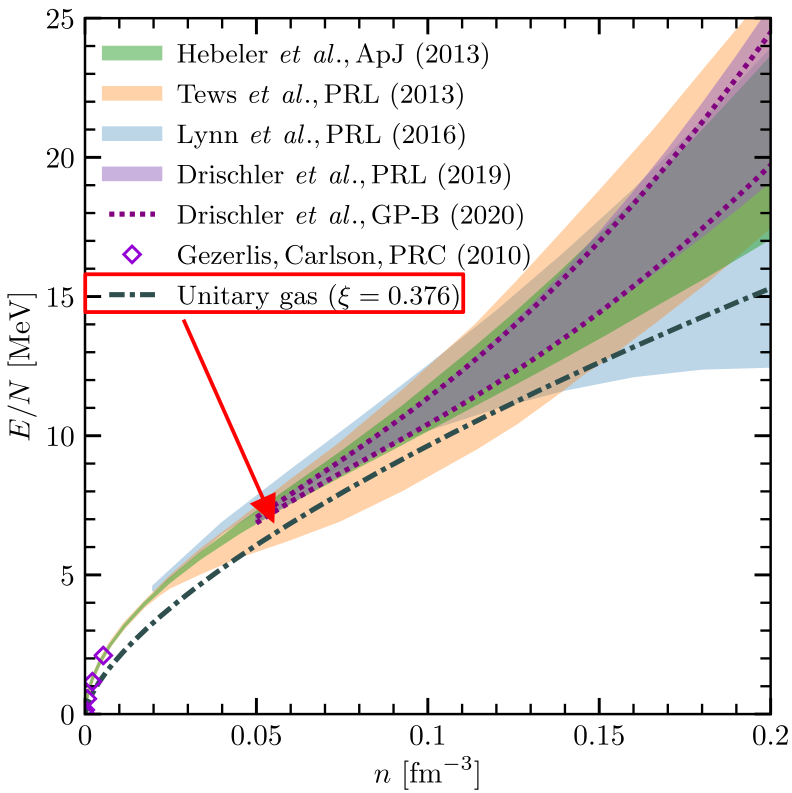


Figura tomada de S. Huth *et al*., Phys. Rev. C **103**, 025803 (2021).

- En la **corteza** de las estrellas de neutrones:

Crossover BCS-BEC

$$k_F \lesssim 1.5 \text{ fm}^{-1} \qquad \longrightarrow \qquad (k_F a_{\rm nn})^{-1} \lesssim 0.1$$

$$a_{\rm nn} \approx -18.5 \text{ fm}$$

- La superfluidez es relevante:
  - ➔ Neutron stars **glitches**.

J. M. Lattimer and M. Prakash, Science **304**, 536 (2004).

Interacciones en dos dimensiones

- En **dos dimensiones**, la amplitud de scattering toma la forma

$$f_0(k) \approx -\frac{1}{\log(-4/ka^2) - 2\gamma_E}.$$

a : **longitud de scattering** 2D de onda-*s*
$\gamma_E \approx 2.718$: Constante de Euler

- La longitud de scattering en dos dimensiones está relacionada a la de tres dimensiones (experimento) por:

$$a_{2\mathrm{D}} = a_z \left(2\sqrt{\frac{\pi}{A}} e^{-\gamma_E}\right) \exp\left(-\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{a_z}{a_{3\mathrm{D}}}\right)$$

$a_z = \sqrt{\hbar/m\omega_z}$
$A \approx 0.91$

D.S. Petrov and G.V. Shlyapnikov, Phys. Rev. A **64**, 012706 (2001).

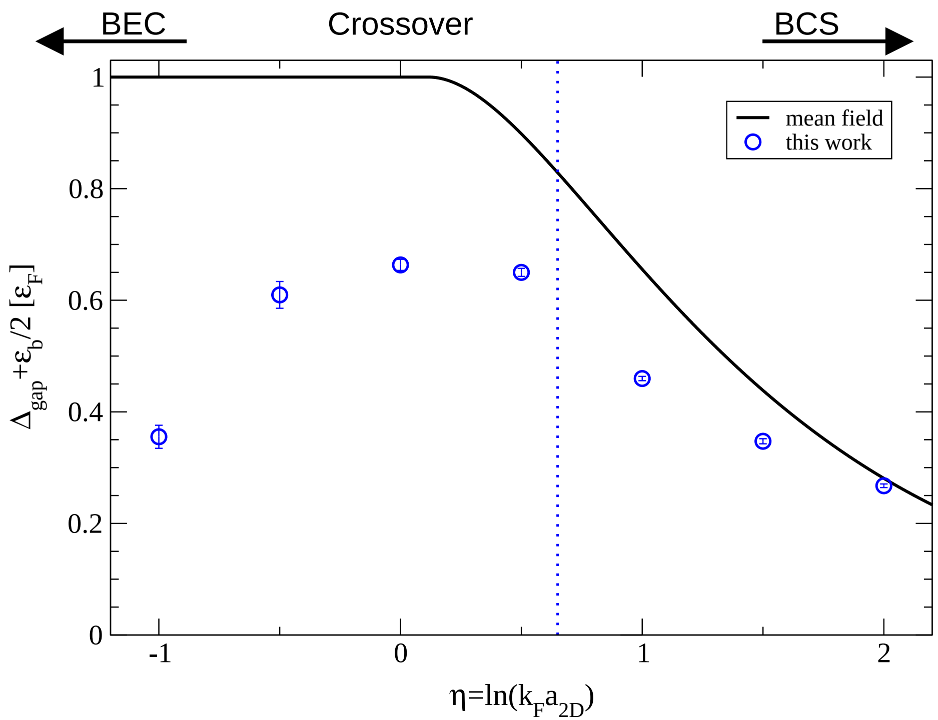
- En dos dimensiones **no existe límite Unitario**.

