Elektromagnetischer Feldterror

1. Nützliches Wissen $\operatorname{rot} E \equiv 0$

Stromdichte $\vec{j}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})\vec{v}(\vec{r})$

Elektrostatik heißt $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$, $\vec{j} = 0$ und Magnetostatik $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$ sonst spricht man von Elektrodynamik

1.1. Konstanten

Lichtgeschwind.	$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = 299\,792\,458\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
Elektr. Feldkonst.	$\varepsilon_0 = 8.854\,188 \times 10^{-12}\,\mathrm{F\,m^{-1}}$
Magn. Feldkonst.	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{H\,m^{-1}}$

1.2. Mathematik

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0		0

$z = a + b\mathbf{i} \neq 0$ in Polarkoordinaten:
$z = r(\cos(\varphi) + \mathbf{i}\sin(\varphi)) = r \cdot e^{\mathbf{i}\varphi}$

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \varphi = \arg(z) = \begin{cases} +\arccos\left(\frac{a}{r}\right), & b \geq 0 \\ -\arccos\left(\frac{a}{r}\right), & b < 0 \end{cases}$$

Multiplikation: $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathbf{i}\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$
Division: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathbf{i}\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

n-te Potenz: $z^n = r^n \cdot e^{n\varphi\mathbf{i}} = r^n(\cos(n\varphi) + \mathbf{i}\sin(n\varphi))$

n-te Wurzel: $\sqrt[n]{z} = z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + \mathbf{i}\sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right)$
$k = 0, 1, \ldots, n-1$

Logarithmus: $\ln(z) = \ln(r) + \mathbf{i}(\varphi + 2k\pi)$ (Nicht eindeutig!)

1.3. Maxwellsche Gleichungen (Naturgesetze)

Gaußsches Gesetz (inhom.) $\operatorname{div}\vec{D} = \varrho$	Faradaysches ind. Gesetz $\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
Quellfreiheit des magn. Feldes $\operatorname{div}\vec{B} = 0$	Ampèrsches Gesetz (inhom.) $\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

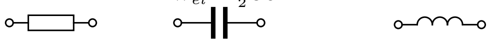
Zusammen mit Materialgleichungen bildet $(\vec{E}, \vec{H})$ ein 6 komponentiges Elektromagnetisches Feld

1.4. Materialgleichungen

In linearen, räumlich und zeitlich homogenen Medien:
$\vec{D} = \epsilon\vec{E}$; $\vec{H} = \frac{1}{\mu}\vec{B}$; Ohmsches Gesetz: $\vec{j} = \sigma\vec{E}$

1.5. Bauteilgleichungen

Resistiv	**Kapazitiv**	**Induktiv**
$\mathrm{d}I = G\,\mathrm{d}U$	$\mathrm{d}Q = C\,\mathrm{d}U$	$\mathrm{d}\Phi_M = L\,\mathrm{d}I$
$\vec{j} = \sigma\vec{E}$	$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$	$\vec{B} = \mu\vec{H}$
$\mathrm{d}I = \vec{j}\,\mathrm{d}A$	$\mathrm{d}U = \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{r}$	$\mathrm{d}\Phi_M = \vec{B}\,\mathrm{d}A$
$\vec{j} = qn\vec{v}$	$Q(V) \equiv \oiint_{\partial V} \vec{D}\,\mathrm{d}\vec{A}$	$I(A) \equiv \oint_{\partial A} \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{r}$
Widerst. $R = \rho\frac{l}{A}$	Kondens. $C = \frac{Q}{U} = \varepsilon\frac{A}{d}$, $W_{el} = \frac{1}{2}CU^2$	Spule $L = \mu A\frac{N^2}{l}$



	D-Feld	H-Feld
Durchflutung	$\oiint_{\partial V} \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{a} \equiv Q(V)$	$\oint_{\partial A} \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = I(A)$
Vereinfacht	$4\pi r^2 D(r) = Q(V)$	$2\pi r H(r) = I(A)$
Material	$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon}$	$\vec{B} = \mu\vec{H}$
Divergenz	$\operatorname{div}\vec{D} = \rho$	$\operatorname{div}\vec{B} = 0$
Rotation	$\operatorname{rot}\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$	$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

1.6. Formeln der Elektrostatik

Coulombsches Gesetz: $\vec{F} = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$

Elektrische Feldstärke: $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$ $\quad \operatorname{rot} E = 0$

Elektrostatische Felder sind konservativ $\Leftrightarrow U = \Phi(P_1) - \Phi(P_2) = \int_{P_1}^{P_2}\vec{E}\,d\vec{r}$ ist wegunabhängig

Potential: $\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$

Poissongleichung: $\operatorname{div}(\varepsilon\operatorname{grad}(\Phi)) = -\varrho$ mit $\vec{E} = -\operatorname{grad}\Phi$
Oberflächenladungsdichte: $\sigma = \vec{D} \cdot \vec{N}$
Energie: $W_{12} = \int_C \vec{F}d\vec{r} = q \cdot U_{12}$
Energiedichte: $w_{el} = \frac{1}{2}\vec{E}\vec{D}$

1.7. Formeln zu stationären Strömen

$I = \frac{dQ}{dt} = \int_A \vec{j}d\vec{a}$ mit Stromdichte $\vec{j} = qn\vec{v} = |q|\,n\mu\vec{E}$

Ohmsches Gesetz: $\vec{j} = \sigma\vec{E}$ $\quad U = RI$ mit $R = \frac{1 \cdot l}{\sigma \cdot A}$
Verlustleistungs(dichte): $p_{\mathrm{el}} = \vec{j}\vec{E}$ $\quad P = UI$
Ladungsbilanzglg. (int, diff): $\int_{\partial V}\vec{j}d\vec{a} = -\frac{dQ(V)}{dt}$ $\quad \operatorname{div}\vec{j} + \frac{\partial\varrho}{\partial t} = 0$

1.8. Formeln der Magnetostatik

Lorentzkraft(dichte): $\vec{F}_L = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$ $\quad \vec{f}_L = \vec{j} \times \vec{B}$
Elektromagnetische Kraft: $\vec{F}_{em} = q \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$
Drehmoment einer Leiterschleife: $\vec{M} = I\vec{A} \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B}$

1.9. Formeln zur Induktion

Magnetischer Fluss: $\Phi_{\mathrm{mag}} = \int_A \vec{B}d\vec{a}$
Bewegungsinduktion: $U_{\mathrm{ind}} = -\frac{d\Phi_{\mathrm{mag}}}{dt}$
Ruheinduktion: $U_{\mathrm{ind}} = -\int_{A(t)}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}d\vec{a} + \int_{\partial A(t)}(\vec{v} \times \vec{B})d\vec{r}$

1.10. Integralgleichungen

nach Satz von Gauß:
$\int_{\partial V}\vec{D}d\vec{a} = \int_V \operatorname{div}\vec{D}d^3r$
$\int_{\partial A}\vec{H}d\vec{r} = \int_A \operatorname{rot}\vec{H}d\vec{a}$

