

Propagation d'un paquet d'onde

Définition du paquet d'onde

Un paquet d'ondes peut être défini comme un signal dont la distribution fréquentielle $\tilde{\psi}(\omega)$ est non nulle sur un intervalle $[\omega_m - \Delta\omega, \omega_m + \Delta\omega]$ avec $\Delta\omega \ll \omega_m$.

L'onde résultante s'écrit alors en représentation complexe sous la forme :

$$\underline{\psi}(x, t) = \int_{\omega_m - \Delta\omega}^{\omega_m + \Delta\omega} \tilde{\psi}(\omega) e^{-i(\omega t - k(\omega)x + \varphi(\omega))} d\omega$$

en prenant en compte l'existence éventuelle de déphasages $\varphi(\omega)$ entre les harmoniques et le caractère dispersif du milieu via $k(\omega)$. On a ci-dessus, « ni plus ni moins » que la transformée de Fourier de $\tilde{\psi}(\omega)$.

Vitesse de phase et vitesse de groupe

On reprend la relation générale précédente avec pour simplifier $\varphi(\omega)$ pour toute pulsation. On suppose toujours qu'il n'y a pas absorption. Dans ce cas le vecteur d'onde $k(\omega)$ est réel.

Avec la définition donnée pour un paquet d'onde, à savoir que $\Delta\omega \ll \omega_m$, on a alors $k(\omega)$ proche de $k_m = k(\omega_m)$ et on peut développer $k(\omega)$ au voisinage de ω_m à l'ordre 1 en :

$$k(\omega) \approx k_m + (\omega - \omega_m) \left(\frac{dk}{d\omega} \right) (\omega_m)$$

On pose alors $v_g = \frac{d\omega}{dk}(\omega_m)$ et on obtient :

$$k(\omega) \approx k_m + \frac{(\omega - \omega_m)}{v_g}$$

On en déduit alors :

$$\begin{aligned} \underline{\psi}(x, t) &= \int_{\omega_m - \Delta\omega}^{\omega_m + \Delta\omega} \tilde{\psi}(\omega) e^{-i(\omega t - k(\omega)x)} d\omega \\ &= \int_{\omega_m - \Delta\omega}^{\omega_m + \Delta\omega} \tilde{\psi}(\omega) e^{-i\left(\omega t - k_m x + \frac{(\omega - \omega_m)x}{v_g}\right)} d\omega \\ &= \int_{\omega_m - \Delta\omega}^{\omega_m + \Delta\omega} \tilde{\psi}(\omega) e^{-i\left((\omega - \omega_m + \omega_m)t - k_m x + \frac{(\omega - \omega_m)x}{v_g}\right)} d\omega \\ &= e^{-i(\omega_m t - k_m x)} \int_{\omega_m - \Delta\omega}^{\omega_m + \Delta\omega} \tilde{\psi}(\omega) e^{-i\left(\frac{(\omega - \omega_m)}{v_g}\left(t - \frac{x}{v_g}\right)\right)} d\omega \end{aligned}$$

soit

$$\underline{\psi}(x, t) = \underbrace{e^{j(\omega_m t - k_m x)}}_{\text{onde moyenne}} \underbrace{\int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} \tilde{\psi}(\omega) e^{j(\omega - \omega_m)\left[t - \frac{x}{v_g}\right]} d\omega}_{\text{onde enveloppe} = E\left(t - \frac{x}{v}\right)}$$

Comme dans le cas du battement entre 2 OPPHs, on peut écrire le paquet d'onde comme le produit de 2 ondes planes :

- une onde moyenne se propageant à la vitesse de phase :

$$v_\varphi = \frac{\omega_0}{k_0} \quad \text{Vitesse de phase}$$

correspondant à l'onde "intérieure", de pulsation (et donc de fréquence) élevée ω_0 .

