Theoretische Informatik 2
Berechenbarkeit und Komplexität

Inoffizielles Skript

Marvin Borner

Vorlesung gehalten von

Ulrike von Luxburg

Sommersemester 2023

Inhalt

1 Reguläre Sprachen und endliche Automaten

Motivation

- Eingabe
- Verarbeitung (Berechnungen, Zustände)
- Ausgabe

1.1 Wörter und Sprachen

Definition

Ein *Alphabet* Σ sei eine nicht-leere, endliche Menge. Ein *Wort* w ist entsprechend eine Folge von Elementen aus Σ.

Beispiel

- $\Sigma = \{a, ..., z\}$, $w =$ luxburg, $|w| = 7$

Definition

Σ^n ist die Menge aller Wörter der Länge n. Die *Kleene'sche Hülle* ist $\Sigma^* := \bigcup_{n=0}^{\infty} \Sigma^n$.
$\Sigma^+ := \bigcup_{n=1}^{\infty} \Sigma^n$.
Sprache L über Σ ist eine Teilmenge von Σ^*.

Definition

Eine *Konkatenation* ist eine Aneinanderhängung zweier Wörter u und w. Eine Konkatenation zweier *Sprachen* L_1, L_2 ist $L_1 \circ L_2 := \{uw \mid u \in L_1,\ w \in L_2\}$. Die Kleene'sche Hülle einer Sprache L ist dann $L^* := \{\underbrace{x_1...x_k}_{\text{Konkatenation von } k \text{ Wörtern}} \mid x_i \in L,\ k \in \mathbb{N}_0\}$.

Eine k-fache Aneinanderhängung von Wörtern ist $w_k = \underbrace{w...w}_{k\text{-mal}}$.

Beispiel

- $w = 010$, $u = 001$, $wu = \underbrace{010}_{w}\underbrace{001}_{u}$, $uwu = \underbrace{001}_{u}\underbrace{010}_{w}\underbrace{001}_{u}$
- $w^3 = 010\ 010\ 010$

Bemerkung

Die Konkatenation auf Σ^* hat die Eigenschaften:
- assoziativ: $a(bc) = (ab)c$
- nicht kommutativ: $ab \neq ba$
- neutrales Element ε: $\varepsilon a = a\varepsilon = a$
- ein inverses Element

Definition

Ein Wort x heißt *Teilwort* eines Wortes y, falls es Wörter u und v gibt, sodass $y = uxv$.
- Falls $u = \varepsilon$, x *Präfix* von y
- Falls $v = \varepsilon$, x *Suffix* von y

Beispiel

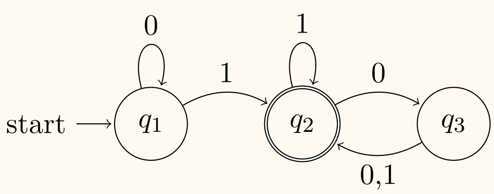
- 01 ist Teilwort von 0**01**11
- 10 ist Präfix von **10**10011
- 011 ist Suffix von 10101110**011**

1.2 Endlicher, deterministischer Automat

Definition

Für einen *endlichen, deterministischen Automat* $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ist
- Q eine endliche Menge der *Zustände*
- Σ das *Alphabet*
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ die Übergangsfunktion
- $q_0 \in Q$ der *Startzustand*
- $F \subset Q$ die Menge der *akzeptierenden Zustände*

Beispiel



$Q = \{q_1, q_2, q_3\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$, q_1 Startzustand, $F = \{q_2\}$.
δ kann dargestellt werden durch

/	0	1
q_1	q_1	q_2
q_2	q_3	q_2
q_3	q_2	q_2

Die Zustandsfolge ist mit $w = 001$

$$q_1 \xrightarrow{0} q_1 \xrightarrow{0} q_1 \xrightarrow{1} q_2.$$

Definition

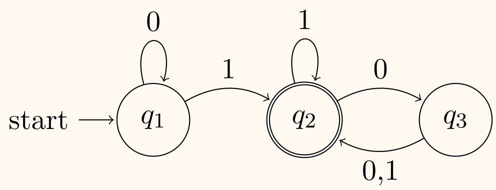
- partielle Übergangsfunktion: nicht alle Übergänge sind definiert
- totale Übergangsfunktion: alle Übergänge sind definiert

Definition

Eine Folge $s_0, ..., s_n \in Q$ von Zuständen heißt *Berechnung* des Automaten $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ auf dem Wort $w = w_1...w_n$, falls
- $s_0 = q_0$,q
- $\forall i = 0, ..., n-1 : s_{i+1} = \delta(s_i, w_{i+1})$

Es ist also eine "gültige" Folge von Zuständen, die man durch Abarbeiten von w erreicht.

Beispiel



- $w = 001$ ergibt die Zustandsfolge $q_1q_1q_1q_2$

Definition

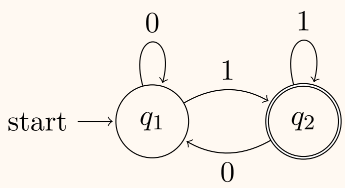
Eine Berechnung *akzeptiert* das Wort w, falls die Berechnung in einem akzeptierten Zustand endet.
Die von einem endlichen Automaten M *akzeptierte* (erkannte) Sprache $L(M)$ ist die Menge der Wörter, die von M akzeptiert werden:

$$L(M) := \{w \in \Sigma^* \mid M \text{ akzeptiert } w\}$$

Bemerkung

Eine Berechnung kann mehrmals in akzeptierenden Zuständen eintreten/austreten. Wichtig ist der Endzustand, nachdem der letzte Buchstabe des Eingabewortes verarbeitet wurde.

Beispiel



- $w = 1101 \to q_1q_2q_2q_1q_2 \to w$ wird akzeptiert
- $w = 010 \to q_1q_1q_2q_1 \to w$ wird **nicht** akzeptiert

Es folgt:

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid w = \varepsilon \text{ oder } w \text{ endet mit } 0\}$$

Definition

Sei $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ eine Übergangsfunktion. Die *erweiterte Übergangsfunktion* $\delta^* \colon Q \times \Sigma^* \to Q$ sei induktiv definiert:

- $\delta^*(q, \varepsilon) = q$ für alle $q \in Q$
- Für $w \in \Sigma^*$, $a \in \Sigma$ ist:

$$\delta^*(q, wa) = \delta(\underbrace{\delta^*(q, w)}_{\text{Zustand nach Lesen von } w}, \overbrace{a}^{\text{Lesen von Buchstabe } a}).$$

1.3 Reguläre Sprachen und Abschlusseigenschaften

Definition

Eine Sprache $L \subset \Sigma^*$ heißt *reguläre Sprache*, wenn es einen endlichen Automaten M gibt, der diese Sprache akzeptiert.
Die Menge aller regulären Sprachen ist REG.

Satz

Sei L eine reguläre Sprache über Σ. Dann ist auch $\overline{L} := \Sigma^* \setminus L$ eine reguläre Sprache.

Beweis

- L regulär $\implies$ es gibt Automaten $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, der L akzeptiert
- Definiere "Komplementautomat" $\overline{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, \overline{F})$ mit $\overline{F} := Q \setminus F$.
- Dann gilt:

$$\begin{aligned} w \in \overline{L} &\iff M \text{ akzeptiert } w \text{ nicht} \\ &\iff \overline{M} \text{ akzeptiert } w. \end{aligned}$$

Q.E.D.

Satz

Die Menge der regulären Sprachen ist abgeschlossen bezüglich der Vereinigung:

$$L_1, L_2 \in \text{REG} \implies L_1 \cup L_2 \in \text{REG}.$$

Beweis

Sei $M_1 = (Q_1, \Sigma_1, \delta_1, s_1, F_1)$ ein Automat, der L_1 erkennt, $M_2 = (Q_2, \Sigma_2, \delta_2, s_2, F_2)$ ein Automat, der L_2 erkennt.
Wir definieren den Produktautomaten $M := M_1 \times M_2$: $M = (Q, \Sigma, \Delta, s, F)$ mit

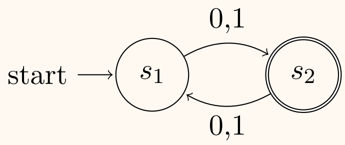
- $Q = Q_1 \times Q_2$
- $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$,
- $\underbrace{s}_{\text{neuer Startzustand}} = (s_1, s_2)$, $F = \{(f_1, f_2) \mid f_1 \in F_1 \text{ oder } f_2 \in F_2\}$,
- $\underbrace{\Delta}_{\text{neue Übergangsfunktion}} : Q \times \Sigma \to Q$,

$$\Delta((\underbrace{r_1}_{\in Q_1}, \underbrace{r_2}_{\in Q_2}), \underbrace{a}_{\in \Sigma}) = (\delta_1(r_1, a), \delta(r_2, a)).$$

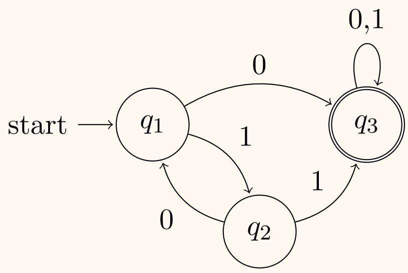
Übertragung der Definition auf erweiterte Übergangsfunktionen: Beweis durch Induktion (ausgelassen).
Nach Definition von F akzeptiert M ein Wort w, wenn M_1 oder M_2 das entsprechende Wort akzeptieren. Der Satz folgt. Q.E.D.

