



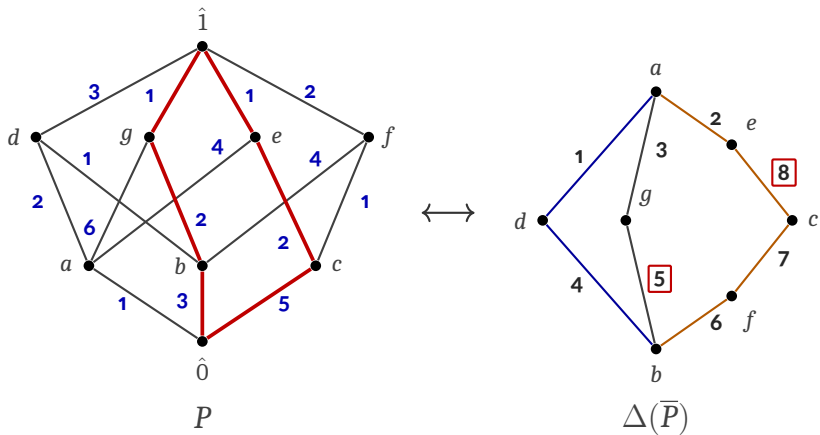
Un'introduzione alla topologia combinatoria attraverso i semplici, i complessi d'ordine e la shellability

Gabriel Antonio Videtta





Esempio di studio finale





Indice

1 Complessi simpliciali, complessi d'ordine e face poset

► Complessi simpliciali, complessi d'ordine e face poset

► Shellability e teorema di Björner–Wachs

► EL-labeling ed EL-shellability



Complessi simpliciali astratti

1 Complessi simpliciali, complessi d'ordine e face poset

Definizione (Complesso simpliciale astratto)

Un *complesso simpliciale astratto* $\mathcal{K}$ su un insieme di vertici V è una collezione di sottoinsiemi di V che soddisfa le seguenti proprietà:

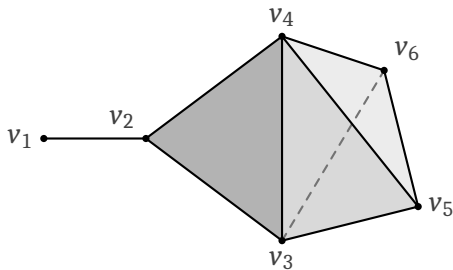
- (i.) $\{v\} \in \mathcal{K}$ per ogni $v \in V$,
- (ii.) Se $G \in \mathcal{K}$ e $F \subseteq G$, allora $F \in \mathcal{K}$.

- **Dimensione:** $\dim\{v_1, \dots, v_{n+1}\} = n$ e $\dim \mathcal{K} = \max_{\sigma \in \mathcal{K}} \dim \sigma$.
- **Complesso puro:** Se tutte le facce massimali hanno la stessa dimensione.
- **Notazione:** Usiamo $\|\mathcal{K}\|$ per denotare una qualsiasi realizzazione geometrica di $\mathcal{K}$.



Un esempio di complesso simpliciale

1 Complessi simpliciali, complessi d'ordine e face poset



Un complesso simpliciale non puro con tre facce massimali: l'1-simplesso $\{v_1, v_2\}$, il 2-simplesso $\{v_2, v_3, v_4\}$ e il 3-simplesso $\{v_3, v_4, v_5, v_6\}$.



Face poset e complessi d'ordine

1 Complessi simpliciali, complessi d'ordine e face poset

Definizione (Face poset)

Il *face poset* di $\mathcal{K}$, denotato con $FP(\mathcal{K})$, è l'insieme delle facce non vuote $\mathcal{K} \setminus \{\emptyset\}$ ordinato dalla relazione di inclusione.

Definizione (Complesso d'ordine)

Sia $(P, \leq)$ un poset. Il *complesso d'ordine* $\Delta(P)$ di P è il complesso il cui insieme di vertici è dato da P e i cui semplici sono esattamente le catene di P .

