Quiz

1. Oscilador sub-amortiguado

Se cuelga un objeto de 0.2 kg de un resorte con una constante de fuerza de 80 N/m. Este sistema se somete a una fuerza de amortiguamiento de la forma -bv, siendo v su velocidad en m/s. a) Si la frecuencia con amortiguamiento es $\sqrt{3}/2$ la frecuencia sin amortiguamiento, determine el valor de la constante b. b) ¿Cuál es el valor del factor de calidad del sistema?

Solución

a. La frecuencia angular para un sistema sub-amortiguado es:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{b^2}{4m^2}$$

De donde despejamos b:

$$b^2 = 4m^2(\omega_0^2 - \omega^2)$$

Utilizando $f = \sqrt{3}/2 f_0$, se obtiene que $\omega = \sqrt{3}/2\omega_0$(ya que $\omega = 2\pi f$). Por lo que:

$$b = \sqrt{km}$$

Donde se utilizó $\omega_0^2 = k/m$. Utilizando los valores para k y m se obtiene:

$$b = 4\frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

b. Por definición el factor de calidad Q es:

$$Q = \frac{\omega_0}{\gamma}$$

Utilizando las expresiones para la frecuencia angular natural $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ y para $\gamma = b/m$ se obtiene:

$$Q = 1$$

Taller Semana 2

1.Circuito RLC en serie

Considere un circuito RLC conectado a una batería que proporciona una FEM constante ε, con todos sus elementos conectados en serie como se muestra en la figura. A menos que se diga lo contrario, las constantes del circuito(R, L y C) no son nulas.

1.1 Encuentre la ecuación diferencial que satisface la carga $Q(t)$ del condensador. Haga una tabla donde asocie cada término de la ecuación diferencial con su análogo mecánico.

1.2 Escriba la ecuación diferencial de la forma (1) tomando $\omega = 0$ en dicha ecuación, dando las expresiones para γ y ω_0.

1.3 Explique qué son γ y ω_0.

1.4 Para $\varepsilon = 0$, identifique qué tipo de oscilador se tiene. De la condición para $Q(t)$ oscile, calcule su frecuencia angular y el factor de calidad. Repita este inciso para el caso $\varepsilon \neq 0$, una diferencia de potencial constante no nula.

1.5 Para $\varepsilon = 0$ y $R = 0$, identifique qué tipo de oscilador se tiene. Encuentre $Q(t)$ dadas las condiciones iniciales $Q(0) = Q_0$ y $I(0) = 0$. Repita este inciso ahora con $\varepsilon \neq 0$, una fuerza electromotriz constante no nula.

Solución

1.1 Encuentre la ecuación diferencial que satisface la carga $Q(t)$ del condensador. Haga una tabla donde asocie cada término de la ecuación diferencial con su análogo mecánico.

1.1) Dado que el circuito está en serie, se nota que con ley de mallas sale casi inmediatamente la ecuación que buscamos. Primero recordamos la caida de potencial generada por una capacitancia, inductancia y resistencia:

$$V_C = Q/C$$
$$V_L = L\dot{I}$$
$$V_R = IR$$

Ahora sí, la ley de mallas da:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= V_L + V_R + V_C \\ &= L\dot{I} + IR + \frac{Q}{C} \\ &= L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q \end{aligned}$$

Por lo que la ecuación diferencial para nuestro sistema es:

$$\boxed{L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = \varepsilon}$$

Comparando esta ecuación con su análoga mecánica:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F$$

Obtenemos la siguiente equivalencia mostrada por la figura, tomada del libro Vibrations and Waves de A.P. French

Mechanical system	*Electrical system*
Displacement x	Charge q
Driving force F	Driving voltage V
Mass m	Inductance L
Viscous force constant b	Resistance R
Spring constant k	Reciprocal capacitance $1/C$
Resonant frequency $\sqrt{k/m}$	Resonant frequency $1/\sqrt{LC}$
Resonance width $\gamma = b/m$	Resonance width $\gamma = R/L$
Potential energy $\frac{1}{2}kx^2$	Energy of static charge $\frac{1}{2}q^2/C$
Kinetic energy $\frac{1}{2}m(dx/dt)^2 = \frac{1}{2}mv^2$	Electromagnetic energy of moving charge $\frac{1}{2}L(dq/dt)^2 = \frac{1}{2}Li^2$
Power absorbed at resonance $F_0{}^2/2b$	Power absorbed at resonance $V_0{}^2/2R$

Nota para los rigurosos: Como habrán podido notar, se uso la misma corriente I para todos los potenciales. Esto es correcto debido a que el sistema está en serie, por lo cual la corriente que atraviesa cada componente del sistema es igual.

1.2 Escriba la ecuación diferencial de la forma (1) tomando $\omega = 0$ en dicha ecuación, dando las expresiones para γ y ω_0.