Beispiel

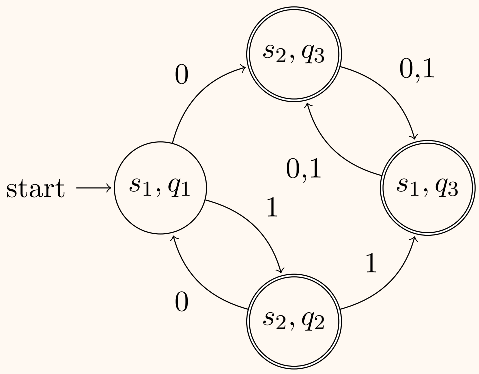
M_1:



M_2:



$M_1 \times M_2$:



Satz

Seien L_1, L_2 zwei reguläre Sprachen. Dann sind auch $L_1 \cap L_2$ und $L_1 \setminus L_2$ reguläre Sprachen.

Beweis

- $L_1 \cap L_2$: Beweis funktioniert analog wie für $L_1 \cup L_2$, nur mit

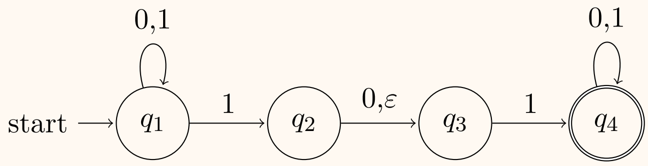
$$F := \{(q_1, q_2) \mid q_1 \in F_1 \textbf{ und } q_2 \in F_2\}.$$

- $L_1 \setminus L_2 = L_q \cap \overline{L_2}$

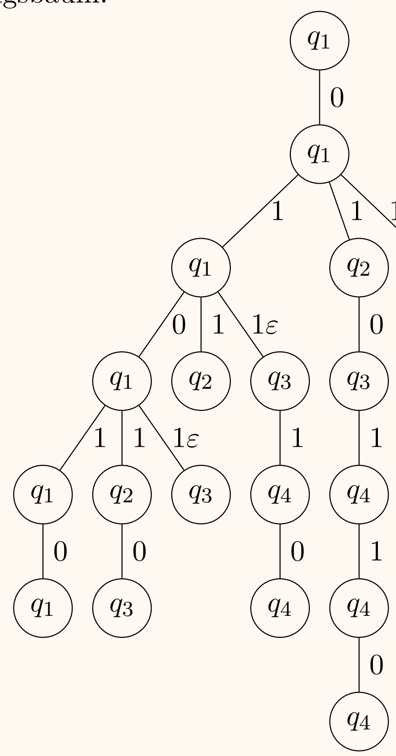
Q.E.D.

1.4 Nicht-deterministische Automaten

Beispiel



Der komplette Berechnungsbaum:



Definition

Ein *nicht-deterministischer Automat* besteht aus einem 5-Tupel $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.

- Q, Σ, q_0, F wie beim deterministischen Automat,
- $\delta : Q \times \Sigma \cup \{\varepsilon\} \to \overbrace{\mathcal{P}(Q)}^{(*)}$ Übergangsfunktion

$(*)$: Die Funktion definiert die **Menge** der möglichen Zustände, in die man von einem Zustand durch Lesen eines Buchstabens gelangen kann.

Definition

Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein nicht-deterministischer endlicher Automat, $w = w_1...w_n \in \Sigma^*$. Eine Folge von Zuständen $s_0, s_1, ..., s_m \in Q$ heißt *Berechnng von M auf w*, falls man w schreiben kann als $w = u_1u_2...u_m$ mit $u_i \in \Sigma \cup \{\underbrace{\varepsilon}_{\text{Übergänge } \varepsilon, \text{ hier } u_i = \varepsilon}\}$, sodass

- $s_0 = q_0$,
- für alle $0 \leq i \leq m-1 : s_{i+1} \in \delta(s_1, u_{i+1})$.

Die Berechnung heißt *akzeptierend*, falls $s_m \in F$.

Der nicht-deterministische Automat M *akzeptiert Wort w*, falls es eine akzeptierende Berechnung von M auf w gibt.

Bemerkung

ε-Transitionen: Ein nicht-deterministischer Automat kann bei "Lesen" des leeren Wortes ε einen Übergang machen, falls es so in der Übergangsfunktion definiert ist.

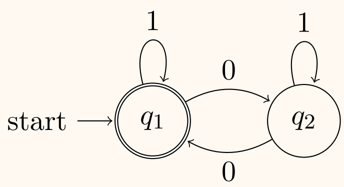
Beispiel

Betrachte die regulären Sprachen

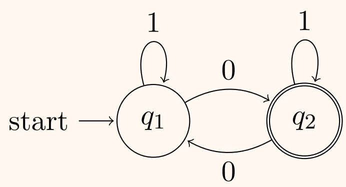
- $A := \{x \in \{0,1\}^* \mid \text{Anzahl } 0 \text{ gerade}\}$
- $B := \{x \in \{0,1\}^* \mid \text{Anzahl } 0 \text{ ungerade}\}$

Zugehörige Automaten:

M_A:

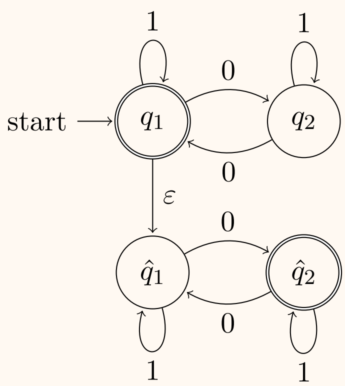


M_B:



Nun betrachte *Konkatenation* AB. Um die Sprache zu erkennen, müsste der Automat bei einer Eingabe zunächst einen ersten Teil A des Wortes betrachten und schauen, ob die Anzahl der 0 gerade ist. **Irgendwann** müsste er beschließen, dass nun der zweite Teil B des Wortes anfängt und er müsste schauen, ob dort die Anzahl der 0 ungerade ist.

$$\text{"Irgendwann"} \implies \text{nicht-deterministisch.}$$



1.5 Mächtigkeit

Bemerkung

Die Mächtigkeit eines Automaten wird hierbei beschrieben durch die Anzahl an Sprachen, die dieser erkennen kann.

Definition

Zwei Automaten M_1, M_2 heißen *äquivalent*, wenn sie die gleiche Sprache erkennen:

$$L(M_1) = L(M_2)$$

Satz

Zu jedem nicht-deterministischen endlichen Automaten gibt es einen äquivalenten deterministischen endlichen Automaten.

Beweis

Lang aber trivial. Basically konstruiert man einfach eine deterministische Übergangsfunktion auf den nicht-deterministischen Verzweigungen.

Satz

Es folgt:
Eine Sprache L ist regulär $\iff$ es gibt einen nicht-deterministischen Automaten, der L akzeptiert.

Satz

Die Klasse der regulären Sprachen ist abgeschlossen unter Konkatenation:

$$L_1, L_2 \in \text{REG} \implies L_1 L_2 \in \text{REG}$$

Satz

Die Klasse REG ist abgeschlossen unter Bildung der Kleene'schen Hülle, d.h.:

$$L \in \text{REG} \implies L^* \in \text{REG}$$

1.6 Reguläre Ausdrücke

Definition

Sei Σ ein Alphabet. Dann:

- $\underbrace{\emptyset}_{\text{leere Sprache}}$ und $\overbrace{\varepsilon}^{\text{leeres Wort}}$ sind reguläre Ausdrücke.
- Alle Buchstaben aus Σ sind reguläre Ausdrücke.
- Falls R_1, R_2 reguläre Ausdrücke sind, dann sind auch die folgenden Ausdrücke regulär:
  - $R_1 \cup R_2$,
  - $R_1 \circ R_2$,
  - R_1^*.