1.11. Durchflutungsgesetze:

$$\boxed{\oiint_{\partial V}\vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{a} \equiv Q(V)} \qquad \boxed{\oint_{\partial A}\vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = I(A) = \int_A \vec{j}\,\mathrm{d}\vec{a}}$$

$$\boxed{\operatorname{div}(\varepsilon \cdot \operatorname{grad}(\Phi)) = -\rho}$$

2. Das elektrische Feld

1. Wird erzeugt von Ladung oder sich veränderndes Magnetfeld
2. Innerhalb eines idealen Leiters ist das E-Feld Null(Influenz).
3. Die Feldlinien stehen immer senkrecht auf einer Leiteroberfläche.
4. Die Feldlinien laufen von positiven zu negativen Ladungen.
5. Bei Kugelladungen sinkt das E-Feld radial mit $\frac{1}{r^2}$
6. Bei unendlicher Linienladung sinkt das E-Feld radial mit $\frac{1}{r}$
7. Bei unendlicher Flächenladung bleibt das E-Feld konstant.
8. Feldlinien verlaufen lieber in hohem ε_r

Spezialfall zylindrischer Leiter: $\phi = -\frac{Q}{2\pi\epsilon l}ln(\frac{r}{r_0}) + c$

2.1. Elektrische Energiedichte

Energie die in einem Bereich nötig ist, um alle Ladungen aus dem unendlichen an ihre Position zu bewegung.

$$W_{el} = \sum_{k=2}^{N}\Delta W_{el}^{(k)} = \frac{1}{8\pi\varepsilon}\sum_{\substack{i,k=1 \\ i\neq k}}^{N}\frac{q_i q_k}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|} = \iiint_V\iiint_V\frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\,\mathrm{d}^3r\,\mathrm{d}^3r'$$

Substitutionsregel:
$q_i = \mathrm{d}Q(\vec{r}_i) = \rho(\vec{r}_i)\,\mathrm{d}V$
$\sum_{i=1}^{N}\{\vec{r}_i\ldots\}q_i \rightarrow \iiint_V\{\vec{r}_i\ldots\}\rho(\vec{r})\,\mathrm{d}V$

$$\delta W_{el} = \iiint_V \Phi(\vec{r})\delta\varrho(\vec{r})\,\mathrm{d}^3r = \iiint_V \vec{E} \cdot \delta\vec{D}\,\mathrm{d}^3r$$

2.2. Energie

Die Gesamtenergie einer Ladungsverteilung mit n Ladungen besteht aus $\frac{1}{2}(n^2 + n)$ summierten Termen.

	Elektrisch	Magnetisch
	$\delta w_{\mathrm{el}} = \vec{E} \cdot \delta\vec{D}$	$\delta w_{\mathrm{mag}} = \vec{H} \cdot \delta\vec{B}$
Energiedichte:	$w_{\mathrm{el}} = \int_0^{\vec{D}}\vec{E}'\,\mathrm{d}\vec{D}'$	$w_{\mathrm{mag}} = \int_0^{\vec{B}}\vec{H}'\,\mathrm{d}\vec{B}'$
Falls $\varepsilon = \mathrm{const.}$ $\mu = \mathrm{const.}$	$w_{\mathrm{el}} = \frac{1}{2}\vec{E}\vec{D} = \frac{\varepsilon}{2}\vec{E}^2 = \frac{1}{2\varepsilon}\vec{D}^2$	$w_{\mathrm{mag}} = \frac{1}{2}\vec{H}\vec{B} = \frac{\mu}{2}\vec{H}^2 = \frac{1}{2\mu}\vec{B}^2$
Energie:	$W_{\mathrm{el}} = \int_V w_{\mathrm{el}}\,\mathrm{d}V$	$W_{\mathrm{mag}} = \int_V w_{\mathrm{mag}}\,\mathrm{d}V$

Leistung: $P_{\mathrm{em}} = \int_V \Pi_{\mathrm{em}}\,\mathrm{d}V = -\iint_V \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r})\,\mathrm{d}V$

Energie eines Teilchens beim durchlaufen einer Spannung: $E = U \cdot Q$
Energie des el. Feldes im Plattenkondensator: $E = \frac{1}{2}EDV = \frac{1}{2}UQ$

2.3. Elektromagnetisches Feld

Poynting Vektor: $\vec{S} := \vec{E} \times \vec{H}$
Leistungsflussdichte: $\vec{J}_{\mathrm{elmag}} = \vec{E} \times \vec{H} + \vec{S}_0$ ($\vec{S}_0 = 0$, falls voneinander unabhängige Quellen)
Extensive Größe X besitzt eine Volumendichte $x(\vec{r}, t)$, so dass für jedes Kontrollvolumen $V \subset \mathbb{R}^3$ gilt: $X(V) = \int_V x(\vec{r}, t)\,\mathrm{d}V$
Extensive Größe ist eine Größe die man abzählen kann.

Beispiele für extensive Größen:

phys. Größe	X	Volumendichte	x
Ladung	Q	Ladungsdichte	ϱ_{el}
Masse	m	Massendichte	ϱ_m
Teilchenzahl	N	Konzentration	n
Energie	W	Energiedichte	w

X besitzt Stromdichte $\vec{J}_X(\vec{r}, t)$ mit $X = \vec{J}_X(\vec{r}, t)\,\mathrm{d}\vec{a}$
X hat Produktionsrate $\Pi_X(\vec{r}, t)$ für Zeit und Volumen

Bilanzgleichung: $\boxed{\frac{\mathrm{d}X(V)}{\mathrm{d}t} = -\int_{\partial V}\vec{J}_X\,\mathrm{d}\vec{a} + \int_V \Pi_X\,\mathrm{d}V}$

Differentielle Form: $\boxed{\underbrace{\frac{\partial x}{\partial t}}_{\text{Akkummulationsrate}} + \underbrace{\operatorname{div}\vec{J}_X}_{\text{Zu-/Abfluss}} = \underbrace{\Pi_X}_{\text{Generation}}}$

Halbleiter:
Elektronen $\frac{\partial n}{\partial t} = -\operatorname{div}\vec{J}_n + G_n$
Löcher $\frac{\partial p}{\partial t} = -\operatorname{div}\vec{J}_p + G_p$ mit $G_n = G_p$

Energiebilanz des El.mag.-Feldes:
$$\boxed{\frac{\partial w_{em}}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{J}_{em} = \Pi_{em}}$$
mit $w_{em} = w_{el} + w_{mag}$; $\vec{J}_{em} = \vec{E} \times \vec{H} + \vec{S}_0$, mit $div\vec{S}_0 = 0$
$\Pi_{em} = -\vec{j} \cdot \vec{E}$

3. Potentialtheorie

Elektromagnetisches Vektorpotential $\boxed{\vec{A}(\vec{r}, t)\text{: } \vec{B}(\vec{r}, t) = \operatorname{rot}\vec{A}(\vec{r}, t)}$

Elektromagnetisches Skalarpotential $\boxed{\Phi\text{: } \vec{E}(\vec{r}, t) = -\nabla\Phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}(\vec{r}, t)}$

Umeichen: $\vec{A}' = \vec{A} - \nabla\chi$ $\qquad \Phi' = \Phi + \dot{\chi}$

Eichfunktion: Riemansche Räume haben an jedem Punkt ein anderes Längenmaß. Die Eichfunktion gibt an, welches Längenmaß an welchem Punkt verwendet werden muss.

