

TGV espagnols: Les données `renfe` contiennent des informations sur 10 000 billets de trains vendus par la compagnie Renfe, l'entreprise ferroviaire publique espagnole. Les données incluent les variables:

- `prix`: prix du billet (en euros);
- `dest`: indicateur binaire du trajet, soit de Barcelone vers Madrid (0) ou de Madrid vers Barcelone (1);
- `tarif`: variable catégorielle indiquant le tarif du billet, un parmi `AdultoIda`, `Promo` et `Flexible`;
- `classe`: classe du billet, soit `Preferente`, `Turista`, `TuristaPlus` ou `TuristaSolo`;
- `type`: variable catégorielle indiquant le type de train, soit `Alta Velocidad Española (AVE)`, soit `Alta Velocidad Española conjointement avec TGV` (un partenariat entre la SNCF et Renfe pour les trains à destination ou en provenance de Toulouse) `AVE-TGV`, soit les trains régionaux `REXPRESS`; seuls les trains étiquetés `AVE` ou `AVE-TGV` sont des trains à grande vitesse.
- `duree`: longueur annoncée du trajet (en minutes);
- `jour` entier indiquant le jour de la semaine du départ allant de dimanche (1) à samedi (7).

1.1 On considère le temps de parcours pour les trains à grande vitesse (`AVE` et `AVE-TGV`). Le temps moyen entre les deux villes dans la « population » est de $\mu = 2.845$ heures; cette mesure a été déterminée sur la base des données complètes contenant plus de 2.3 millions d'entrées et est donc considérée comme connue, contrairement à la plupart des applications pratiques.

Une étude de simulation a été conduite pour déterminer le comportement de tests pour un échantillon. L'algorithme suivant a été répété 10 000 fois:

- (a) sélection d'un sous-échantillon de taille $n = 100$.
- (b) calcul de la statistique du test- t pour un échantillon correspondant à $\mathcal{H}_0 : \mu = \mu_0$ (versus $\mathcal{H}_0 : \mu \neq \mu_0$) pour différentes valeurs de μ_0 .
- (c) sauvegarde de la valeur- p associées à chacun des trois tests.

La fig. 1 montre le pourcentage de valeur- p parmi les 10 000 qui sont plus petites que 0,05, c'est-à-dire la proportion de rejet (à un niveau de 5%) de $\mathcal{H}_0 : \mu = \mu_0$ contre l'alternative bilatérale à $\mu_0 \in \{2,83; 2,835; 2,84; \dots; 2,995; 3\}$. Utilisez la courbe de puissance (Figure 1) afin de répondre aux questions suivantes:

- (a) Expliquez pourquoi la proportion de rejet du test augmente quand on se déplace vers la droite sur le graphique.
 - (b) Supposez que l'on répète l'expérience de simulation, mais cette fois avec des sous-échantillons aléatoires de taille $n = 1000$. Comment est-ce que les points pour le test- t pour un échantillon se compareraient à ceux tracés sur le graphique? Seraient-ils en dessous, à la même hauteur ou au dessus?
 - (c) Expliquez pourquoi la valeur sur le graphique pour le test- t pour un échantillon **devrait être** approximativement 0,05 dans un voisinage de $\mu = 2,845$.
 - (d) Produisez un diagramme quantile-quantile normal et commentez sur la robustesse du test- t à des déviations de l'hypothèse de normalité.
- 1.2 Supposez que l'on veut comparer le tarif moyen pour les trains à grande vitesse pour les deux destinations, soit de Madrid vers Barcelone et le trajet inverse de Barcelone à Madrid. Une étude de simulation a été réalisée dans laquelle le test de Welch pour deux échantillons a été calculé sur des sous-échantillons aléatoires de taille $n = 1000$. Les données `renfe_simu` contiennent les différences moyennes (`difmoy`), les statistiques de test (`wstat`), les valeurs- p (`valp`) et les intervalles de confiance à 95% (`icbi` et `icbs`) pour 1000 répétitions. Supposez que l'on sait que la vraie différence moyenne dans la population est de $-0,28\text{€}$. Utilisez les données simulées pour répondre aux questions suivantes et **commentez brièvement** sur chaque sous-question.

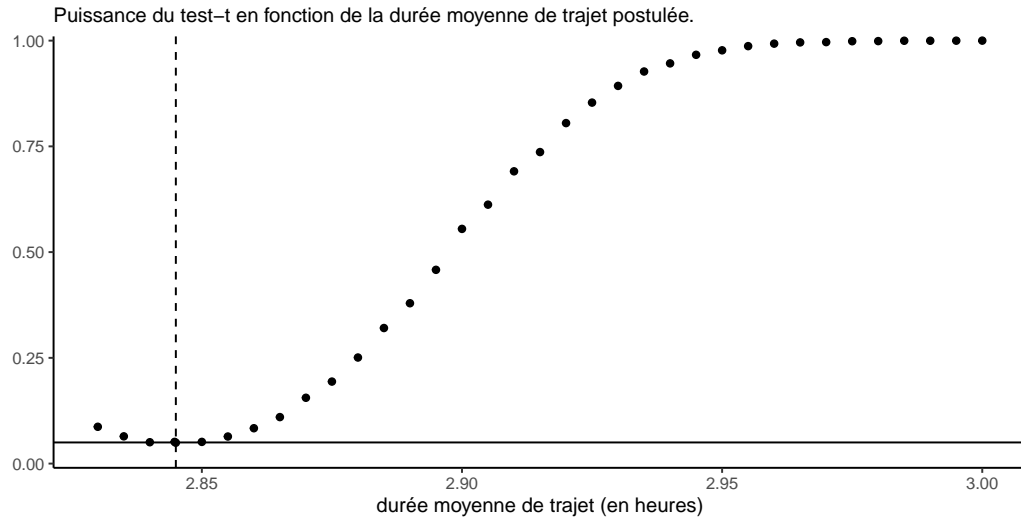


Figure 1: Courbe de puissance pour le test- t pour un échantillon, en fonction du temps de parcours (en heures). La ligne horizontale grise correspond à 0,05, tandis que la ligne traitillée verticale indique la vraie médiane moyenne μ .

- Quel est le taux de couverture empirique des intervalles de confiance à 95% (c'est-à-dire le pourcentage des intervalles couvrant la valeur de la "vraie" différence moyenne)?
- Tracez un histogramme des différences moyennes et superposez la vraie différence moyenne à l'aide d'un trait vertical.
- Calculez la puissance du test (pourcentage de rejet de l'hypothèse nulle sous l'hypothèse alternative).

1.3 À l'aide des données renfe, testez si le prix moyen du billet pour un train de classe AVE-TGV est le même que celui d'un train régio-express (REXPRESS). Veillez à

- énoncer l'hypothèse nulle et l'hypothèse alternative,
- justifier avec soin le choix de votre statistique de test,
- rapporter la différence moyenne estimée et un intervalle à 90% pour cette différence,
- conclure dans le cadre de la mise en situation.