Definition

Sei R ein regulärer Ausdruck. Dann ist die *von R induzierte Sprache* $L(R)$ wie folgt definiert:

- $R = \emptyset \implies L(R) = \emptyset$
- $R = \varepsilon \implies L(R) = \{\varepsilon\}$
- $R = \sigma$ für ein $\sigma \in \Sigma \implies L(R) = \{\sigma\}$
- $R = R_1 \cup R_2 \implies L(R) = L(R_1) \cup L(R_2)$
- $R = R_1 \circ R_2 \implies L(R) = L(R_1) \circ L(R_2)$
- $R = R_1^* \implies L(R) = (L(R_1))^*$

Satz

Eine Sprache ist genau dann regulär, wenn sie durch einen regulären Ausdruck beschrieben wird.

Beweis

Strukturelle Induktion. Tja.

1.7 Pumping-Lemma

Motivation

Frage: Gibt es Sprachen, die nicht regulär sind?

Beispiel

$$L = \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{01, 0011, 00111, ...\}$$

Ein Automat, der L erkennt, müsste vermutlich "zählen" können. Mit endlich vielen Zuständen scheint dies für beliebig große Zahlen nicht möglich zu sein.
Aber: Wir kann man das formal beweisen?

Satz

Sei A eine reguläre Sprache über das Alphabet Σ. Dann gibt es eine natürliche Zahl n, sodass sich alle Wörter $s \in A$ mit Länge $|s| \geq n$ zerlegen lassen in drei Teilworte $s = xyz$, mit $x, y, z \in \Sigma^*$, sodass gilt:

- $|y| > 0$,
- $|xy| \leq n$,
- $\forall i \geq 0 : xy^i z \in A$

Beweis

Idee: Ein Automat mit n Zuständen besucht für die Verarbeitung eines Wortes w mit Länge $> n$ immer $n + 1$ Zustände $\implies$ es gibt einen Zustand, der mindestens zweimal besucht wird.

Bemerkung

Aus der Kontraposition folgt: A nicht regulär $\implies \forall n \exists s \forall x, y, z \in \Sigma^* \exists i : xy^i z \notin A$

Beispiel

Wir zeigen mit dem Pumping-Lemma, dass $L = \{0^n1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ nicht regulär ist.

Beweis

Betrachte ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$. Wähle das Wort $s = 0^n1^n$ (es gilt $|s| > n$). Sei nun $xyz = s$ eine beliebige Zerlegung (mit $|y| > 0$, $|xy| \leq n$). Man muss nun ein i finden, soadss xy^iz nicht in L ist.

- Fall 1: y besteht nur aus 0en: $s = \overbrace{0}^{x}\overbrace{00}^{y}\overbrace{...0111...1}^{z}$. Dann ist $xy^2z \notin L$ (da es mehr 0en als 1en hat).
- Fall 2: y besteht nur aus 1en: analog.
- Fall 3: y hat 0en und 1en: $s = \overbrace{0...0}^{x}\overbrace{011}^{y}\overbrace{...1}^{z}$. Dann ist aber $xy^2z \notin L$.

1.8 Pushdown automaton

Motivation

Endliche Automaten haben nur endlichen Speicher, können also nicht mal zählen. Deshalb ein erweitertes Modell: Automat mit Stack als Speicher.

Definition

Ein nicht deterministischer *Kellerautomat* besteht aus einem 6-Tupel $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$, wobei gilt:

- Q endliche Zustandsmenge
- Σ Eingabealphabet
- Γ Stack-Alphabet
- $q_0 \in Q$ Startzustand
- $F \subset Q$ Menge der akzeptierenden Zustände
- Übergangsfunktion:

$$\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times (\Gamma \cup \{\varepsilon\}) \to \mathcal{P}(Q \times (\Gamma \cup \{\varepsilon\}))$$

Beispiel

$$L = \{ww^R \mid w \text{ Wort über } \Sigma\}$$

wobei w^R das Wort w rückwärts ist, kann von einem (nicht-deterministischen) Kellerautomaten erkannt werden.

Beispiel

$$L = \{a^nb^nc^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

kann von einem Kellerautomaten *nicht* erkannt werden.

Bemerkung

Die Sprachen, die von einem nicht-deterministischen Kellerautomaten erkannt werden können, heißen *kontextfreie Sprachen*. Bei deterministischen Kellerautomaten heißen sie entsprechend *deterministische kontextfreie Sprachen*.

1.9 Grammatiken

Nicht wirklich relevant.

Bemerkung

- Backus-Naur Schreibweise
- Chomsky-Hierarchie

2 Turingmaschinen

Motivation

Ein allgemeineres Modell eines Computers:
- kann eine Eingabe lesen
- hat beliebig viel Speicherplatz
- kann Dinge an beliebigen Stellen in den Speicher schreiben/lesen
- kann beliebig viele Rechenschritte machen

Beispiel

Betrachte die Sprache $L = \{w\#w \mid w \in \{0,1\}^*\}$.
- lies den ersten Buchstaben und merke
- überschreibe mit Symbol $x \notin \{0, 1, \#\}$
- nach rechts bis # erscheint
- vergleiche nächsten ($\neq y$) Buchstabe mit gemerkten
- falls gleich:
  - überschreibe mit $y \notin \{0, 1, \#, x\}$
  - gehe zurück bis x
  - wiederhole

Definition

Eine *Turingmaschine (TM)* ist ein 7-Tupel $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{accept}}, q_{\text{reject}})$:
- Q ist eine endliche Menge von *Zuständen*
- Σ ist eine endliche Menge, das *Eingabealphabet*
- Γ ist eine endliche Menge, das *Arbeitsalphabet*, mit $\Sigma \subset \Gamma$ und einem Leerzeichen $\sqcup$
- $\delta : Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R\}$ die *Übergangsfunktion*
- $q_0 \in Q$ der *Startzustand*
- $q_{\text{accept}} \in Q$ der *akzeptierende Endzustand*
- $q_{\text{reject}} \in Q$, $q_{\text{reject}} \neq q_{\text{accept}}$ der *verwerfende Endzustand*

Bemerkung

- Es gibt genau einen akzeptierenden und verwerfenden Zustand
- Die TM beendet ihre Berechnung, sobald sie einen dieser beiden Zustände erreicht
- Das Band der TM hat "ein linkes Ende", nach rechts ist es unbeschränkt

Beispiel

TM, die $L = \{0^{2^n} \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ erkennt.
- $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_{\text{accept}}, q_{\text{reject}}\}$
- $\Sigma = \{0\}$
- $\Gamma = \{0, x, \sqcup\}$
- $\delta =$ tja?

Definition

Eine *Konfiguration* der TM M wird beschrieben durch den Inhalt des Bandes, die Position des Lesekopfes und den derzeitigen Zustand $q \in Q$:

$$uqv$$

- Inhalt des Speicherbandes ist String uv
- Position des Schreibkopfes ist direkt nach u, auf dem ersten Buchstaben von v
- Zustand ist q

Außerdem:
- Die *Startkonfiguration* von M auf Eingabe w ist $q_0 w$
- Eine Konfiguration heißt *akzeptierend/verwerfend*, wenn der Zustand $q_{\text{accept}}/q_{\text{reject}}$ ist

Definition

Eine *Berechnung* der TM M auf Eingabe w ist eine gültige Folge von Konfigurationen $C_0, C_1, C_2, \ldots$, sodass C_0 die Startkonfiguration ist und die Konfiguration C_{i+1} jeweils in der Übergangsfunktion beschrieben aus C_i hervorgeht.
Eine Berechnung einer TM auf Eingabe w heißt *akzeptierend/verwerfend*, falls sie im Zustand $q_{\text{accept}}/q_{\text{reject}}$ endet.
Eine Berechnung heißt *nicht-akzeptierend*, falls sie entweder in q_{reject} endet oder *nie beendet wird*.