3.1. Maxwell Gleichungen in Potentialdarstellung

$$\boxed{\operatorname{div}(\varepsilon\nabla\Phi) + \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}(\varepsilon\vec{A}) = -\varrho}$$

$$\boxed{\operatorname{rot}(\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}A) + \varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} + \varepsilon\nabla\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \vec{j}}$$

Lorenzeichung: $\operatorname{div}\vec{A} + \varepsilon\mu\frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0$

$\Rightarrow$ Wellengleichungen: $\boxed{\left(\Delta - \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\begin{pmatrix}\Phi \\ \vec{A}\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}\frac{\varrho}{\varepsilon} \\ \mu\vec{j}\end{pmatrix}}$

Coulombeichung: $\operatorname{div}A = 0$

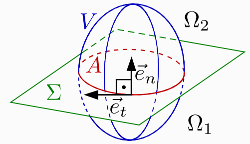
$\Rightarrow$ Wellengleichungen: $\boxed{\begin{array}{l}\operatorname{div}(\varepsilon\nabla\Phi(\vec{r}, t)) = -\rho(\vec{r}, t)\ \text{(Poisson)} \\ \Delta\vec{A} - \epsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\left(\vec{j} - \epsilon\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\Phi)\right)\end{array}}$

Homogene Wellengleichungen:
$\vec{E}$-Feld: $\epsilon\mu\frac{\delta}{\delta t^2}\vec{E}(\vec{r}, t) - \Delta\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{0}$
$\vec{B}$-Feld: $\epsilon\mu\frac{\delta}{\delta t^2}\vec{B}(\vec{r}, t) - \Delta\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{0}$
Elektromagn. Skalarpot. $\Phi(\vec{r}, t)$ folgt $\rho(\vec{r}, t)$ ohne Verzögerung!

NF Anteil: $-\nabla\Phi$ $\qquad$ HF Anteil: $\frac{\partial\vec{J}}{\partial t}$
Transversale Stromdichte: $\vec{j}_t = \vec{j} - \varepsilon\frac{\partial\nabla\Phi}{\partial t}$

Biot-Savart Gesetz für konstanten, homogenen Strom:
$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{I}{4\pi}\int_\gamma\frac{\mathrm{d}\vec{r} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$

3.2. Feldverhalten an Materialgrenzen



Sprungbedingung für die Normalenableitung des Potentials:

$$\epsilon_1\frac{\partial\Phi}{\partial n}\Big|_1 - \epsilon_2\frac{\partial\Phi}{\partial n}\Big|_2 = \sigma_{\mathrm{int}} \text{ auf } \Sigma$$

An Grenzflächen gibt es Flächenladung σ :
$Q = \lim_{h\to 0}\int_V \rho\,\mathrm{d}V = \int_A \sigma\,\mathrm{d}\vec{a}$

Die Tangentialkomponente des E-Feldes und die Normalkomponente des B-Feldes sind stetig

$$\vec{D}_2\vec{n} - \vec{D}_1\vec{n} = \sigma_{\mathrm{int}}$$
$$\vec{B}_2\vec{n} - \vec{B}_1\vec{n} = 0$$
$$\vec{E}_1 \times \vec{n} - \vec{E}_2 \times \vec{n} = 0$$
$$\vec{H}_2 \times \vec{n} - \vec{H}_1 \times \vec{n} = \vec{j}$$

Brechungsgesetz für elektrische Feldlinien (2 Isolatoren):

$$\frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

Gleiches gilt für $\vec{j} = 0$ auch für das $\vec{B}$ bzw. $\vec{H}$-Feld

3.3. Randwertprobleme der Potentialtheorie
Homogenes Randwertproblem: Beide Grenzen haben Potential 0.

Zu lösen ist die POISSON-Gleichung $\mathrm{div}(\varepsilon\nabla\Phi) = -\rho$ auf $\mathring{\Omega}$:

Nr.	RWP	Randbedingungen auf $\partial\Omega$	Lösung
1.	Dirichlet	$\Phi\big\|_{\partial\Omega} = \Phi_D$	eindeutig $\Phi \in \mathcal{C}^2$
2.	Neumann	$\frac{\partial\Phi}{\partial\vec n}\big\|_{\partial\Omega} = F_N$	eindeutig $(\Phi + C) \in \mathcal{C}^2$
3.	Gemischt	$\left(\Phi + k\frac{\partial\Phi}{\partial\vec n}\right)\big\|_{\partial\Omega} = F_N$	eindeutig $\Phi \in \mathcal{C}^2$

Mit Richtungsableitung $\frac{\partial\Phi}{\partial\vec n}\big|_{1/2} = \lim\limits_{\vec r - \vec r_0 \to 0} \vec n(\vec r_0) \cdot \nabla\Phi(\vec r)$ $\vec r \in \Omega_{1/2}$

Lösungsansatz: $\Phi = \Phi^{(0)} + \varphi$
$\Phi^{(0)}$: erfüllt hom. DGL und inhom. RB
φ : erfüllt inhom. DGL und hom. RB

In den meisten Elektrostatischen Problemen gilt $\rho = 0$, da sich die Ladung nur auf den Grenzflächen von Leitern befindet und nicht im Gebiet Ω in dem die Lösung von Φ gesucht wird.
In der Praxis sind die meisten RWPs gemischt, wie Leiterkontakte oder Wärmeleitung

Mehrelektroden-Kondensator Q-RWP:
$\mathrm{div}(\varepsilon\nabla\Phi) = 0$ in $\mathring{\Omega}$ und $\int_{\partial\Omega_l} \varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial\vec n}\,d\vec a = Q_l$ und besitz bis auf eine additive Konstante eine eindeutige Lösung

Spektralzerlegung
Lösungsverfahren:

1. Ansatz: $\Phi = \Phi^{(0)} + \varphi$
   Finde hinreichend glatte Funktion $\Phi^{(0)}$ welche inhomogene Randgleichungen erfüllt
2. Finde Eigenfunktionen von φ: $f = -\mathrm{div}(\varepsilon\nabla\vec b_\nu) = \lambda_\nu\vec b_\nu$
   Es gilt $\lambda_\nu > 0$.
3. Ansatz $\varphi(\vec r) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu b_\nu(\vec r)$
   Bestimmung der Entwicklungskoeffizienten: $a_\nu = \frac{\langle b_\nu | f\rangle}{\lambda_\nu} = \frac{1}{\lambda_\nu}\int_\Omega b_\nu * f\,dv$
4. Spektraldarstellung: $G(\vec r, \vec r') = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu(\vec r)\frac{1}{\lambda_\nu}b_\nu(\vec r')^*$