- une onde enveloppe se propageant à la vitesse de groupe :

$$v_g = \frac{1}{\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{(\omega_0)}} = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{(\omega_0)} \quad \text{Vitesse de groupe}$$

correspondant à l'enveloppe puisqu'elle oscille à une pulsation $\omega - \omega_m < \Delta\omega \ll \omega_m$ plus faible que celle de l'onde précédente.

v_g est toujours la vitesse de propagation de l'information et souvent la vitesse de propagation de l'énergie, car l'énergie et l'information recueillie par les détecteurs sont proportionnelles à $|u(x,t)|^2$, donc seulement à l'enveloppe^a (la crête de l'enveloppe correspondant à un bit égal à 1).

a. Attention, ceci n'a rien de général. C'est notamment faux dans un milieu absorbant. Pour les milieux faiblement dispersifs et sans absorption $k'' = 0$ (c'est le cas ici), on a v_g (qui est la vitesse de propagation du maximum de l'enveloppe du paquet d'onde) = v_e vitesse de propagation de l'énergie.

En général, $v_g \neq v_\varphi$ dans ce cas l'onde se déforme. Mais cette déformation n'est pas gênante si l'information est portée par l'enveloppe.

L'égalité est obtenue pour toute pulsation si $\frac{d\omega}{dk} = \frac{\omega}{k}$ c'est-à-dire s'il existe une relation linéaire entre ω et k : on dit que le milieu est non dispersif. En effet :

$$\frac{d\omega}{dk} = \frac{\omega}{k} \Leftrightarrow \omega = cste \times k$$

On peut montrer que dans les milieux non absorbants, la vitesse de groupe s'identifie à la vitesse de propagation de l'énergie ou de manière équivalente, de l'information.

La vitesse de groupe est donc toujours plus petite que la célérité de la lumière dans le vide.

En revanche, il n'est pas rare de trouver des vitesses de phase supérieures à c . Ce dernier point ne constitue pas une difficulté : en effet la vitesse de phase (dépendant de ω) pour une pulsation donnée correspond à la vitesse de propagation d'une OPPH de cette pulsation. Or on sait qu'une onde plane n'a pas de réalité physique.

On retiendra que :

Un paquet d'ondes se met sous la forme d'une onde moyenne se propageant à la vitesse de phase $v_\varphi = \frac{\omega_m}{k(\omega_m)}$ dont l'amplitude est modulée par une enveloppe se propageant à la vitesse de groupe $v_g = \frac{d\omega}{dk}(\omega_m)$.

Transition : le paquet d'onde s'est propagé ici sans distorsion, c'est à dire que la forme de l'enveloppe ne s'est pas modifiée car la vitesse de groupe ne dépend pas de ω .

Déformation du paquet d'onde lors de sa propagation

Tant que la dispersion du milieu est faible c'est-à-dire tant que ω varie lentement avec k , la vitesse de transport de l'énergie peut être identifiée avec la vitesse de groupe. On a en effet effectué un développement limité à l'ordre 1 en $(\omega - \omega_m)$: pour un milieu plus dispersif, il faudrait aller à l'ordre 2 (ou plus ?). D'une manière générale, si le spectre en fréquence est large ou simplement pour une longue durée de propagation, un développement limité au second ordre de $k(\omega)$ peut être nécessaire. Cela revient à dire que la variation de la vitesse de groupe avec ω doit être prise en compte ; on parle alors de « dispersion de la vitesse de groupe ». On montre dans ce cas que l'enveloppe de l'onde se déforme lors de la propagation. Il en est ainsi, par exemple, des impulsions lumineuses dans les fibres optiques utilisées dans les transmissions ; leur élargissement progressif lors de la propagation limite le débit d'information utile. On y remédie en « recomprimant » les impulsions.

Remarques :

- Dans le cas d'un milieu dispersif et absorbant ($k' \neq 0$, $k'' \neq 0$), on a $v_g = \frac{d\omega}{dk'}$. La vitesse de groupe n'est assimilable à la vitesse de l'énergie que si k'' dépend suffisamment peu de la pulsation pour être considéré comme complètement indépendante.
- Dans le cas d'un milieu absorbant et non dispersif ($k' = 0$, $k'' \neq 0$), on a $u(x, t) = u_0 \cos \omega t e^{-k''x}$. C'est une onde évanescence, elle ne se propage pas, mais s'atténue.