Definition

Eine Sprache L heißt *rekursiv aufzählbar (semi-entscheidbar)*, falls es eine TM M gibt, die L akzeptiert. Das heißt:
- $w \in L \implies M$ akzeptiert w
- $w \notin L \implies M$ verwirft oder hält nicht an

Definition

Eine Sprache L heißt *(rekursiv) entscheidbar*, falls es eine TM M gibt, sodass gilt:
- $w \in L \implies M$ akzeptiert w
- $w \notin L \implies M$ verwirft w

M **hält immer an.**

2.1 Varianten

Definition

Zwei Turing-Machinen M_1, M_2 heißen *äquivalent*, falls sie die gleichen Sprachen akzeptieren: $L(M_1) = L(M_2)$.

$$\begin{aligned} M_1 \text{ akzeptiert } w &\implies M_2 \text{ akzeptiert } w \\ M_1 \text{ akzeptiert } w \text{ nicht} &\implies M_2 \text{ akzeptiert } w \text{ nicht} \end{aligned}$$

Definition

Wir können wie bei endlichen Automaten eine *nicht-deterministische Turingmaschine (NTM)* definieren:

- Zu jedem Zeitpunkt hat die TM mehrere Möglichkeiten, wie sie fortfahren kann
- Formal geht dann die Übergangsfunktion

$$\delta : Q \times \Gamma \to \mathcal{P}(Q \times \Gamma \times \{L, R\})$$

Definition

Eine *Berechnung* der NTM entspricht einem möglichen Pfad im “Baum der möglichen Berechnungen”.
Eine Berechnung heißt *akzeptierend/verwerfend*, falls sie in einem *akzeptierenden/verwerfenden* Zustand endet.
Die von der NTM *akzeptierte Sprache* besteht aus den Wörtern, für die es eine akzeptierende Berechnung gibt: Mindestens einer der Pfade im Berechnungsbaum endet im akzeptierenden Zustand.

Bemerkung

- bei DTMs: nicht akzeptierend $\iff$ verwerfen oder nicht terminieren
- bei NTMs: nicht akzeptierend $\iff$ $\forall$Pfade: Pfad verwirft oder endet nicht

Satz

$$\text{DTM} \underbrace{\equiv}_{\text{berechenbarkeitsäquivalent}} \text{NTM}$$

Beweis

Breitensuche im Berechnungsbaum. Blabla offensichtlich.

3 Entscheidbarkeit von Sprachen vs. Berechenbarkeit von Funktionen

Definition

Eine Funktion $f : \Sigma^* \to \Gamma^*$ heißt *(Turing)-berechenbar* oder *totalrekursiv*, falls es eine TM gibt, die bei Eingabe von $w \in \Sigma^*$ den Funktionswert $f(w)$ ausgibt (und insbesondere anhält).

Satz

Eine Sprache $L \subset \Sigma^*$ ist genau dann *entscheidbar*, wenn ihre charakteristische Funktion

$$\mathbb{1}_L : \Sigma^* \to \{0,1\}, \mathbb{1}_L(w) = \begin{cases} 1 & w \in L \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

berechenbar ist.

Beweis

- L entscheidbar $\implies \mathbb{1}_L$ berechenbar
  - TM M, die w genau dann akzeptiert, wenn $w \in L$. Erweitern zu $\hat{M}$:
    * falls M akzeptiert, schreibe 1 auf Band und lösche alles andere
    * falls M verwirft, schreibe 0 aufs Band
- $\mathbb{1}_L$ berechenbar $\implies L$ entscheidbar
  - $\hat{M}$ berechnet $\mathbb{1}_L$
    * TM gibt 1 $\implies$ akzeptierender Zustand
    * TM gibt 0 $\implies$ verwerfender Zustand

Q.E.D.

Satz

Eine Funktion $f : \Sigma^* \to \Gamma^*$ ist *berechenbar* genau dann, wenn es eine TM gibt, die die folgende Sprache *entscheidet*:

$$L_f = \{w\#g \mid w \in \Sigma^*, g \in \Gamma^*, f(w) = g\}$$

Beweis

- $f : \Sigma^* \to \Gamma^*$ berechenbar $\implies L_f$ entscheidet
  - TM M_1 berechnet bei $w \in \Sigma^*$ Ausgabe von $f(w)$
  - TM M_2 bekommt $w\#g$ und ruft M_1 mit w auf
  - M_2 wartet auf Ergebnis g_1 von M_1
  - M_2 vergleicht g_1 mit g
- L_f entscheidet $\implies f : \Sigma^* \to \Gamma^*$ berechenbar
  - TM M_2 entscheidet L_f
  - TM M_1 bekommt w
  - M_1 probiert *alle* Antworten von $f(w)$ aus bis die richtige Antwort gefunden wurde
  - sobald L_f akzeptiert, weiß M_1 die Antwort

Q.E.D.

3.1 Gödelnummer

Motivation

Programmierbare Turingmaschinen?
$\implies$ binäre Kodierung für TM?!

Beispiel

Eine beispielhafte Kodierung einer TM $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{accept}}, q_{\text{reject}})$ mit $\{0, 1, \#\}$:

- $\Gamma = \{A_1, ..., A_r\}$: $C(A_j) = 10^j1$
- $Q = \{q_1, ..., q_m\}$: $C(q_i) = 110^i11$
- $C(L) = 1110111$ und $C(R) = 11100111$
- $C(\delta(q, a) = (\hat{q}, \hat{a}, B)) = \#C(q)C(a)C(\hat{q})C(\hat{a})C(B)\#$

$\implies C(M) = \#0^m\#0^r\#C(t_1)\#C(t_2)\#...$ mit Transitionen t_i, $m = |Q|$ und $r = |\Gamma|$.
Ein reiner binärer String lässt sich durch $0 \mapsto 00, 1 \mapsto 11, \# \mapsto 01$ bilden.

Bemerkung

Die Kodierung ist

- injektiv: $C(M_1) = C(M_2) \implies M_1 = M_2$.
- *präfixfrei*

Satz

Es gibt eine TM A_{true}, die für einen binären String w entscheidet, ob er eine gültige Kodierung einer TM ist.

Definition

Seien $x, y \in \{0, 1\}^+$ zwei binäre Strings. $x \leq y$ falls n_x, n_y die durch die Strings repräsentiert werden, $n_x \leq n_y$ repräsentieren.
Für $x = \varepsilon, y \in \{0, 1\}^*$ gelte immer $\varepsilon \leq y$.

Bemerkung

Erfüllt die Bedingungen einer *totalen Ordnung*: Transitiv, anti-symmetrisch und total.

Definition

Sei $x \in \{0, 1\}^*$. Für $i \in \mathbb{N}$ nennt man x die Kodierung der *i-ten Turingmaschine*, falls gilt:

- $x = C(M)$ für eine TM M
- $\{y \in \{0, 1\}^* \mid y \leq x\}$ enthält genau $i - 1$ Wörter, die Kodierungen von Turingmaschinen sind.

Satz

Es gibt eine TM A, die für ein $i \in \mathbb{N}$ die Kodierung der i-ten TM berechnet.

Definition

Informell: Die natürliche Zahl (der binäre String), der eine Turingmaschine beschreibt, heißt die *Gödelnummer der TM*. Schreibweise $\langle M \rangle$.
Formell: Sei $\mathcal{M}$ die Menge aller Turingmaschinen. Die *Gödelisierung* sei $g : \mathcal{M} \to \mathbb{N}$, falls gilt:

- g ist injektiv
- $g(\mathcal{M})$ ist entscheidbar (TM konstruierbar, die für jedes $n \in \mathbb{N}$ entscheidet, ob $n \in G(\mathcal{M}) gilt$)
- $g : \mathcal{M} \to N$ und $g^{-1} : g(\mathcal{M}) \to \mathcal{M}$ sind berechenbar

$g(M)$ heißt für $M \in \mathcal{M}$ die *Gödelnummer* von M.

3.2 Die universelle Turingmaschine

Motivation

Turingmaschinen können bis jetzt nur genau ein Programm ausführen, aber wir wollen mehr!! :((

Beispiel

Eine Möglichkeit ist eine *3-Band-TM*:

- Auf Band 1 wird M simuliert
- Auf Band 2 wird die Gödelnummer $\langle M \rangle$ geschrieben
- Auf Band 3 wird der aktuelle Zustand von M vermerkt

Vorbereitung:

- U liest $\langle M \rangle w$ auf Band 1 und teilt sie in $\langle M \rangle$ und w auf
  - bricht ab, falls $\langle M \rangle$ keine korrekte Kodierung ist
- U kopiert $\langle M \rangle$ auf Band 2 und löscht sie von Band 1
- U schreibt die Kodierung des Startzustandes von M auf Band 3

Simulation:

- U weiß mittels Band 3 den aktuellen Zustand
- U liest den aktuellen Buchstaben von Band 1
- U sucht auf Band 2 den zugehörigen Übergang
- U führt Übergang auf Band 1 durch und merkt sich den neuen Zustand in Band 3

Ausgabe:

- U stoppt, sobald Band 3 den akzeptierenden/verwerfenden Zustand erreicht
- Band 1 enthält die Ausgabe der Berechnung

3.3 Abzählbar unendliche Mengen

Motivation

Es gibt **viel** mehr Sprachen als Turingmaschinen $\Longrightarrow$ es gibt Sprachen, die nicht von TMs erkannt werden können.