3.4. Greenfunktion $G(\vec r, \vec r')$
Def: Lösung des RWP mit hom. Randbed. und Störung $\rho(\vec r) = \delta(\vec r - \vec r')$ (Einheitspunktladung bei $\vec r'$)
Poissongleichung $\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ wird durch das Coulomb-Integral gelöst.
Allg. Lösung: $\Phi(\vec r) = \varphi(\vec r) + \psi(\vec r) = \int_\Omega G(\vec r, \vec r')\rho(\vec r')\,d^3\vec r' + \psi(\vec r)$
für $\varepsilon(\vec r) = \varepsilon$: $\psi(\vec r) = -\varepsilon\iint_{\partial V(D)}\left[\frac{\partial G(\vec r, \vec r')}{\partial\vec n'}\Phi_D(\vec r')\right]da' + \varepsilon\iint_{\partial V(N)}\left[G(\vec r, \vec r')\frac{\partial\Phi_N(\vec r')}{\partial n'}\right]da'$
Beispiel Punktladung: $G_{\text{Vac}}(\vec r, \vec r') = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{\|\vec r - \vec r'\|}$

Spektralzerlegung mit Greenfunktion
Problem: $\boxed{-\Delta\varphi = \tilde f}$

- Seperationsansatz für die Eigenfunktionen:
  $b(\vec r) = b_1(x_1)b_2(x_2)b_3(x_3)$
- $-\frac{b_1''(x_1)}{b_1(x_1)} - \frac{b_2''(x_2)}{b_2(x_2)} - \frac{b_3''(x_3)}{b_3(x_3)} = \lambda$
- Aufteilen des Problems:
  $-\frac{b_1''(x_1)}{b_1(x_1)} = \lambda_1$
  $-\frac{b_2''(x_2)}{b_2(x_2)} = \lambda_2$
  $-\frac{b_3''(x_3)}{b_3(x_3)} = \lambda_3$
- Lösungsansatz für b_1, b_2, b_3:
  $b_j(x_j) = A_j\sin(k_jx_j) + B_j\cos(k_jx_j)$ mit $k_j = \sqrt{\lambda_j}$
- $\Rightarrow B_j = 0$ und $k_jL_j = n_j\pi$
- Eigenfunktionen lauten:
  $b_j(x_j) = A_j\sin(n_j\frac{\pi}{L_j}x_j)$
- Normiere die Eigenfunktionen:

$$1 \stackrel{!}{=} \int_0^{L_k} b_j(x_j)^2\,dx_j$$

Die Greenfunktion lautet nun:
$G(\vec r, \vec r') = \sum\limits_{n_1,n_2,n_3\in\mathbb N} b_{n_1n_2n_3}(\vec r)\frac{1}{\lambda_{n_1}\lambda_{n_2}\lambda_{n_3}}b_{n_1n_2n_3}(\vec r')$

Spiegelladungsmethode
Konstruktion eines Ersatzproblems durch Spiegelung der negierten Ladung an einer ebenen leitenden Randfläche

$$G_{\text{Halb}}(\vec r, \vec r_0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{\|\vec r - \vec r_0\|} - \frac{1}{\|\vec r - \vec r_0^*\|}\right)$$

analog für Winkelräume. Eventuell müssen die gespiegelten Ladungen wieder gespiegelt werden (möglicherweise unendlich oft), bis sich alles ausgleicht.

Multipolentwicklung
Coulomb-Integral: $\Phi(\vec r) = \int_{\mathbb R^3} G_{\text{vac}}(\vec r, \vec r')\rho(\vec r')\,d^3\vec r' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathbb R^3}\frac{\rho(\vec r)}{|\vec r - \vec r'|}\,dv'$
Vereinfachung der Integraldarstellung durch Taylorentwicklung des Integralkerns $\frac{1}{|\vec r - \vec r'|}$ unter der Annahme $|\vec r'| < |\vec r|$:
$\Phi(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}Q + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec r\cdot\vec p}{r^3} \mp \dots$

3.5. Stationäre Ströme und RWP
Einflüsse: Drift, Diffusion, Hall-Effekt, Seebeck-Effekt
Drift-Diffusionsmodell:

$$\boxed{\vec j = \underbrace{\sum_{\alpha=1}^{N}|q_\alpha|n_\alpha\mu_\alpha\vec E}_{\text{Driftstrom}} - \underbrace{\sum_{\alpha=1}^{N}q_\alpha D_\alpha\nabla n_\alpha}_{\text{Diffusionsstrom}} + \underbrace{\sum_{\alpha=1}^{N}\sigma_\alpha R_\alpha^H\vec j_\alpha\times\vec B}_{\text{Halleffekt}} - \underbrace{\sum_{\alpha=1}^{N}\sigma_\alpha P_\alpha\nabla T}_{\text{Seebeck}}}$$

$$-\sum_{\alpha=1}^{N}\sigma_\alpha P_\alpha\nabla T$$

4. Orthogonalreihenentwicklung
Was möchten wir lösen? Poisson ($\Delta\Phi(\vec r) = -\frac{\rho(\vec r)}{\epsilon}$) oder Spezialfall Laplace ($\Delta\Phi(\vec r) = 0$).

	Poisson ($\rho \neq 0$)	Laplace ($\rho = 0$)
homogene Randwerte	$\Phi = \iiint_V G(\vec r, \vec r')\rho(\vec r')d^3r$ φ: Greenfunktion lösen für Ergebnis und Orthogonal-reihenentwicklung	$\Phi = 0$
inhomogene Randwerte	Ansatz: $\Phi = \varphi + \psi$ (Randwertprobleme) ψ: Dirichlet/Neumann RWB, φ: Greenfunktion	Orthogonal-reihenentwicklung

4.1. φ bestimmen
Laplaceoperator: lineare Summe von gewichteten Teillösungen ist wieder eine Lösung.
$\Rightarrow$ Ansatz: $\Phi(\vec r) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_nb_n(\vec r)$ (α_n: Gewichtung, b_n: Eigenfunktion von Δ: $f'' = bf$)

$$\Delta b_n(\vec r) = \begin{cases}\lambda_nb_n(\vec r), & \text{Poisson}\\ 0, & \text{Laplace}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta\Phi(\vec r) = \begin{cases}\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\lambda_nb_n(\vec r) = -\frac{\rho}{\epsilon}, & \text{Poisson}\\ 0, & \text{Laplace}\end{cases}$$

Seperationsansatz: $\Delta b_n(\vec r)$ lösen
1. $b_n(\vec r) = b_1(x)b_2(y)b_3(z) \hat{=} X(x)Y(y)Z(z)$
2. in den Ansatz einsetzen $\to$ gewöhnliche DGL
3. Randwerte einsetzen $\to$ mit homogenen RW anfangen
4. Konstanten zusammenfassen $\to$ z.B. $A_n \cdot B_n \mapsto \tilde A_n$

4.2. Lösen von Poisson-Gleichung
$-\Delta b_n = \lambda_ib_n$ mit $b_n = b_1(x)b_2(y)b_3(z)$

$$-b_1''b_2b_3 - b_1b_2'b_3 - b_1b_2b_3'' = \lambda_ib_1b_2b_3$$

$$-\frac{b_1''}{b_1} - \frac{b_2''}{b_2} - \frac{b_3''}{b_3} = \lambda_i \Rightarrow \frac{-b_i''(x_i)}{b_i(x_i)} = \lambda_i$$