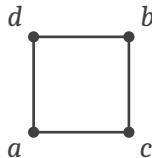
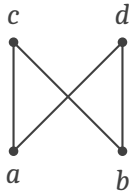
Poiché i semplici di $\Delta(P)$ corrispondono alle catene di P , le facce massimali corrispondono precisamente alle *catene massimali*.



Esempio: il poset “quadrato”

1 Complessi simpliciali, complessi d'ordine e face poset

Sia $P = \{a, b, c, d\}$ dotato delle relazioni $a, b < c, d$.



Il diagramma di Hasse di P (*a sinistra*) e la realizzazione geometrica del suo complesso d'ordine $\Delta(P)$ (*a destra*).

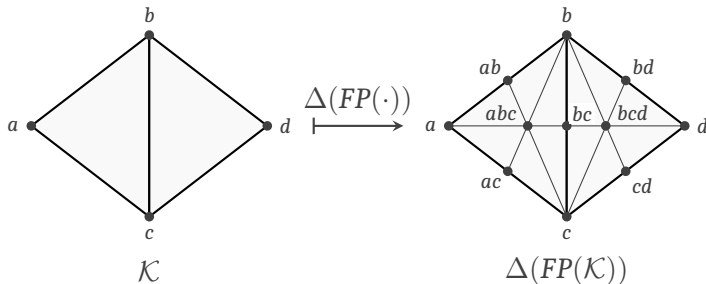


Suddivisione baricentrica

1 Complessi simpliciali, complessi d'ordine e face poset

Teorema

Sia $\mathcal{K}$ un complesso simpliciale. Allora $\|\mathcal{K}\|$ è omeomorfo a $\|\Delta(FP(\mathcal{K}))\|$, comunemente noto come la **suddivisione baricentrica** di $\mathcal{K}$.





Riduzione alla parte propria

1 Complessi simpliciali, complessi d'ordine e face poset

Se P possiede un massimo $\hat{1}$ o un minimo $\hat{0}$, ogni semplice in $\Delta(P)$ è connesso a quell'estremo. Geometricamente, $\|\Delta(P)\|$ è un **cono**, che ha omologia banale.

Definizione (Parte propria di un poset)

Sia $(P, \leq)$ un poset. La sua *parte propria*, denotata con $\bar{P}$, è il poset ottenuto rimuovendo gli estremi, qualora esistano:

$$\bar{P} = P \setminus \{\hat{0}, \hat{1}\}$$



Indice

2 Shellability e teorema di Björner–Wachs

► Complessi simpliciali, complessi d'ordine e face poset

► Shellability e teorema di Björner–Wachs

► EL-labeling ed EL-shellability



Complessi simpliciali shellabili

2 Shellability e teorema di Björner–Wachs

Definizione (Shelling)

Uno *shelling* di $\mathcal{K}$ è un ordinamento totale delle facce massimali $F_1, \dots, F_n$ tale che:

$$\left(\bigcup_{i=1}^{k-1} \langle F_i \rangle \right) \cap \langle F_k \rangle \text{ è puro di dimensione } \dim(F_k) - 1 \quad \forall k > 1,$$

dove $\langle F_k \rangle$ denota il sottocomplesso di tutte le facce di F_k .

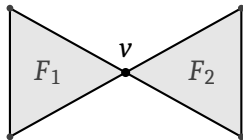
Denotiamo il sottocomplesso generato dalle prime $(k - 1)$ facce massimali con:

$$\mathcal{K}_k = \bigcup_{i=1}^{k-1} \langle F_i \rangle.$$

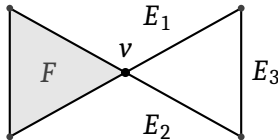


Esempio di shelling

2 Shellability e teorema di Björner–Wachs



Σ_1 (non shellabile)



Σ_2 (shellabile)

In Σ_1 , attaccare F_2 a F_1 produce un'intersezione 0-dimensionale non valida. In Σ_2 , attaccare E_1 a F richiede un'intersezione 0-dimensionale, fornendo uno shelling valido: F, E_1, E_2, E_3 .