Definition

Eine Menge $M \neq \emptyset$ heißt *endlich*, falls es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, für das es eine bijektive Abbildung

$$g : \{1, 2, ..., n_0\} \to M$$

gibt. Andernfalls heißt M *unendlich*.
Im endlichen Fall bezeichnet man mit $|M| := n_0$ die *Kardinalität/Mächtigkeit* der Menge.

Definition

Zwei Mengen M_1, M_2 heißen *gleich mächtig*, falls es eine bijektive Abbildung $M_1 \to M_2$ gibt.
M_2 heißt *mächtiger als* M_1, falls es eine injektive Abbildung $f : M_1 \to M_2$ und keine injektive Abbildung $g : M_2 \to M_1$ gibt.

Definition

Menge M heißt *abzählbar unendlich*, wenn sie gleich mächtig wie $\mathbb{N}$ ist (es existiert Bijektion $f : M \to \mathbb{N}$).
Menge M heißt *höchstens abzählbar*, wenn sie endlich oder abzählbar unendlich ist.
Eine Menge, die weder endlich noch abzählbar ist, heißt *überabzählbar*.

Bemerkung

Menge $\mathbb{N}$ ist unendlich und abzählbar:

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto n \text{ bijektiv}$$

3.3.1 Spaß mit Abzählbarkeit

Motivation

Oh nein mein Hotel hat unendlich viele Zimmer und alle sind besetzt!
Jetzt kommt noch ein Gast aber wo soll der hin??
Dann kommt noch ein Bus mit abzählbar vielen Leuten – was soll ich tun??!?

Beispiel

- $\mathbb{Z}$ ist abzählbar mit folgender Bijektion:

$\mathbb{N}$	1	2	3	4	5	6	7
$\mathbb{Z}$	0	1	-1	2	-2	3	-3

- $\mathbb{N}^2$ ist abzählbar mit cooler zickidizickzack Bijektion
- $\mathbb{Q}$ ist abzählbar mit noch coolerer zickidizickzack Bijektion

Satz

Eine Menge ist genau dann unendlich, wenn es eine echte Teilmenge $U \subset M, M \neq M$ und eine injektive Abbildung $f : M \to U$ gibt.

Satz

Sei M eine beliebige unendliche Menge. Dann ist $\mathbb{N}$ nicht mächtiger als M.

Satz

- Sei A höchstens abzählbar, $f : A \to B$ bijektiv. Dann ist auch B höchstens abzählbar.
- M abzählbar, $N \subset M$. Dann ist N endlich oder abzählbar.
- Seien $M_1, M_2, ...$ abzählbare Mengen. Dann ist $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i$ auch abzählbar.
- Endliche Produkte von abzählbaren Mengen sind abzählbar: $M_1, M_2, ..., M_n$ abzählbar. Dann $M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$ abzählbar

Bemerkung

Gilt nicht für unendliche Produkte! Bspw. $2^{\mathbb{N}}$ ist überabzählbar.

3.4 Wie groß ist Σ^*?

Satz

Σ^* ist unendlich.

Beweis

- Σ enthält mindestens einen Buchstaben: $a \in \Sigma$
- Σ^* enthält demnach $a, a^2, a^3, ...$
- Also existiert injektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to \Sigma^*, f(u) = a^i$, also muss Σ^* unendlich groß sein Q.E.D.

Satz

Σ^* ist abzählbar unendlich.

Beweis

Bijektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to \Sigma^*$:

$$\Sigma^* = \{\text{Wörter mit Länge } 0\} \cup \{\text{Wörter mit Länge } 1\} \cup ...$$

- f ist wohldefiniert: Jedes $n \in \mathbb{N}$ erhält genau ein Bildwort $f(n) \in \Sigma^*$ (klar)
- Surjektiv: Jedes Wort von Σ^* kriegt mindestens eine Nummer (klar)
- Injektiv: Jedes Wort von Σ^* kriegt genau eine Nummer (klar) Q.E.D.

Satz

Sei L eine Sprache über einem endlichen Alphabet. Dann ist L höchstens abzählbar.

Satz

Die Menge aller Turingmaschinen ist abzählbar.

Beweis

TM M kann eindeutig durch GN $\langle M \rangle \in \{0,1\}^*$ beschrieben werden und $\{0,1\}^*$ ist abzählbar. Q.E.D.

3.5 Überabzählbare Mengen

Satz

Die Menge der reelen Zahlen ist überabzählbar.

Beweis

Über Cantorsches Diagonalisierungsverfahren. Trivial.

Bemerkung

- $\mathbb{N}$ abzählbar
- $\mathbb{Q}$ abzählbar
- $\mathbb{R}$ überabzählbar

3.5.1 $2^{\mathbb{N}}$ ist überabzählbar

Satz

Die Menge $2^{\mathbb{N}} := \{0,1\}^{\mathbb{N}} := \{(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \mid a_i \in \{0,1\}\}$ ist überabzählbar.

Beweis

Widerspruchsbeweis mit Cantor. Trivial.

Bemerkung

$2^{\mathbb{N}}$ und $[0,1] \subset \mathbb{R}$ haben Gemeinsamkeiten:

- Zahlen aus $[0,1]$ als Binärfolge darstellbar
- Erzeugt Bijektion zwischen $2^{\mathbb{N}}$ und $[0,1]$ (außer periodische 1)

3.5.2 Indikatorfunktion einer abzählbaren Menge

TODO

3.5.3 Mächtigkeit von Potenzmengen

TODO

3.5.4 Russels Paradox

TODO

3.6 Sprachen, die nicht semi-entscheidbar sind

Satz

Betrachte das Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$. Es gibt Sprachen L über Σ, die nicht rekursiv aufzählbar sind.

Beweis

- Die Menge aller TM/GN ist ist abzählbar unendlich
- Ergo ist die Menge aller Sprachen, die von einer TM entschieden werden, auch höchstens abzählbar
- Die Menge aller Sprachen über $\{0, 1\}$ ist überabzählbar
- Ergo muss es Sprachen geben, die nicht von einer TM entschieden werden können Q.E.D.

Motivation

Existenz ist schön und gut, aber können wir tatsächlich eine $D \notin$ RE konstruieren?

3.6.1 Diagonalsprache

Definition

- Seien $w_1, w_2, w_3, ...$ alle Wörter über $\Sigma = \{0, 1\}$ (abzählbar viele)
- Seien $M_1, M_2, M_3, ...$ alle TM (abzählbar viele) TODO: autoformat

/	w_1	w_2	w_3	$\dots$
M_1	d_{11}	d_{12}	d_{13}	$\dots$
M_2	d_{21}	d_{22}	d_{23}	$\dots$
M_3	d_{31}	d_{32}	d_{33}	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Beispiel

$$\begin{array}{lcccc}
/ & w_1 & w_2 & w_3 & \dots \\
\hline
M_1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\
M_2 & 0 & 1 & 0 & \dots \\
M_3 & 1 & 1 & 0 & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Diagonalsprache $D = \{w_i \mid d_{ii} = 0\}$:

- Enthält das Wort w_3
- Enthält nicht die Wörter w_1, w_2

Es gibt keine TM, die D erkennt:

- D wird nicht von M_1 erkannt
  - M_1 akzeptiert w_1. Aber da $d_{11} = 1$ ist $w_1 \notin D$
- D wird nicht von M_2 erkannt (analog)
- D wird nicht von M_3 erkannt
  - M_3 akzeptiert w_3 nicht, da $d33 = 0$. Also würde M_3 ein Wort aus D nicht akzeptieren
- usw.

Satz

$D \in$ RE: Die Diagonalsprache ist nicht rekursiv aufzählbar.

3.6.2 Game of Life

Definition

- Jede schwarze Zelle mit 2/3 schwarzen Nachbarn bleibt schwarz, alle anderen schwarzen Zellen werden weiß
- Jede weiße Zelle mit drei schwarzen Nachbarn wird schwarz, die anderen weißen Zellen werden weiß

Satz

Das Problem, von einer Startkonfiguration eine bestimmte Zielkonfiguration zu erreichen, ist unentscheidbar.

3.7 Sprachen, die semi-entscheidbar, aber nicht entscheidbar sind

Definition

$$A_{\mathrm{TM}} = \{\langle M, w\rangle \mid M \text{ist Code einer TM und } w \text{ wird von } M \text{ akzeptiert}\} \subset \{0,1\}^*$$

mit $\langle M, w\rangle$ Wort, welches die GN der TM M mit w konkateniert.