$\Rightarrow b_i''(x_i) + b_i(x_i)\lambda_i \stackrel{!}{=} 0$ (1)
Ansatz für DGL: $b_i(x_i) = A_i\sin(x_ik_i) + B_i\cos(x_ik_i)$ in (1)
$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(A_i\sin(k_ix_i) + B_i\cos(k_ix_i)) + \lambda_i(A_isin(k_ix_i) + B_icos(k_ix_i)) \stackrel{!}{=} 0$
$(A_i\sin(k_ix_i) + B_i\cos(k_ix_i))(\lambda_i - k_i^2) \stackrel{!}{=} 0$
$\Rightarrow \lambda - k_i^2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda_i = k_i^2}\ \boxed{\sqrt{\lambda_i} = k_i}$
Randwerte für b_i Ansatz: $A_i\sin(k_i0) + B_i\cos(k_i0)$
$b_i(0) = 0 = B_i$
$b_i(L_i) = A_i\sin(k_iL_i) = 0 \Rightarrow \boxed{k_i = \frac{n\pi}{L_i}}, n \in \mathbb N$

Orthonormierung $\int\sin^2(u)du = \frac{1}{2}$
Ansatz: $1 = \int_0^{L_i} b_i^2(x_i)dx_i \Rightarrow A_i = \sqrt{\frac{2}{L_i}}$
einsetzen für b: $n = 3$
$\Rightarrow b_{n_1n_2n_3}(x_i) = \frac{\sqrt{2}^3}{\sqrt{L_1L_2L_3}}\prod\limits_{i=1}^{3}\sin\left(\frac{n_i - \pi}{L_i}x_i\right), n \in \mathbb N$
einsetzen in $G(\vec r, \vec r')$: $G(\vec r, \vec r') = \sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^*(\vec r')\frac{1}{\lambda_n}b_n(\vec r)$

4.3. Orthogonalreihenentwicklung zu Laplace
Beispiel: Randwerte überall 0, außer bei $\Phi(x_1, x_2, x_3 = L_3) = V(x, y)$
Ansatz: $-\frac{b_1''}{b_1} - \frac{b_2''}{b_2} - \frac{b_3''}{b_3} = 0$
$\Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ mit hom. RW $\Leftrightarrow \lambda_3 = -(\lambda_1 + \lambda_2)$
$k_3 = \sqrt{\lambda_3} = j\beta$
$b_{1,2,3}(0) \Rightarrow B_{1,2,3} = 0$
$b_{1,2}(L_{1,2}) = 0 \Rightarrow K_{1,2} = \frac{n_{1,2}\pi}{L_{1,2}}$
$\Rightarrow b_{1,2}(x_{1,2}) = A_{1,2}\sin\left(n_{1,2}\frac{\pi}{L_{1,2}}x_{1,2}\right)$
$\Rightarrow \lambda_3 = -(\lambda_1 + \lambda_2) = -\beta < 0, K_3 = \sqrt{\lambda_3} = \sqrt{-(\lambda_1 + \lambda_2)}$
$b_3(x_3) = A_3\sinh(\beta x_3)$ (j steckt in A)
Ansatz für DGL:
$b_{n_1,n_2}(\vec r) = A_{n_1}A_{n_2}A_3\sin\left(\frac{n_1\pi}{L_1}x_1\right)\sin\left(\frac{n_2\pi}{L_2}x_2\right)\sinh(\beta x_3)$

Ersetzen von $A_{n_1}A_{n_2}A_{n_3} = A_{n_1n_2}$, da A_3 = const:
$\Phi(\vec r) = \sum\limits_{n_1=1}^{\infty}\sum\limits_{n_2=1}^{\infty}b_{n_1,n_2}(\vec r)$

$$\boxed{\Phi(x_1, x_2, x_3 = L_3) = V(x, y) = \sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}A_{n_1n_2}\sin\left(\frac{n_1\pi}{L_1}x_1\right)\sin\left(\frac{n_2\pi}{L_2}x_2\right)\sinh(\beta x_3)}$$

1D Fall: $V(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$
Bestimmung von A_2:

$$V(x) = \int_0^L\sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right)dx = A_1\overbrace{\int_0^L\sin\left(\frac{1\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right)dx}^{=0} + \overbrace{A_2\int_0^L\sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right)dx}^{=L/2} + \overbrace{\dots}^{=0}\text{, da Orthogonalitätsbed. } \delta_{nm}: n\neq m = 0$$

$$V(x) = \int_0^L\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)dx = \begin{cases}0, & m \neq n\\ \frac{L}{2}, & m = n\end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{A_n = \frac{2}{L}\int_0^L V(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx}$$

5. Kompaktmodelle
Modellierung als Netzwerk ohne Wellenausbreitung.
Vorraussetzungen:

1. Räumlich begrenzte Funktionsblöcke:
   lokalisierte Schnittstellen (leitende Verbindungen, geführte elektromagnetische Felder)
2. Quasistationär zeitveränderlich:
   Konzentriertheitshypothese: $\lambda >> d$.
   Knoten: ideal leitend, überall gleiches Potential.
   Zweige: flusserhaltend, gerichtete Spannung.

$$\boxed{\lambda = \frac{c_0}{f}}$$

5.1. Kirchhoffsche Gesetze
$\boxed{\sum U_i = U_{\text{ind}}}$ $\boxed{\sum I_i = -\dot Q_K}$

5.2. Kapazitive Speicherelemente
Mehrelektroden Kondensatoranordnung $\to$ Modellierung als Netzwerk von kapazitiven Zweipolen.
Plattenkondensator:
$\vec E = \frac{Q}{\varepsilon_0A}\vec e$ $U = \int_0^d\vec E\,d\vec r = \frac{Q}{\varepsilon_0A}d$

- Kapazitätsmatrix:
  $C_{kl} = \int_\Omega\nabla\Phi_k\varepsilon\nabla\Phi_l\,d^3r = -\int_{\partial\Omega_k}\epsilon\vec n\nabla\Phi_l\,d\vec a$ (k,l = 0, ..., N)
  $\boldsymbol C$ symmetrisch, positiv semi-definit, nicht invertierbar, Zeilen- und Spaltensumme null
- Reduzierte Kapazitätsmatrix:
  $\boldsymbol C_0$: $\boldsymbol C$ um 0. Zeile und 0. Spalte abgeschnitten
  $\vec U_0 = \begin{bmatrix}V_1 - V_0\\ \cdots\\ V_N - V_0\end{bmatrix}$ $\vec Q_0 = \boldsymbol C_0\vec U_0$ $\boldsymbol C_0$ invertierbar

5.3. Induktive Speicherelemente
$u_k(t) = -u_{\text{ind,k}}(t) + r_ki_k(t)$
Transformatorgleichung: $u_k(t) = r_ki_k(t) + \sum_{l=1}^{N}L_{\text{kl}}\frac{di_l}{dt}$
Kopplungsinduktivität: $M = k\sqrt{L_1L_2}$
$\Rightarrow U_1 = L_1\dot I_1 + M\dot I_2$ $U_2 = M\dot I_1 + L_2\dot I_2$
Neumannsche Formel: $L_{\text{kl}} = \frac{\mu}{4\pi}\int_{C_k}\int_{C_l}\frac{d\vec s'\cdot d\vec s}{|\vec r - \vec r'(s)|} = \frac{\partial^2W_{\text{mag}}}{\partial i_k\partial i_l}$
$L_{\text{kl}}: \begin{cases}\text{Selbstinduktionskoeffizient}, k = l\\ \text{Gegeninduktionskoeffizient}, k \neq l\end{cases}$
$\boldsymbol L$ symmetrisch, positiv definit

Kapazität	Induktivität
$\vec Q = \boldsymbol C\vec U$	$\vec\Phi_M = \boldsymbol L\vec i$
$W_{\text{el}} = \frac{1}{2}\vec U_0\vec Q_0 = \frac{1}{2}\vec V^T\boldsymbol C\vec V$	$W_{\text{mag}} = \frac{1}{2}\vec I^\top\boldsymbol L\vec I$
	$\boxed{W_{\text{mag}} = \frac{1}{2}\int_{\mathbb R^3}\vec j\cdot\vec A\,d^3r}$

6. Komplexe Wechselstromrechnung

Vorraussetzung: lineares, eingeschwungenes System mit sinusförmiger Erregung $x(t) = A_m \cdot \cos(\omega t + \varphi)$
Beim Kondensator eilt der Strom vor.
Bei der Induktivität kommt der Strom zu spät.