1.2)
Para $\omega = 0$ (en la ecuación 1), se obtiene:

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \gamma\frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m}$$

Si dividimos la ecuación diferencial que describe la carga del condensador por L obtenemos:

$$\ddot{Q} + \frac{R}{L}\dot{Q} + \frac{1}{LC}Q = \frac{\varepsilon}{L}$$

Comparando ambas ecuaciones es claro que:

$$\boxed{\gamma = \frac{R}{L}}$$

$$\boxed{\omega_0^2 = \frac{1}{LC}}$$

Explique qué son γ y ω_0.

1.3) ω_0 es la frecuencia angular natural del sistema. Esta es la frecuencia con la que oscilaría el sistema si no hubiera amortiguamiento $\gamma = 0$. Juntos, ω_0 y γ determinan que tan amortiguado está el sistema. Precisamente:

$$\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4} \begin{cases} > 0 & \text{sub amortiguado} \\ = 0 & \text{críticamente amortiguado} \\ < 0 & \text{sobre amortiguado} \end{cases}$$

Particularmente para los casos críticamente amortiguado y sobre amortiguado se tiene que el sistema no presenta oscilaciones(esto solo para osciladores no forzados, si el sistema está forzado con una fuerza periódica $F = F_0\cos(\omega t + \phi)$ si presentara oscilaciones pero debido a la fuerza externa). Para el caso forzado γ y ω_0 tienen interpretaciones adicionales.

1.4 Para $\varepsilon = 0$, identifique qué tipo de oscilador se tiene. De la condición para $Q(t)$ oscile, calcule su frecuencia angular y el factor de calidad. Repita este inciso para el caso $\varepsilon \neq 0$, una diferencia de potencial constante no nula.

1.4) Si $\varepsilon = 0$ se tiene un oscilador amortiguado NO forzado. Para que $Q(t)$ oscile vimos en el tercer punto que el sistema debe estar sub-amortiguado. Por lo que la condición que debe cumplir el sistema es:

$$\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4} > 0$$

Que para nuestro sistema traduce en:

$$\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} > 0$$

Simplificando se obtiene la condición:

$$\boxed{4L - R^2C > 0}$$

La frecuencia angular del sistema bajo la suposición anterior es entonces:

$$\begin{aligned}\omega^2 &= \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2} \\ &= \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}\end{aligned}$$

Entonces la frecuencia angular es:

$$\boxed{\omega^2 = \frac{4L - R^2 C}{4L^2 C}}$$

El factor de calidad es por definición $Q = \omega\gamma^{-1}$, por lo que:

$$\begin{aligned}Q &= \frac{\omega}{\gamma} \\ &= \frac{1}{\sqrt{LC}}\frac{L}{R} \\ &= \sqrt{\frac{L}{CR^2}}\end{aligned}$$

La expresión final para el factor de calidad es:

$$\boxed{Q = \sqrt{\frac{L}{CR^2}}}$$

Finalmente si $\varepsilon \neq 0$, tenemos la misma condición para amortiguamiento débil, la misma frecuencia angular natural y el mismo factor γ. Cómo el factor de calidad del sistema y la frecuencia solo dependen de dichos factores, son los mismos. Vale la pena advertir que si el oscilador se le alimentara una fuente de voltaje ondulatoria(AC) ($\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos(\omega_e t + \phi)$), el sistema terminaría oscilando con la frecuencia natural del voltaje aplicado ω_e.

1.5 Para $\varepsilon = 0$ y $R = 0$, identifique qué tipo de oscilador se tiene. Encuentre $Q(t)$ dadas las condiciones iniciales $Q(0) = Q_0$ y $I(0) = 0$. Repita este inciso ahora con $\varepsilon \neq 0$, una fuerza electromotriz constante no nula.

1.5) Si $\varepsilon = 0$ y $R = 0$, se tiene un oscilar armónico simple. Esto lo sabemos observando la ecuación diferencial que queda:

$$L\ddot{Q} + \frac{1}{C}Q = 0$$

La solución a dicha ecuación diferencial es bien conocida:

$$Q(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) \tag{1}$$

Primero usamos la condición inicial $I(0) = 0$, recordando que $dQ/dt = I$:

$$\dot{Q}(t) = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t) + \omega_0 B \cos(\omega_0 t)$$

Luego

$$I(0) = \omega_0 B = 0$$

De donde obtenemos $B = 0$. Y usando $Q(0) = Q_0$ se obtiene la segunda constante, $A = Q_0$. Finalmente tenemos la siguiente ecuación para $Q(t)$:

$$\boxed{Q(t) = Q_0 \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)}$$

Si ahora $\varepsilon \neq 0$, obtenemos la siguiente ecuación diferencial:

$$L\ddot{Q} + \frac{1}{C}Q = \varepsilon$$

Haciendo el cambio de variable $Q_2 = Q - C\varepsilon$, obtenemos la siguiente ecuación para Q_2:

$$L\ddot{Q}_2 + \frac{1}{C}Q_2 = 0$$

La solución para Q_2 la conocemos:

$$Q_2 = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

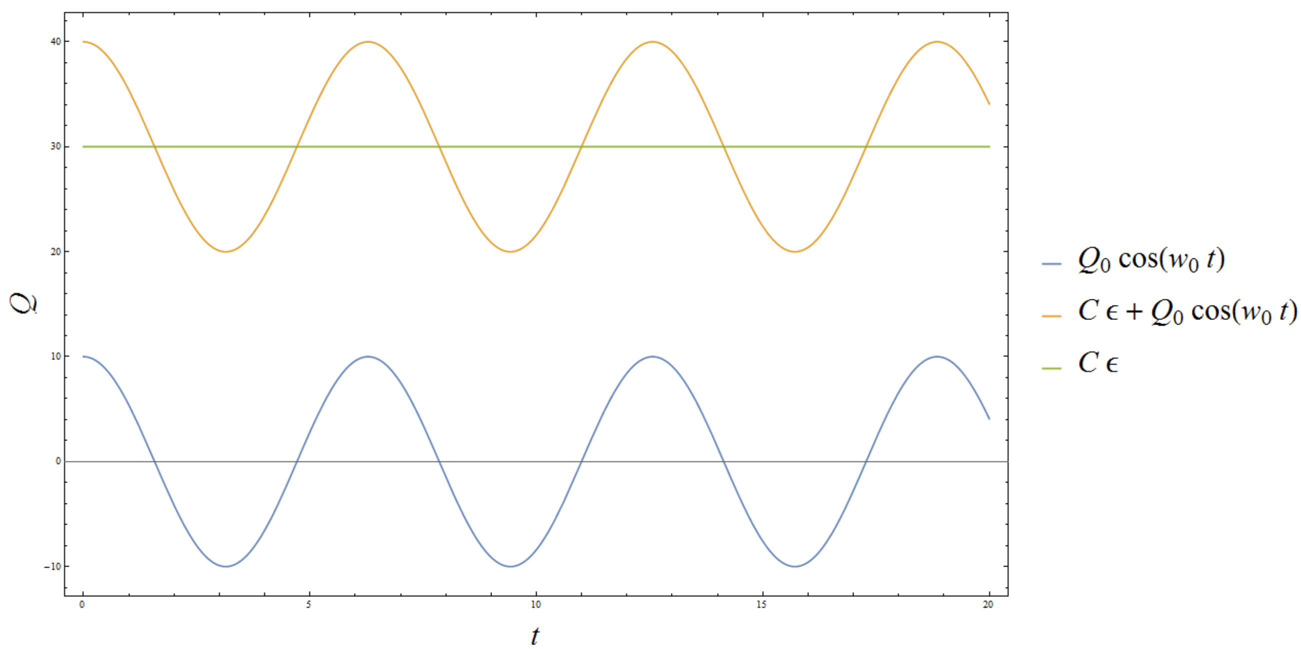
Y volviendo a la variable original tenemos:

$$Q = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + C\varepsilon$$

Aplicando las condiciones iniciales obtenemos la siguiente solución

$$\boxed{Q(t) = C\varepsilon + Q_0 \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)}$$

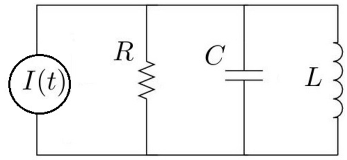
Note que lo único que cambia es que ahora la carga oscila alrededor de la linea $Q = C\varepsilon$. Esto lo puede ver en la siguiente gráfica, donde se asumió $\varepsilon > 0$.



Esto lo puede pensar con el analogo mecánico. Tome una masa colgando de un resorte. El efecto de la fuerza constante de la gravedad es hacer que las oscilaciones que sufre la masa sean alrededor del punto de equilibrio del sistema ($\ddot{x} = 0$ o en este caso $\ddot{Q} = 0$).

2.Circuito RLC en paralelo

Considere un circuito RLC conectado en paralelo con una fuente de corriente alterna $I_{\text{in}} = I_0 \sin(\omega t)$, como se muestra a continuación.



2.1 Encuentre la ecuación diferencial que satisface la diferencia de potencial $V(t)$ del condensador.

2.2 Escriba la ecuación diferencial de la forma (1), dando las expresiones para γ y ω_0 y F_0/m.

2.3 Calcule la frecuencia natural del sistema y la frecuencia de resonancia. ¿Qué relación tienen?

2.4 Para el resto del problema asuma $\omega_0^2 - \gamma^2/4 > 0$, diga que nombre recibe esa condición. De una expresión para la solución transciente del sistema. Explique qué es la solución transciente.

2.5 De una expresión para la solución estacionaria del sistema. Diga si se espera que domine la solución transciente o estacionar luego de un tiempo $t \gg 1/\gamma$. ¿Si $\omega_0^2 - \gamma^2/4 \leq 0$, que cambiaría de su respuesta para este inciso y por qué? Explique bien su respuesta.

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \gamma\frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t) \tag{2}$$

Solución para $\omega_0^2 - \gamma^2/4 > 0$, donde A y α son constantes de integración. Se tiene $\tan\delta(\omega) = \gamma\omega/(\omega_0^2 - \omega^2)$

$$z(t) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - (\omega\gamma)^2}}\cos(\omega t - \delta(\omega)) + Ae^{-\gamma t/2}\cos\left(t\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4} + \alpha\right) \tag{3}$$