Satz

A_{TM} ist semi-entscheidbar:

$$A_{\mathrm{TM}} \in \mathrm{RE}$$

Satz

A_{TM} ist nicht entscheidbar:

$$A_{\text{TM}} \notin \text{R}$$

3.7.1 Komplementbildung

Definition

Sei $L \in \mathcal{L}$ eine Sprache über Σ. Die *Komplement-Sprache* L^C ist definiert als

$$L^C := \{w \in \Sigma^* \mid w \notin L\}.$$

Manchmal auch Notation $\overline{L}$ statt L^C.

Satz

$L \in \text{R} \implies L^C \notin \text{R}.$

Definition

Die Menge *coRE* ist definiert als

$$\text{coRE} := \{L \mid L^C \in \text{RE}\}.$$

Oder anders aufgeschrieben:

$$L \in \text{coRE} :\iff L^C \in \text{RE}.$$

Satz

$L \in \text{R} \iff L \in \text{RE} \wedge L \in \text{coRE}$

Beweis

- $L \in \text{R} \implies L \in \text{RE} \wedge L \in \text{coRE}$:
  - $L \in \text{R} \implies L \in \text{RE}$ klar, da $\text{R} \subset \text{RE}$
  - Außerdem wie zuvor: $L \in \text{R} \implies L^C \in \text{R} \subset \text{RE}$.
- $L \in \text{RE} \wedge L \in \text{coRE} \implies L \in \text{R}$
  - sei M TM für L und M_C TM für L^C. Neue TM $\hat{M}$:
    * M und M_C parallel auf w laufen lassen
    * falls M akzeptiert, soll $\hat{M}$ akzeptieren
    * falls M_C akzeptiert, soll $\hat{M}$ verwerfen
  - dann: $w \in L \implies M$ akzeptiert $\implies \hat{M}$ akzeptiert
  - sowie: $w \notin L \implies w \in L^C \implies M_C$ akzeptiert $\implies \hat{M}$ verwirft

Q.E.D.

Satz

$L \in \text{RE} \not\Longrightarrow L^C \in \text{RE}$

Motivation

Also gibt es nun weitere Sprachen $\notin$ RE?

Satz

$\overline{A_{\mathrm{TM}}} \notin \mathrm{RE}$.

Beweis

Bereits bewiesen: $L \in \mathrm{RE} \wedge L \in \mathrm{coRE} \implies L \in \mathrm{R}$.
Wissen außerdem, dass $A_{\mathrm{TM}} \in \mathrm{RE}$ und $A_{\mathrm{TM}} \notin \mathrm{R}$. Also muss $A_{\mathrm{TM}} \notin \mathrm{coRE}$ sein.

Q.E.D.

TODO: Bildchen wichtig für Klausur. TODO: Bar.

3.8 Abbildungs-Reduktionen in der Berechenbarkeitstheorie

Motivation

Wir wollen P_1 lösen, indem wir es auf ein anderes Problem P_2 reduzieren

- Falls P_2 "leicht" ist, dann ist auch P_1 "leicht"
- Falls P_1 "schwer" ist, dann ist auch P_2 "schwer"

Definition

Sprache $L_1 \subset \Sigma_1^*$ ist auf Sprache $L_2 \subset \Sigma_2^*$ *Abbildungs-reduzierbar*, falls gilt:
Es gibt eine Turing-berechenbare Funktion $f : \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$, sodass für alle $w \in \Sigma_1^*$ gilt:

$$w \in L_1 \iff f(w) \in L_2.$$

Die Funktion f heißt *Reduktion von* L_1 *auf* L_2.
Schreibweise: $L_1 \preccurlyeq_m L_2$, wobei das m oft für "mapping reduction" steht.

Beispiel

TODO: Graphen

- Problem k-Clique: Gegeben ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und $k \in \mathbb{N}$. Eine Teilmenge $V' \subset V$ heißt *Clique*, falls V' im Graph vollständig verbunden ist. Gibt es eine Clique der Größe k in G?
- Problem k-Vertex-Cover: Gegeben ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und $k \in \mathbb{N}$. Eine Teilmenge $V' \subset V$ heißt *Vertex Cover*, falls jede Kante des Graphen mindestens einen Endpunkt in V' hat. Gibt es im Graphen ein Vertex Cover mit k Knoten?

Reduktion von Clique auf Vertex Cover. Gegeben: Graph G, $k \in \mathbb{N}$. Auf G wollen wir k-Clique lösen, indem wir Graphen $\hat{G}$ bauen und $\hat{k} \in \mathbb{N}$ so wählen, dass gilt:

$$G \text{ hat } k\text{-Clique} \iff \hat{G} \text{ hat } \hat{k}\text{-Vertex-Cover}.$$

Dazu wählen wir $\hat{G}$ als das "Komplement" von G:

- $\hat{G}$ hat die gleichen Knoten wie G
- $\hat{G}$ hat Kante uv genau dann, wenn G diese Kante **nicht** hat.

Außerdem setzen wir $\hat{k} := |V| - k$.

Satz

Diese Reduktion ist berechenbar.

Beweis

Die Reduktion f transformiert den Graphen G in den Graphen $\hat{G}$. Man kann dann eine TM konstruieren, die bei Eingabe von G und k die Ausgabe $\hat{G}$ und $\hat{k}$ produziert. Q.E.D.

Satz

G hat eine Clique der Größe k genau dann, wenn $\hat{G}$ einen Vertex Cover der Größe $\underbrace{n-k}_{:=\hat{k}}$ besitzt (wobei $n = |V|$ ist).

Beweis

TODO?

Satz

Falls $L_1 \preccurlyeq L_2$, dann gilt:

1. Falls L_2 (semi-)entscheidbar ist, dann ist auch L_1 (semi-)entscheidbar.
2. Falls L_1 nicht (semi-)entscheidbar ist, dann ist auch L_2 nicht (semi-)entscheidbar.

Beweis

TODO: Bildchen hihi

1. Beweis
   - Sei L_2 (semi-)entscheidbar, d.h. es gibt eine TM M_2, die die Sprache (semi-)entscheidet.
   - Nun baut man TM M_1, die L_1 (semi-)entscheidet: Bei der Eingabe von w wendet M_1 zunächst die TM F an, die die Reduktion von L_1 auf L_2 realisiert. Auf die Ausgabe von F wird dann M_2 angewandt.
2. Beweis durch Widerspruch
   - Annahme: L_2 ist (semi-)entscheidbar
   - Mit Instanz von L_1 starten und TM M_1 wie zuvor
   - Dann (semi-)entscheidet M_1, aber auch L_1 :O

Q.E.D.

Andere Aussagen lassen sich nicht definitiv treffen.

3.9 Das Halteproblem und viele weitere Probleme in $\mathrm{RE} \setminus \mathrm{R}$

Motivation

Wir wollen eine Kette von Reduktionen zeigen:

$$\overline{D_{\mathrm{TM}}} \preccurlyeq A_{\mathrm{TM}} \preccurlyeq H \preccurlyeq H_0 \preccurlyeq K.$$

3.9.1 Reduktion $\overline{D_{\mathrm{TM}}} \preccurlyeq A_{\mathrm{TM}}$

Satz

- $\overline{D_{\mathrm{TM}}} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ akzeptiert } \langle M \rangle\}$
- $A_{\mathrm{TM}} = \{\langle M, w \rangle \mid M \text{ akzeptiert } w\}$

$$\overline{D_{\mathrm{TM}}} \preccurlyeq A_{\mathrm{TM}}$$

Beweis

Definiere $f(w) := ww$. Ist berechenbar und offensichtlich gilt:

$$w \in \overline{D_{\mathrm{TM}}} \iff M \text{ akzeptiert } \langle M \rangle \iff f(w) = ww \in A_{\mathrm{TM}}.$$

Q.E.D.

3.9.2 Reduktion $A_{\text{TM}} \preccurlyeq H$ (allgemeines Halteproblem)

Satz

- $A_{\text{TM}} = \{\langle M, w\rangle \mid M \text{ akzeptiert } w\}$
- $H = \{\langle M, w\rangle \mid M \text{ hält bei Eingabe } w \text{ an}\}$

$$A_{\text{TM}} \preccurlyeq H$$

Beweis

Mit Eingabe $\langle M, w\rangle$ baut man eine TM $\hat{M}$:

- $\hat{M}$ macht die gleichen Berechnungen wie M
- Falls M in einem nicht-akzeptierenden Zustand stoppt, dann begibt sich $\hat{M}$ in eine Endlosschleife
- Sei $\langle\hat{M}\rangle$ der Code diesr TM – dieser Code lässt sich nicht berechnen

Die Reduktionsabbildung ist:

$$f(\langle M, w\rangle) = \langle\hat{M}, w\rangle.$$

Dann gilt:

$$\langle M, w\rangle \in A_{\text{TM}} \iff M \text{ akzeptiert } w$$

$$\iff \hat{M} \text{ stoppt bei Eingabe } w \iff \langle\hat{M}, w\rangle \in H$$

Q.E.D.