6.1. Komplexe Zeigergrößen

Zeitfunktion	$a(t) = A_m \cdot \cos(\omega t + \varphi)$
Zeiger	$A = \alpha + i\beta = A_m \cdot e^{i\varphi}$
	$= A_m \cdot (\cos\varphi + j\sin\varphi)$
Maximum	$A_m = \lvert A\rvert = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{AA^*}$
Phase	$\varphi = \begin{cases} \arctan\frac{\beta}{\alpha} & \alpha > 0 \\ \arctan\frac{\beta}{\alpha} + \pi & \alpha < 0 \end{cases}$

Differentialoperator: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = j\omega \qquad \frac{d}{dt} e^{j(\omega t + \varphi)} = j\omega \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}$

	Widerstand	Kondensator	Spule
Impedanz $Z = \frac{U}{I}$	R	$\frac{1}{j\omega C}$	$j\omega L$
Admittanz $Y = \frac{I}{U}$	$G = \frac{1}{R}$	$j\omega C$	$\frac{1}{j\omega L}$
$\Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_i$	0	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan(\Delta\varphi) = \frac{\mathrm{Im}\{Z\}}{\mathrm{Re}\{Z\}}$			

$$\underbrace{\boldsymbol{Z}(j\omega)}_{\text{Impedanz}} = \underbrace{R(j\omega)}_{\text{Resistanz}} + j\underbrace{X(j\omega)}_{\text{Reaktanz}} \qquad \boldsymbol{U} = \boldsymbol{Z} \cdot \boldsymbol{I}$$

$$\underbrace{\boldsymbol{Y}(j\omega)}_{\text{Admittanz}} = \underbrace{G(j\omega)}_{\text{Konduktanz}} + j\underbrace{B(j\omega)}_{\text{Suszeptanz}} \qquad \boldsymbol{I} = \boldsymbol{Y} \cdot \boldsymbol{U}$$

6.2. Komplexe Leistungsrechnung

$U_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}} U_m = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u(t)^2\,\mathrm{d}t} \qquad I_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_m$
Momentanleistung: $p(t) = u(t)i(t)$
Energie einer Periode: $E = \int_0^T u(t)i(t)dt$
Leistungsmittelwert: $P_w = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)i(t)dt$
Komplexe Leistung: $P = \frac{1}{2}UI^* = \frac{1}{2}U_m \cdot e^{j\varphi_u} \cdot I_m \cdot e^{-j\varphi_i} = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}$
Scheinleistung: $S = \lvert P\rvert$
Wirkleistung: $P_w = \mathrm{Re}\{P\} = \frac{1}{2}\hat{U}\hat{I}\cos\varphi$
Blindleistung: $P_B = \mathrm{Im}\{P\} = \frac{1}{2}\hat{U}\hat{I}\sin\varphi$

6.3. Grundlagen Wechselstromlehre

periodische, sinusförmige Strom- & Spannungsverläufe:

- Transformierbarkeit(Energieübertragung)
- Modulierbarkeit (Informations- und Nachrichtentechnik)
- Anpassung an Generatoren und Motoren

$\varphi(t) = \omega t + \varphi_0$

7. Elektromagnetische Wellen

Transportieren Feldenergie mit Lichtgeschwindigkeit. $\varepsilon\mu c^2 = 1$
Unendliche Ausbreitung mit Lichtgeschwindigkeit ohne Medium.
Wechselwirkung mit der Materie.
Frequenzabhängigkeit von $\varepsilon(\omega), \mu(\omega), \sigma(\omega)$
Annahmen: $\rho = 0$ außer bei Antennen, keine thermischer Strom.

7.1. Beschreibung

Dämpfung	falls $\sigma > 0$
äußere Quellen	$\vec{j}_0, \rho_0$

6-Komponentiges, elektromagnetisches Wellenfeld:

$$\boxed{\left[\varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \mu\sigma\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right]\begin{pmatrix}\vec{E} \\ \vec{H}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nabla\left(\frac{\rho_0}{\varepsilon}\right) - \mu\dot{\vec{j}}_0 \\ \mathrm{rot}\,\vec{j}_0 \end{pmatrix}}$$

Notwendig, aber nicht hinreichend für Maxwellsche Gleichungen.
(Nebenbedingungen: $\varepsilon\,\mathrm{div}\,\vec{E} = \rho, \mathrm{div}\,\vec{H} = 0$)

4-Komponentiges, elektromagnetisches Potential (falls $\sigma = 0$):

$$\boxed{\left(\Delta - \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\begin{pmatrix}\Phi \\ \vec{A}\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}\frac{\varrho}{\varepsilon} \\ \mu\vec{j}\end{pmatrix}}$$

Als Nebenbedingung muss nur die Eichbedingung erfüllt sein.

homogene Wellengleichung: $\boxed{\left(\frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} - \Delta\right)\vec{E} = 0}$

7.2. Eindimensionale Welle

Annahmen: $\sigma, \vec{j}_0, \rho_0 = 0 \Rightarrow \epsilon\mu\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$
Ausbreitungsgeschwindigkeit: $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$
D'Alembertsche Lösung: $u(x,t) = f_1(ct - x) + f_2(ct + x)$

7.3. Dreidimensionale ebene Wellen

Annahhmen: $\sigma, \rho_0, \vec{j}_0 = 0$
Nebenbedingungen: $\mathrm{div}\,\vec{E} = \mathrm{div}\,\vec{H} = 0 \quad \mathrm{rot}\,\vec{E} = -\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$
$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

$\boxed{\vec{k} = k\vec{n}, \omega = kc}$ Dabei muss gelten: $\frac{\omega}{\lvert\vec{k}\rvert} = c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$

$\vec{E}(t,\vec{r}) = \vec{E}_0(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})$ mit $\vec{k}\cdot\vec{E}_0(.) = 0$
$\vec{E}_0(\vec{r},t) = \frac{\vec{k}}{\epsilon\omega} \times \vec{H}_0(\vec{r},t) = -Z\vec{n} \times \vec{H}_0(.)$
$\vec{H}(t,\vec{r}) = \vec{H}_0(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})$ mit $\vec{k}\cdot\vec{H}_0(.) = 0$
$\vec{H}_0(\vec{r},t) = \frac{\vec{k}}{\mu\omega} \times \vec{E}_0(\vec{r},t) = \frac{\vec{n}}{Z} \times \vec{E}_0(.)$
Dispersionsrelation: $\omega(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}\left\lvert\vec{k}\right\rvert$
Wellenwiderstand: $Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \frac{\left\lvert\vec{E}_0\right\rvert}{\left\lvert\vec{H}_0\right\rvert}$