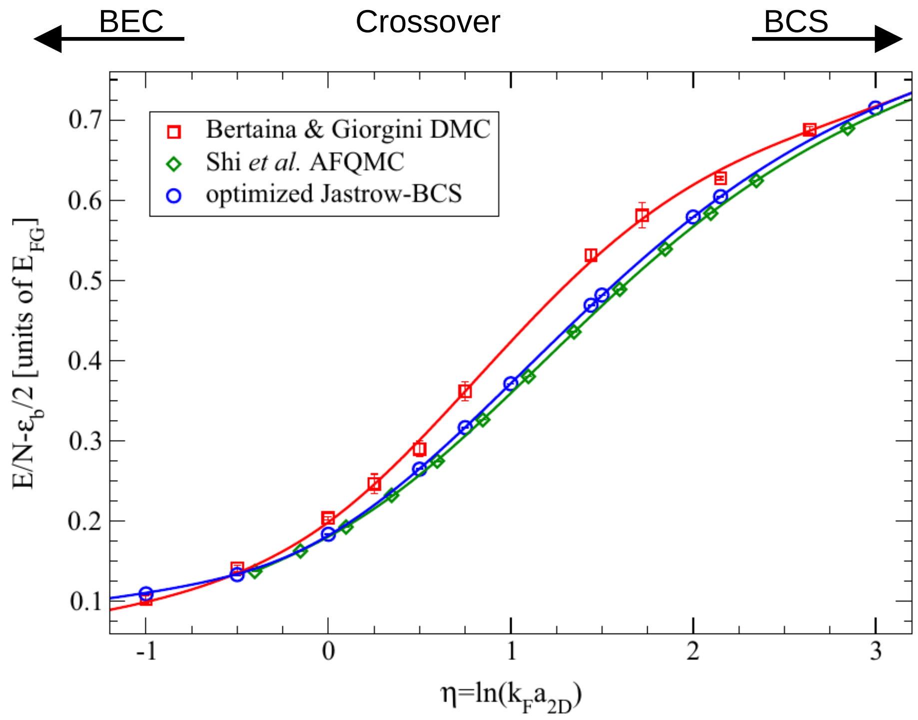
- Con interacciones atractivas **siempre se forma estado ligado**. Es decir, a **es siempre es positivo**.

Energía de ligazón: $$\epsilon_b = -\frac{4}{me^{2\gamma_E} a^2}$$

BCS-BEC crossover en dos dimensiones

- **También existe un crossover** en dos dimensiones.
- Es más desafiante de describir ya que las **fluctuaciones cuánticas son más importantes** en dimensiones bajas.
- Experimentalmente también es más desafiante de realizar.





Figuras tomadas de A. Galea *et al.*, Phys. Rev. A **93**, 023602 (2016).

BCS-BEC crossover en dos dimensiones

- En dos dimensiones **sólo existe** un **condensado** a **temperatura cero** (teorema de Mermin-Wagner)**.**
  N. D. Mermin and H. Wagner, Phys. Rev. Lett. **17**, 1133 (1966).
- Sin embargo, a temperatura finitas sí existe superfluidez y un **cuasicondensado**.
  C-T. Wu *et al*., Phys. Rev. Lett. **115**, 240401 (2015).
- La transición de fase superfluida es del tipo **BKT** (pares de vórtices-antivórtices).
  V. L. Berezinskii, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **59**, 907 (1970) [Sov. Phys. JETP **32**, 493 (1970)]. J. M. Kosterlitz and D. J. Thouless, J. Phys. C **6**, 1181 (1973).

Figura tomada de A. Galea *et al*., Phys. Rev. A **93**, 023602 (2016).

Otros escenarios y aplicaciones

- Crossover **uni-dimensional** y estados **FFLO**.
  A. E. Feiguin *et al.*, *BCS–BEC Crossover and Unconventional Superfluid Order in One Dimension* (Lecture Notes in Physics, vol 836. Springer, Berlin, 2011)
- Crossover BCS-BEC en **redes ópticas**.
  A. Koetsier, D. B. M. Dickerscheid, and H. T. C. Stoof, Phys. Rev. A **74**, 033621 (2006).
- Conexión con **superconductores de alta temperatura**.
  Q. Chen, J. Stajic, S. Tan, and K. Levin, Physics Reports **412**, 1 (2005).
- Crossover **relativista** y **superconductividad de color**.
  Y. Nishida and H. Abuki, Phys. Rev. D **72**, 096004 (2005). H. Abuki, Nucl. Phys. A **791**, 117 (2007).

Conclusiones

- Los **gases de átomos ultrafríos** han permitido estudiar **experimentalmente** el **crossover BCS-BEC**.
- El crossover es un sistema **fuertemente interactuante** que requiere el uso de técnicas teóricas sofisticadas.
- Ofrece **más física** que superfluidos débilmente interactuantes y **aplicaciones en diversos sistemas de muchos cuerpos**.