3.9.3 Reduktion $H \preccurlyeq H_0$ (spezielles Halteproblem)

Satz

- $H = \{\langle M, w\rangle \mid M \text{ hält bei Eingabe } w \text{ an}\}$
- $H_0 = \{\langle M\rangle \mid M \text{ hält bei Eingabe } \varepsilon \text{ an}\}$

$$H \preccurlyeq H_0$$

Beweis

TODO

3.9.4 Reduktion $H_0 \preccurlyeq K$

Satz

- $H_0 = \{\langle M\rangle \mid M \text{ hält bei Eingabe } \varepsilon \text{ an}\}$
- $K = \{\langle M\rangle \mid M \text{ hält bei Eingabe von } \langle M\rangle \text{ an}\}$

$$H_0 \preccurlyeq K$$

Beweis

TODO

3.9.5 Schlussfolgerung

Satz

Die Sprachen $\overline{D_{\mathrm{TM}}}, A_{\mathrm{TM}}, H, H_0, K$ sind alle in $\mathrm{RE} \setminus R$.

Motivation

- Das Halteproblem ist relevant, um die Beendung von Programmen zu zeigen – geht nicht! :(
- Berechnen zwei TM das Gleich? – geht nicht! :(

Definition

Problem 1 $\preccurlyeq_T$ Problem 2, falls es eine TM zur Lösung von Problem 1 gibt, die eine Turingmaschine für Problem 2 beliebig oft als "Unterprogramm" aufrufen darf.

4 Der Satz von Rice

Motivation

Viele Eigenschaften von Turingmaschinen/Programmen sind nicht entscheidbar. Sind diese Eigenschaften die Ausnahme?
Rice sagt: Nein! So gut wie alle *interessanten* Eigenschaften von TMs sind unentscheidbar. *Interessante* Eigenschaften sind jene, die sich nur an der von ihr erkannten Sprache festmachen lassen. Dabei interessiert uns nur die Ausgabe der TM, nicht die Art der Berechnung selbst.

Definition

Sei L eine Sprache, deren Wörter nur aus Codes von TMs bestehen:

$$L \subset \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ ist Code einer TM}\}$$

Die Sprache L heißt *nicht-trivial*, falls gilt:
- $L \neq \emptyset$ (es gibt TMs, deren Code in L enthalten ist)
- $L \neq \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ ist Code einer TM}\}$ (es gibt TMs, deren Code nicht in L enthalten ist)

Definition

Sei L eine Sprache, deren Wörter nur aus Codes von TMs bestehen:

$$L \subset \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ ist Code einer TM}\}.$$

Die Sprache L heißt *semantisch*, falls gilt:
Wenn M_1 und M_2 äquivalente TMs sind, dann sind entweder beide in L enthalten oder beide nicht in L enhalten:

$$\langle M_1 \rangle \in L \iff \langle M_2 \rangle \in L$$

Satz

Jedes semantische, nichttriviale Entscheidungsproblem ist unentscheidbar. Wow!

Beweis

Siehe Vorlesung.

Bemerkung

Die Umkehrung des Satzes ist im Allgemeinen falsch, es gilt nur:

$$\text{semantisch} \implies \text{unentscheidbar}.$$

Motivation

Allgemeine "Verifikation" von Programmen ist unmöglich! Außerdem sind ohne Einschränkungen der TMs wichtige Eigenschaften nicht beweisbar!
Wir müssen die "Sorte von Programmen" einschränken, um sie verifizieren zu können.

5 Modelle der Berechenbarkeit

5.1 Turing-Vollständigkeit und -Äquivalenz

Definition

Sei $\mathcal{F}$ die Menge aller partiellen Funktionen von $\{0,1\}^*$ nach $\{0,1\}^*$. Ein *Berechnungsmodell* ist eine Abbildung

$$\mathcal{M} : \{0,1\}^* \to \mathcal{F}.$$

Ein *Programm* $P \in \{0,1\}^*$ $\mathcal{M}$*-berechnet* eine Funktion $F \in \mathcal{F}$ falls $\mathcal{M}(P) = F$.

Definition

Ein Berechnungsmodell $\mathcal{M}$ heißt *Turing-vollständig*, wenn es eine Turing-berechenbare Abbildung

$$\text{encode}_{\mathcal{M}} : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$$

gibt, sodass

$$\mathcal{M}(\text{encode}(\langle M \rangle))$$

identisch zu der von der TM M berechneten Funktion ist.

Definition

Ein Berechnungsmodell $\mathcal{M}$ heißt *Turing-äquivalent*, falls

- es Turing-vollständig ist
- es zusätzlich eine $\mathcal{M}$-berechenbare Abbildung

$$\text{decode}_{\mathcal{M}} : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$$

  gibt, sodass für jedes $P \in \{0,1\}^*$

$$N = \text{decode}_{\mathcal{M}}(P)$$

  die Gödelnummer einer TM ist und diese TM die gleiche Funktion wie $\mathcal{M}(P)$ berechnet.

5.2 `while`- und `for`-Programme

Definition

Das Alphabet von `while`:

- Variablen: $x_0, x_1, x_2, ...$ (abzählbar viele)
- Konstanten: $0, 1, 2, ...$ (abzählbar viele)
- Keywords: `while`, `do`, `end` (genau drei)
- Symbole :=, $\neq$, ;, $+$, $-$, [,] (genau sieben)

Definition

Der Syntax von `while`:

1. Ein "einfacher Befehl" ist eine der drei folgenden Anweisungen
   - $x_i := x_j + x_k$ (arithmetische Operation)
   - $x_i := x_j - x_k$ (arithmetische Operation)
   - $x_i := c$ (Wertzuweisung)
2. Ein `while`-Programm P ist entweder ein einfacher Befehl oder hat die Form
   - `while` $(x_0 \neq 0)$ `do` P_1 `end` (Schleife)
   - $[P_1, P_2]$ (Hintereinanderausführung)

Definition

Die Semantik von `while`:

- *Eingabe*: Besteht aus natürlichen Zahlen $\alpha_0, ..., \alpha_{s-1} \in \mathbb{N}$ und wird in den Variablen $x_0, ..., x_{s-1}$ gespeichert.
- *Ausgabe*: Falls das Programm anhält, dann ist die Ausgabe der Inhalt der Variable x_0 bei Beendigung des Programms.
- *Variablenbelegung*: Jedes Programm darf beliebig viele, aber nur endlich viele Variablen benutzen. Mit einer Funktion $l(P)$ für die maximale Zahl an verwendeten Variablen, kann man die Belegung zu jedem Zeitpunkt in einen Vektor schreiben.

Sei S die Startbelegung der Variablen. Die partielle Funktion $\Phi_P(S)$ besagt, welche Ausgabe ein Programm P bei Eingabe S produziert.
Sei $S = (\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, ...)$ eine Variablenbelegung.
Semantik *einfacher Befehle*:

- Falls $x_i := x_j + x_k$, dann
$$\Phi_P(S) = (\sigma_0, \sigma_1, ..., \sigma_{i-1}, \sigma_j + \sigma_k, \sigma_{i+1}, ...).$$
- Falls $x_i := x_j - x_k$, dann
$$\Phi_P(S) = (\sigma_0, \sigma_1, ..., \sigma_{i-1}, \max \sigma_j - \sigma_k, 0, \sigma_{i+1}, ...).$$
- Falls $x_i := c$, dann
$$\Phi(S) = (\sigma_0, \sigma_1, ..., \sigma_{i-1}, c, \sigma_{i+1}, ...).$$

Semantik der *Hintereinander-Ausführung*:

- Falls $P =$ "$[P_1; P_2]$", dann sei
$$\Phi_P(S) = \begin{cases} \Phi_{P_2}(\Phi_{P_1}(S)) & \text{falls definiert} \\ \texttt{undefined} & \text{sonst} \end{cases}$$
Im Folgenden bezeichnen wir mit $\Phi_P^{(r)}(S)$ die r-fache Hintereinander-Ausführung von P, gestartet auf S.