7.3.1 Energie- und Leisungsbetrachtung

$w_{\text{el}}(t,\vec{r}) = w_{\text{mag}}(t,\vec{r}) = \frac{\epsilon}{2}\vec{E}_0(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})^2 = \frac{\mu}{2}\vec{H}_0(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})^2$
Leistungsflussdichte: $\vec{S} = \frac{1}{Z}\vec{E}_0^2 \cdot \vec{n}$
Energiebilanz einer elektromagnetischen Welle: $\frac{\partial w_{\text{elmag}}}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{S} = 0.$

7.4. Harmonische ebene dreidimensionale Wellen

7.4.1 Linear polarisierte Wellen

$\vec{E}(t,\vec{r}) = \vec{E}_0\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi)$
$\vec{H}(t,\vec{r}) = \vec{H}_0\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi)$

7.4.2 Elliptisch polarisierte Wellen

$\vec{E}(\vec{r},t) = E_{01}\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi_1)\vec{e}_1 + E_{02}\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi_2)\vec{e}_2$
Harmonische, ebene EM Wellen ($\sigma = 0$)

Ellipsengleichung:
$\left(\frac{E_1}{E_{01}}\right)^2 + \left(\frac{E_2}{E_{02}}\right)^2 - 2\left(\frac{E_1}{E_{02}}\right)\left(\frac{E_1}{E_{02}}\right)\cos(\varphi_{02} - \varphi_{01}) = \sin^2(\varphi_{02} - \varphi_{01})$
Linear: $\varphi_{02} - \varphi_{01} = n\pi \qquad \frac{E_1}{E_{01}} = \pm\frac{E_2}{E_{02}}$
Kreis: $\varphi_{02} - \varphi_{01} = (n + \frac{1}{2})\pi \quad \wedge \quad E_{01} = E_{02}$ $\left(\frac{E_1}{E_{01}}\right)^2 + \left(\frac{E_2}{E_{02}}\right)^2$

7.4.3 Komplexe Darstellung

$$\vec{E}(t,\vec{r}) = \mathrm{Re}\left\{\underbrace{\left(E_{01}\mathrm{e}^{j\varphi_1}\vec{\mathrm{e}}_1 + E_{02}\mathrm{e}^{j\varphi_2}\vec{\mathrm{e}}_2\right)}_{\hat{E}_0}\mathrm{e}^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}\right\}$$

7.4.4 Darstellung beliebiger EM-Wellen durch harmonische ebene Wellen

Annahmen: $\varrho_0, \vec{j}_0 = 0, \sigma \geq 0$
Materialgleichungen:

- $\vec{D}(\vec{k}) = \epsilon(\omega(\vec{k}))\vec{E}(\vec{k})$
- $\vec{B}(\vec{k}) = \mu(\omega(\vec{k}))\vec{H}(\vec{k})$
- $\vec{j}(\vec{k}) = \sigma(\omega(\vec{k}))\vec{E}(\vec{k})$

komplexe Permittivität: $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\omega) = \varepsilon(\omega) + \mathrm{i}\frac{\sigma(\omega)}{\omega}$
komplexe Dispersionsrelation: $k\tilde{(\omega)} = \frac{1}{\tilde{\varepsilon}(\omega(\vec{k}))\mu(\omega(\vec{k}))}\vec{k}^2$
komplexer Wellenwiderstand: $\tilde{Z}(\omega) = \sqrt{\frac{\mu(\omega)}{\tilde{\varepsilon}(\omega)}} = \frac{\tilde{k}(\omega)}{\omega\tilde{\varepsilon}(\omega)}$
Fourierkoeffizienten der Feldgrößen:

- $\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \stackrel{FT}{=} -j\vec{k} \times \hat{\vec{E}}(\vec{k}) = -j\omega\mu(\omega)\hat{\vec{H}}(\vec{k})$, also $\vec{k} \times \hat{\vec{E}}(\vec{k}) = \omega(\vec{k})\mu(\omega(\vec{k}))\hat{\vec{H}}(\vec{k})$
- $\mathrm{div}\,\vec{D} = 0 \stackrel{FT}{=} -j\vec{k}\cdot\varepsilon(\omega)\hat{\vec{E}}(\vec{k}) = 0$, also $\vec{k}\cdot\hat{\vec{E}}(\vec{k}) = 0$
- $\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \stackrel{FT}{=} \sigma(\omega)\hat{\vec{E}}(\vec{k}) + j\omega\varepsilon(\omega)\hat{\vec{E}}(\vec{k}) = j\omega\tilde{\varepsilon}(\omega)\hat{\vec{E}}(\vec{k})$, also $-\vec{k} \times \hat{\vec{H}}(\vec{k}) = \omega(\vec{k})\tilde{\varepsilon}(\omega(\vec{k}))\hat{\vec{E}}(\vec{k})$
- $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \stackrel{FT}{=} j\vec{k}\cdot\mu(\omega)\hat{\vec{H}}(\vec{k}) = 0$, also $\vec{k}\cdot\hat{\vec{H}}(\vec{k}) = 0$

inv. Dispersionsrelation: $\tilde{\boldsymbol{k}}(\omega) = \sqrt{\tilde{\varepsilon}(\omega)\mu(\omega)}$

7.4.5 Räumlich gedämpfte ebene EM-Welle in Leitern

$\tilde{\boldsymbol{k}}(\omega) = \underbrace{\beta(\omega)}_{\text{Phasenmaß}} - \mathrm{i}\underbrace{\alpha(\omega)}_{\text{Dämpfungsmaß}}$
Näherung: $\sigma(\omega) \gg \omega\varepsilon(\omega)$
$\alpha(\omega) = \beta(\omega) = \sqrt{\frac{\sigma(\omega)\mu\omega}{2}} = \frac{2\pi}{\lambda}$
Eindringtiefe: $\Delta z(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\sigma(\omega)\mu\omega}}$
Abklingverhältnis: $\mathrm{e}^{-\lambda\alpha}$
Skin-Effekt: Abschirmverhalten von leitenden Medien gegen das Eindringen von EM-Wellen

7.5. Einfall ebener elektromagnetischer Wellen auf ebene Materialgrenzschichten

Aufteilung der EM-Welle in reflektierenden und transmittierenden Anteil
einfallend: $\vec{H}_h(\vec{r}) = \vec{H}_{\text{h0}}\mathrm{e}^{-j\vec{k}_h\cdot\vec{r}}, \qquad \vec{E}_h = Z_1\vec{H}_h \times \mathrm{e}_{\text{kh}}$
reflektierend: $\vec{H}_r(\vec{r}) = \vec{H}_{\text{r0}}\mathrm{e}^{-j\vec{k}_r\cdot\vec{r}}, \qquad \vec{E}_h = Z_1\vec{H}_h \times \mathrm{e}_{\text{kh}}$
transmittierend: $\vec{H}_D(\vec{r}) = \vec{H}_{\text{D0}}\mathrm{e}^{-j\vec{k}_D\cdot\vec{r}}, \qquad \vec{E}_h = Z_2\vec{H}_h \times \mathrm{e}_{\text{kh}}$
Reflexionswinkel gleich Einfallswinkel: $\alpha_h = \alpha_r$
Brechungsgesetz (Snellius): $k_1\sin\alpha_h = k_2\sin\alpha_D$

$$\boxed{(\vec{H}_h + \vec{H}_r) \times \vec{n} = \vec{H}_D \times \vec{n} \qquad (\vec{E}_h + \vec{E}_r) \times n = \vec{E}_D \times \vec{n}}$$