Facce omologiche

2 Shellability e teorema di Björner–Wachs

Definizione (Faccia omologica)

Sia $F_1, \dots, F_n$ uno shelling di $\mathcal{K}$. Una faccia massimale F_k è detta *faccia omologica* se il suo intero bordo è contenuto nel sottocomplesso $\mathcal{K}_k$:

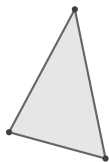
$$\partial\langle F_k \rangle \subseteq \mathcal{K}_k.$$

- **Intuizione geometrica:** Una faccia massimale di omologia “chiude un buco”.

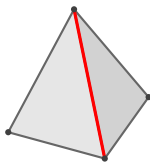


Esempio: bordo del tetraedro

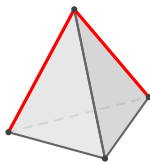
2 Shellability e teorema di Björner–Wachs



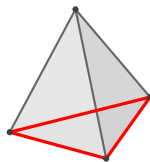
Passo 1: F_1



Passo 2: $F_1 \cup F_2$



Passo 3: $\bigcup_{i=1}^3 F_i$



Passo 4: $\mathcal{K}$

A ogni passo k , gli **spigoli rossi** denotano l'intersezione con $\mathcal{K}_k$. F_4 si attacca lungo il suo *intero bordo*, agendo come l'unica faccia massimale di omologia e chiudendo il vuoto per formare S^2 .



Il teorema di Björner–Wachs

2 Shellability e teorema di Björner–Wachs

Teorema (Björner–Wachs)

Sia $\mathcal{K}$ un complesso shellabile. La sua realizzazione geometrica $\|\mathcal{K}\|$ ha il tipo di omotopia di un bouquet di sfere:

$$\|\mathcal{K}\| \simeq \bigvee_i \left(\bigvee_{r_i} S^i \right)$$

dove, per ogni intero i , il numero di sfere i -dimensionali S^i nel bouquet è esattamente il numero di facce omologiche i -dimensionali nello shelling.



Indice

3 EL-labeling ed EL-shellability

- ▶ Complessi simpliciali, complessi d'ordine e face poset
- ▶ Shellability e teorema di Björner–Wachs
- ▶ EL-labeling ed EL-shellability



Edge-labeling e catene

3 EL-labeling ed EL-shellability

Definizione (Edge-labeling)

Un *edge-labeling* di un poset P è una mappa $\lambda: E(P) \rightarrow \mathbb{Z}$ che assegna un intero a ogni relazione di ricoprimento $x \lessdot y$ del diagramma di Hasse.

Ogni catena $C = \{x_0 \lessdot x_1 \lessdot \cdots \lessdot x_k\}$ produce una sequenza di etichette:

$$\lambda(C) = (\lambda(x_0, x_1), \lambda(x_1, x_2), \dots, \lambda(x_{k-1}, x_k)).$$



EL-labeling ed EL-shellability

3 EL-labeling ed EL-shellability

Definizione (EL-labeling)

Un edge-labeling λ è un *EL-labeling* se per ogni intervallo $[x, y]$ in P :

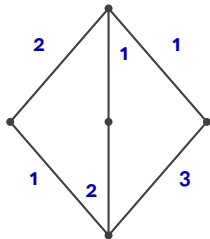
- (i.) Esiste un'**unica** catena massimale C strettamente crescente secondo le etichette di λ in $[x, y]$.
- (ii.) Questa catena C è minore lessicograficamente secondo le etichette di λ di qualsiasi altra catena massimale in $[x, y]$.

Un poset P che ammette un tale labeling è detto *EL-shellabile*.