Semantik der *Schleifen*:

- Falls $P =$ "`while` $(x_i \neq 0)$ `do` P_1 `end`", dann sei $r \in \mathbb{N}$ die kleinste Zahl, sodass entweder
  - $\Phi_{P_1}^{(r)}(S)$ nicht terminiert
  - die i-te Variable in $\Phi_{P_1}^{(r)}(S)$ gleich 0 ist *(Schleifenabbruch-Bedingung erreicht)*.

  Dann setzen wir
$$\Phi_P(S) = \begin{cases} \Phi_{P_1}^{(r)}(S) & \text{falls das Programm geendet hat} \\ \texttt{undefined} & \text{sonst} \end{cases}$$

Satz

Für jedes `while`-Programm P ist Q_P wohldefiniert.

Beweis

Durch strukturelle Induktion.

Bemerkung

Durch *Syntaktischen Zucker* könnte man auch Stacks, Arrays, `if`-Abfragen oder `for`-Schleifen darstellen.

Definition

- Ein `for`-Programm hat den (endlichen) `for` Befehl statt `while`
- Ein `goto`-Programm hat den `goto` Befehl statt `while`

Satz

`for`-Programme (wie definiert) terminieren immer.

Beweis

Durch strukturelle Induktion.

Satz

`for`-Programme können durch `while`-Programme simuliert werden.

Satz

`while`-Programme können durch `goto`-Programme simuliert werden.

Satz

`goto`-Programme können durch `while`-Programme (mit höchstens einer Schleife) simuliert werden ($\texttt{goto} \preccurlyeq \texttt{while}$).

5.2.1 `while`- vs. Turing-Berechenbarkeit

Satz

`while`-Programme sind Turing-äquivalent.

Beweis

- $\texttt{while} \preccurlyeq \text{Turing}$
- $\text{Turing} \preccurlyeq \texttt{while}$

Siehe Vorlesung, aber eigentlich trivial. Q.E.D.

5.3 Primitiv rekursive Funktionen und μ-rekursive Funktionen

Motivation

Mathematisch motiviertes Berechnungsmodell, noch vor Turingmaschine entwickelt.

Definition

Die Menge der *primitiv rekursiven* Funktionen wird induktiv defininiert:
Induktionsanfang:

- Die *Konstant*, 0-stellige Funktion 0 ist primitiv rekursiv.
- Die *Nachfolgerfunktion* $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, s(k) = k + 1$ ist primitiv rekursiv.
- Die *Projektionsfunktionen* der Form

$$f_i : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}, (x_1, x_2, ..., x_k) \to x_i$$

(für $i = 1, ..., k$) sind primitiv rekursiv.

Induktionsschritt:

- Die *Komposition* von primitiv rekursiven Funktionen ist primitiv rekursiv: Seien $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $g_1, ..., g_k : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ primitiv rekursiv, dann auch

$$h(x_1, ..., x_m) := f(g_1(x_i, ..., x_m), ..., g_k(x_1, ..., x_m)).$$

- *Primitive Rekursion*: Seien $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $h : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ primitiv rekursiv. Dann ist auch die Funktion $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ primitiv rekursiv:

$$\begin{aligned} f(0, x_1., , , .x_k) &= g(x_1, ..., x_k) \\ f(s(n), x_1, ..., x_k) &= h(f(n, x_1, ..., x_k), x_1, ..., x_k) \end{aligned}$$

Beispiel

Addition $\texttt{add} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ ist primitiv rekursiv.

$$\begin{aligned} \texttt{add}(0, x) &= x \\ \texttt{add}(s(n), x) &= s(\texttt{add}(n, x)) \end{aligned}$$

Motivation

Die Rekursion ist so etwas wie eine `for`-Schleife: Initialisierung:

$$f(0, x_1, ..., x_k) = g(x_1, ..., x_k)$$

Ein Schritt der `for`-Schleife:

$$f(n + 1, x_1, ..., x_k) = h(f(n, x_1, ..., x_k), x_1, ..., x_k)$$

Satz

Die Menge der primitiv rekursiven Funktionen stimmt genau mit der Menge der `for`-berechenbaren Funktionen überein.

Beweis

Siehe Vorlesung. Q.E.D.

Motivation

`for`-Berechenbarkeit ist nicht Turing-äquivalent.
Gibt es einen anderen Begriff von rekursiven Funktionen, der Turing-äquivalent ist?

Definition

Die Menge M der *μ-rekursiven Funktionen*:

- Alle primitiv rekursiven Funktionen sind in M enthalten
- Alle Funktionen sind enthalten, die durch Anwendung des *μ-Operators* aus primitiv rekursiven Funktionen gebaut werden können:
  Sei $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ eine (möglicherweise partielle) Funktion. Dann ist $\mu f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ definiert als

  $$(\mu f)(x_1, ..., x_k) = \min \{m \in \mathbb{N}_0 \mid f(m, x_1, ..., x_k) = 0 \land \forall u < m \exists f(u, x_1, ..., x_k)\}$$

  Falls die Menge leer ist, ist $(\mu f)(x_1, ..., x_k)$ undefiniert.

Bemerkung

Der Hauptunterschied zur primitiven Rekursion:

- Man bildet ein Minimum über die Menge $\{u \mid f(u, ...) = 0\}$, deren Anzahl zuvor gar nicht bekannt ist.
- Analog zum Unterschied `for` (*feste Anzahl*) und `while` (*beliebig hohe Anzahl*, partiell erlaubt)

Satz

Die Menge der μ-rekursiven Funktionen stimmt genau mit der Menge der `while`-berechenbaren Funktionen überein.

Beweis

Siehe Vorlesung. Q.E.D.

Motivation

- primitiv rekursiv $\equiv$ `for`
- μ-rekursiv $\equiv$ `while`
- `for` $\preccurlyeq$ `while`, aber nicht umgekehrt

Es muss Funktionen geben, die μ-rekursiv, aber nicht primitiv rekursiv sind.

5.4 Ackermann-Funktion

Definition

Ackermann-Funktion: $a : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}$, Basisfälle:

- $a(0, y) = y + 1$, für $y > 0$
- $a(x, 0) = a(x - 1, 1)$ für $x > 0$

Rekursion:

- $a(x, y) = a(x - 1, a(x, y - 1))$ für $x, y > 0$

5.5 Church-Turing-These

Motivation

Aha interessant, Modelle von Turing, Church und Gödel scheinen berechenbarkeitsäquivalent zu sein – weird!
Vielleicht ist ja einfach alles äquivalent haha.

Hypothese

- Alles, was "intuitiv" berechnet werden kann, kann auch von einer Turingmaschine berechnet werden.
- Jede "effektiv berechenbare" Funktion kann von einer TM berechnet werden.
- Jeder "Algorithmus" kann mithilfe einer Turingmaschine implementiert werden.
- Jedes endliche physikalische System kann bis zu jeder vorgegebenen Genauigkeit genau auf einer Turingmaschine simuliert werden.

Bemerkung

Kann nicht bewiesen/widerlegt werden, weil es nicht wirklich eine mathematische Aussage ist. Es ist eine Vermutung über die Beschaffenheit der Welt.

Motivation

- Quantencomputer sind Turing-äquivalent
- "Hypercomputing" – formal mächtiger als TMs aber physikalisch ggf. nicht möglich
- "Neuronale Netze" sind oft Turing-äquivalent

5.6 Der Unvollständigkeitssatz von Gödel

Satz

Jedes Beweissystem für die Menge der wahren arithmetischen Formeln ist notwendigerweise unvollständig: Es gibt immer whare arithmetische Formeln, die nicht beweisbar sind.

Definition

Ein *Term* wird induktiv wie folgt definiert:

- Jedes $n \in \mathbb{N}$ ist ein Term
- Jede *Variable* x_i $(i \in \mathbb{N})$ ist ein Term
- Wenn t_1, t_2 Terme sind, dann auch $(t_1 + t_2)$ und $(t_1 \cdot t_2)$

Eine *Formel* wird induktiv wie folgt definiert:

- Wenn t_1, t_2 Terme sind, dann ist $(t_1 = t_2)$ eine Formel
- F, G Formeln, dann sind auch $\neg F$, $(F \wedge G)$ und $(F \vee G)$ Formeln
- Wenn x eine Variable und F eine Formel ist, dann sind auch $\exists x F$ und $\forall x F$ Formeln

Beispiel

$$\forall x \exists y \forall z(((x \cdot y) = z) \wedge ((1 + x) = x \cdot y))$$

Definition

Eine Funktion $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ ist *arithmetisch repräsentierbar*, falls es eine arithmetische Formel $F(x_1, ..., x_k, y)$ gibt, sodass gilt:

$$f(n_1, n_2, ..., n_k) = m \iff F(n_1, ..., n_k, m)$$

ist wahr.

6 TODO (mehrere)

7