E-Feld $\parallel$ Einfallsebene: Einfallende Welle nennt sich TM-Welle
Reflexionskoeffizient: $r_\parallel = \frac{\hat{E}_r}{\hat{E}_h} = \frac{\hat{H}_r}{\hat{H}_h} = \frac{Z_2\cos\alpha_D - Z_1\cos\alpha_h}{Z_2\cos\alpha_D + Z_1\cos\alpha_h}$
Transmissionskoeffizient: $t_{H\parallel} = \frac{\hat{H}_D}{\hat{H}_h} = \frac{2Z_1\cos\alpha_h}{Z_2\cos\alpha_D + Z_1\cos\alpha_h}$
$t_{E\parallel} = \frac{\hat{E}_D}{\hat{E}_h} = \frac{Z_1}{Z_2}t_{H\parallel}$
E-Feld $\perp$ Einfallsebene: Einfallende Welle nennt sich TE-Welle
Reflexionskoeffizient: $r_\perp = \frac{\hat{E}_r}{\hat{E}_h} = \frac{\hat{H}_r}{\hat{H}_h} = \frac{Z_2\cos\alpha_h - Z_1\cos\alpha_D}{Z_2\cos\alpha_h + Z_1\cos\alpha_D}$
Transmissionskoeffizient: $t_{E\perp} = \frac{\hat{E}_D}{\hat{E}_h} = \frac{2Z_2\cos\alpha_h}{Z_2\cos\alpha_h + Z_1\cos\alpha_D}$
$t_{H\perp} = \frac{\hat{H}_D}{\hat{H}_h} = \frac{Z_1}{Z_2}t_{E\perp}$

7.6. Abstrahlung von EM-Wellen im freien Raum

Maxwellsche Gleichungen in zeitharmonischen Feldern:

- $\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\mathrm{j}\omega\vec{B} = -\mathrm{j}\omega\mu_0\vec{H}$
- $\mathrm{rot}\,\vec{H} = \mathrm{j}\omega\vec{D} + \vec{j}_0 = \mathrm{j}\omega\varepsilon_0\vec{E} + \vec{j}_0$
- $\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\mathrm{div}\,\vec{D} = \frac{\varrho_0}{\varepsilon_0}$
- $\mathrm{div}\,\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$

Helmholtz-Gleichung: $\Delta\vec{A} + \mathrm{j}\omega\varepsilon_0\mu_0\vec{A} = -\mu_0\vec{j}_0$
Vereinfachung durch eingeprägte Dirac-Impuls Stromdichte der Form: $\vec{j}_0^D(\vec{r}) = \hat{I}_0\Delta l\vec{\mathrm{e}}_z\delta(\vec{r})$
$\Rightarrow$ **Hertzscher-Dipol** mit Dipolmoment $I_0\Delta l$ mit $\vec{A}(\vec{r}) = \hat{I}_0\Delta l\mu_0\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 r}}{4\pi r}\vec{\mathrm{e}}_z$

7.7. Elektromagnetische Wellenleiter

Alle Verbindungen zwischen elektrischen und elektronischen Bauteilen oder Systemen sind Wellenleiter (bei niedrigen Frequenzen vernachlässigbar).
Wellenausbreitungseffekte ab $\frac{1}{10}\lambda \to$ Vermeidung von Reflexionen und Mehrwegeausbreitungseffekten
Translationsinvarianz des Wellenleiters in z-Richtung $\to$ Feldtypen der Form:

$$\vec{E}(x,y,z) = \vec{E}_0(x,y)\mathrm{e}^{\pm\gamma}$$
$$\vec{H}(x,y,z) = \vec{H}_0(x,y)\mathrm{e}^{\pm\gamma}$$

$\gamma = \mathrm{j}\beta$: verlustloser Wellenleiter
$\gamma = \alpha$: Dämpfungstypen (evaneszente Moden)
Wellentypen können eine **untere Grenzfrequenz** aufweisen, ab der sie ausbreitungsfähig sind
Existiert unterhalb einer bestimmten Grenzfrequenz noch eine einziger Wellentyp $\Rightarrow$ **Grundmode / Fundamentalmode** (i.d.R. bei Leitungen TEM-Welle).
Koaxialleitung:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\hat{U}_0}{\ln\left(\frac{D}{d}\right)}\frac{1}{r}\vec{\mathrm{e}}_r\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}$$
$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{\hat{I}_0}{\ln\left(\frac{D}{d}\right)}\frac{1}{r}\vec{\mathrm{e}}_\varphi\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}$$
$$\frac{\hat{U}_0}{\hat{I}_0} = \underbrace{Z_L = 60\Omega\sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}\ln\left(\frac{D}{d}\right)}_{\textbf{Leitungswellenwiderstand}}$$

mit D: Innendurchmesser, d: Außendurchmesser

Rechteckhohlleiter:

$$H_z(\vec{r}) = -\hat{H}_0\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z)}$$
$$H_x(\vec{r}) = -\mathrm{j}\frac{\beta}{\beta_c}\frac{\pi}{a}\hat{H}_0\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}$$
$$H_y(\vec{r}) = 0 \qquad E_x(\vec{r}) = 0$$
$$E_y(\vec{r}) = \mathrm{j}\frac{\omega\mu}{\beta_c}\frac{\pi}{a}\hat{H}_0\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}$$

mit $\beta_c = \omega_c\sqrt{\varepsilon\mu} = \frac{2\pi}{\lambda_c}$: Cut-off-Wellenzahl, ω_c: Cut-off-Kreisfrequenz, $\lambda_c = 2a$: Cut-off-Wellenlänge
Ausbreitungsfähig für Kreisfrequenzen oberhalb von Ausbreitungskonstante: $\beta = \sqrt{\omega^2\varepsilon\mu - \beta_c^2}$
statisch: Keine Veränderung über die Zeit $\frac{\partial}{\partial t} = 0$
stationär: zeitliche Veränderung, aber keine Wellenausbreitung
Quasi-Stationär: Zeitliche Veränderungen sind so langsam, dass sie als statisch angenommen werden $\frac{\partial}{\partial t} \approx 0$
Normalgebiet: zusammenhängend, beschränkt, mit glattem lipschitstetigem Rand
Lipschitstetig: irgendwas zwischen stetig und differenzierbar
$\mathcal{L}_2(\Omega) = \left\{f : \Omega \to \mathbb{C} \,\middle|\, \int_\omega \lvert f(\vec{r})\rvert^2\,\mathrm{d}^3\vec{r} < \infty\right\}$