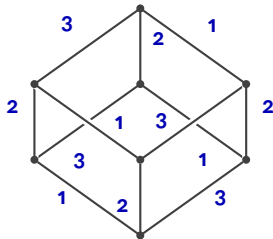


Esempio di EL-labeling

3 EL-labeling ed EL-shellability



Poset A



Poset B



EL-shellabile implica shellabile

3 EL-labeling ed EL-shellability

Teorema

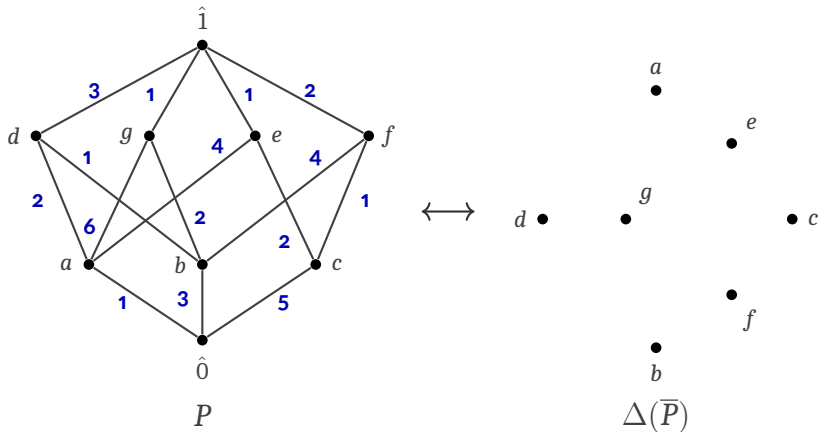
Sia P un poset limitato dotato di un EL-labeling λ . Allora:

- (i.) Qualsiasi ordinamento lineare compatibile con λ delle catene massimali di P costituisce uno shelling valido del suo complesso d'ordine $\Delta(P)$.*
- (ii.) La restrizione di questo ordinamento alle catene massimali della parte propria $\bar{P}$ induce uno shelling valido di $\Delta(\bar{P})$.*
- (iii.) Le facce omologiche sono indotte dalle catene debolmente decrescenti secondo l'etichettatura di λ .*



Esempio di EL-labeling II

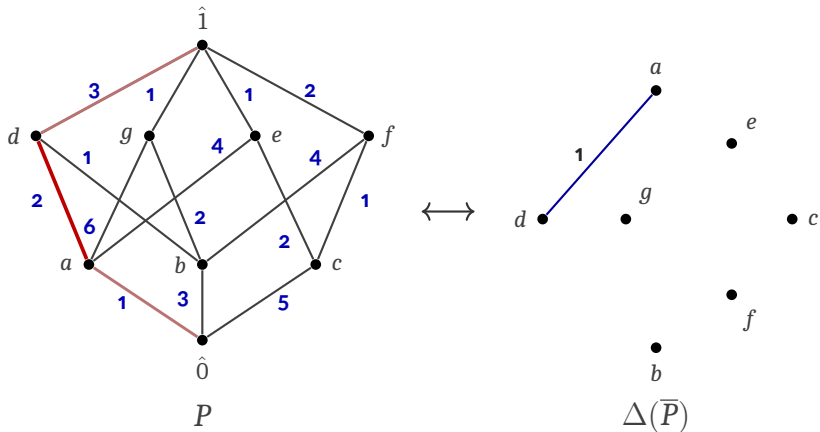
3 EL-labeling ed EL-shellability





Esempio di EL-labeling II

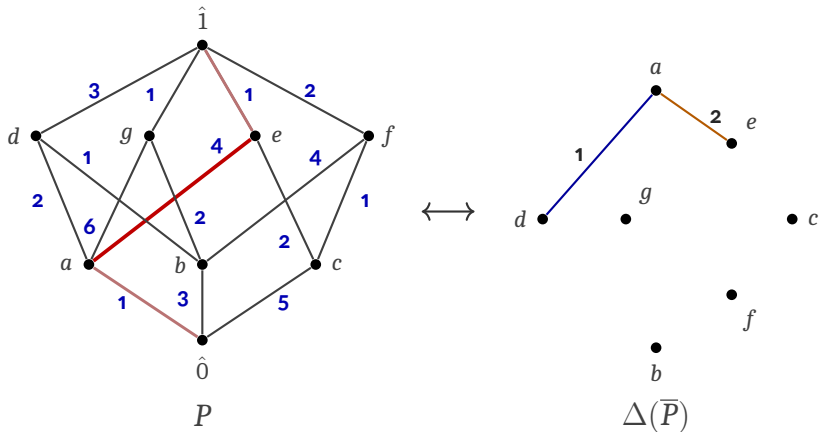
3 EL-labeling ed EL-shellability





Esempio di EL-labeling II

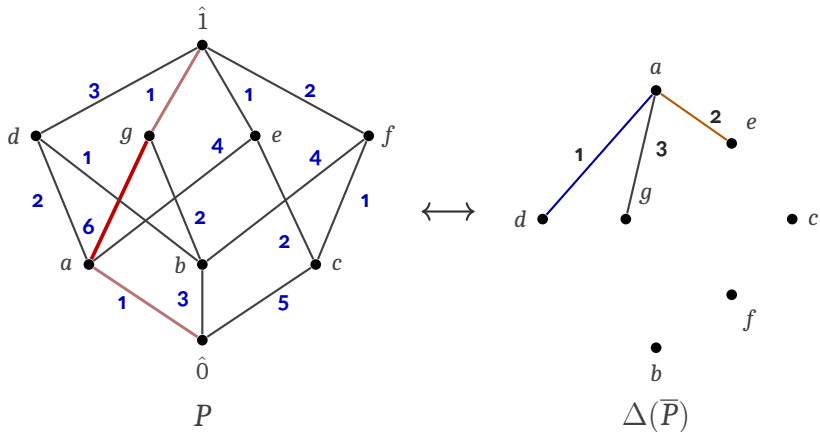
3 EL-labeling ed EL-shellability





Esempio di EL-labeling II

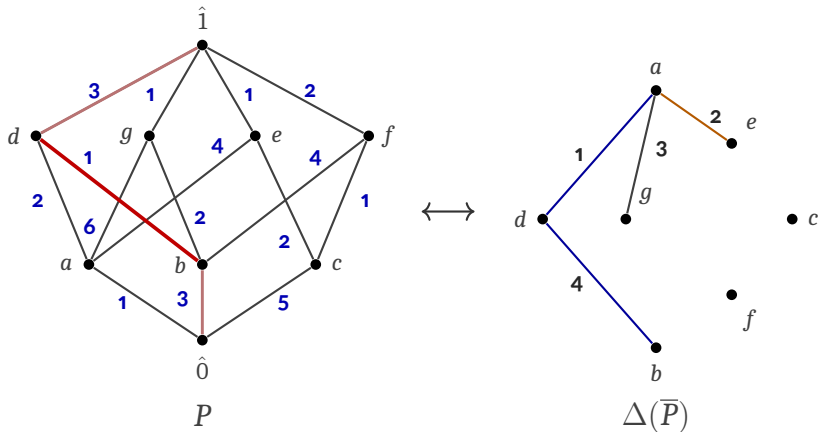
3 EL-labeling ed EL-shellability





Esempio di EL-labeling II

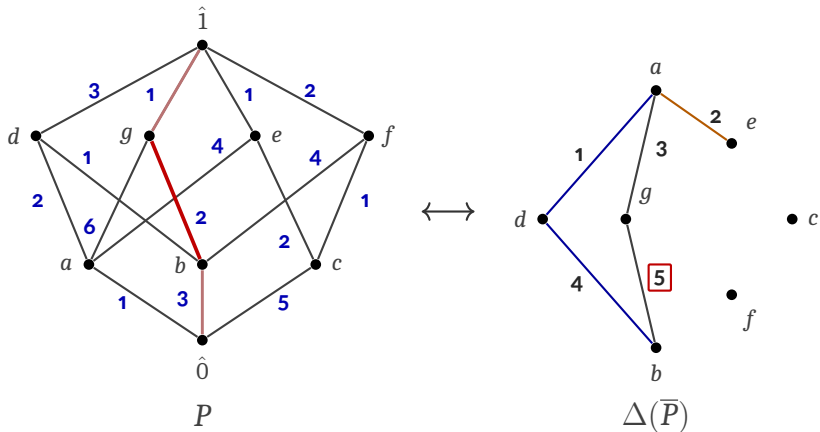
3 EL-labeling ed EL-shellability





Esempio di EL-labeling II

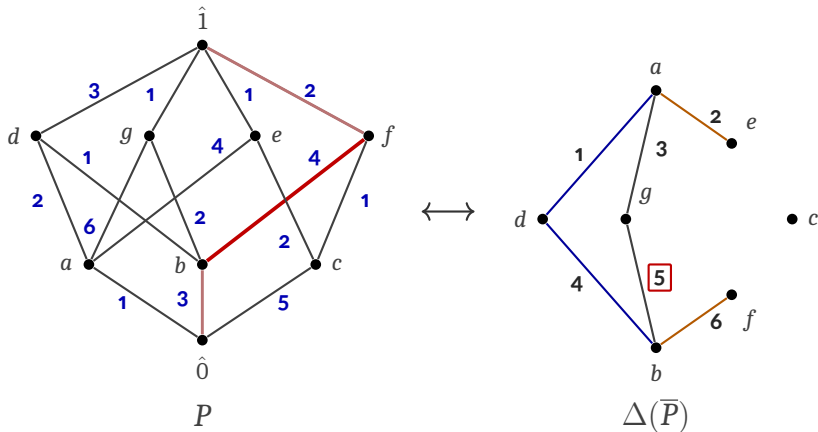
3 EL-labeling ed EL-shellability





Esempio di EL-labeling II

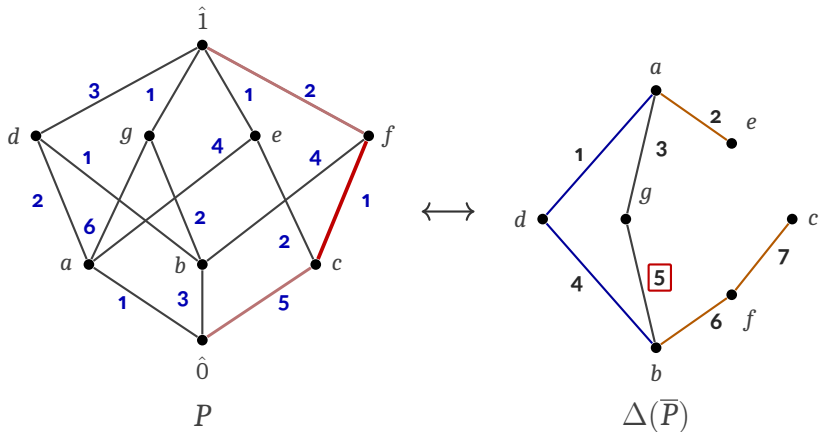
3 EL-labeling ed EL-shellability





Esempio di EL-labeling II

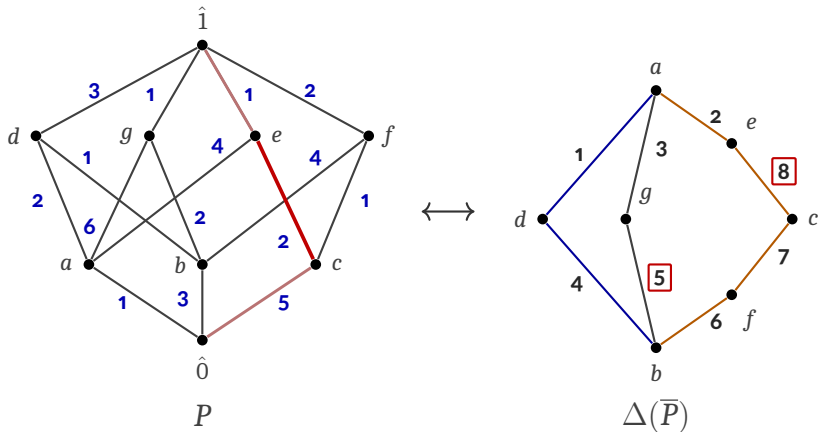
3 EL-labeling ed EL-shellability





Esempio di EL-labeling II

3 EL-labeling ed EL-shellability





Grazie per l'attenzione!