第一章 复数与复变函数

四则运算可与共轭运算换序

$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

$z \cdot \overline{z} = |z|^2$, $\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$, $\mathrm{Im}\, z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$.

复数的模与辐角

$\mathrm{Arg}\, z = \arg z + 2k\pi$, z的辐角范围 $-\pi < \arg z \le \pi$.

$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$.

平面点集的一般概念

邻域 $|z-z_0|<\delta$

外点 内点 边界点

有界集 无界集

△开集：G内的点均为它的内点 => G为开集

△闭集：开集的余集，即不属于开集的点构成

△区域：(1) D为开集 (2) D是连通的

△闭域/闭区域：区域D与它的边界构成，$\bar{D}$

闭区域并非区域

区域是开集，闭域是闭集

全平面（不引入无穷远点时）既开又闭

平面曲线

直线 $z(t)=x(t)+iy(t)$

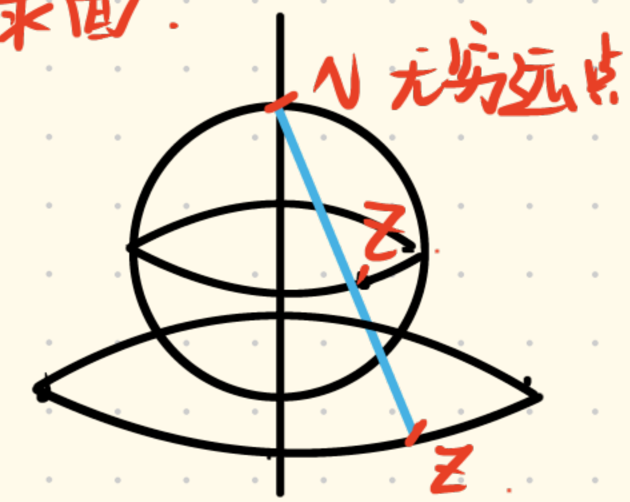
简单闭曲线 约定逆时针为正方向

无穷大与复球面

无穷大的模规定为 $+\infty$，

实部、虚部、辐角均无意义

复球面



复变函数

$w=f(z)=u+iv=u(x,y)+iv(x,y).$

$u=u(x,y),\quad v=v(x,y).$

$w=f(z)$ 可对应一对二元实变函数.

极限与连续性.

1. 极限.

$$\lim_{z\to z_0}[f(z)\pm g(z)]=A\pm B$$

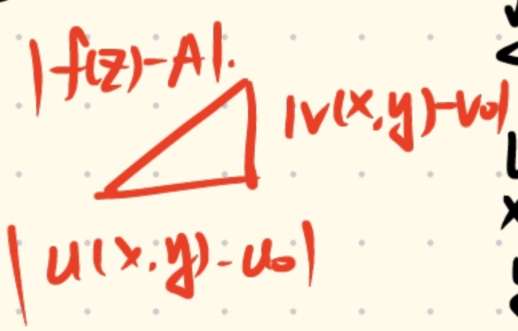
$$\lim_{z\to z_0}f(z)g(z)=A\cdot B$$

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{A}{B}.$$

定理 1.1 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$

$A=u_0+iv_0,\quad z_0=x_0+iy_0.$

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=A \Leftrightarrow \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}u(x,y)=u_0,\quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}v(x,y)=v_0$$



2. 连续

定义: $\lim_{z\to z_0}f(z)=f(z_0).$

定理 1.2 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，在 $z_0=x_0+iy_0$ 处连续 $\Leftrightarrow$ $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

第二章 解析函数

复变函数的导数

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

解析函数：$f(z)$在z_0与z_0的邻域内处处可导，必然可微，偏导连续.

含有$\bar{z}$ ⇒ 均不解析

① $f(z)$与$\overline{f(z)}$均解析 ⇒ $f(z)=C$

② $f(z)$解析，$|f(z)|=C$ ⇒ $f(z)=C$

实/虚部$=C$.

计算公式.

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}$$

可用C-R方程扩展.

定理 2.1 (C-R方程).

若$f(z)$在z处可导，u,v满足

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

推论：若满足C-R方程，则$f(z)$在D内解析.

调和函数：二元实函数φ

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$$

定理 2.3 $f(z)$在D内解析，则u,v均调和.

共轭调和函数：u,v均在D内调和.

且满足C-R方程 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$.

称v是u的共轭调和函数

反过来，$-u$是v的共轭调和函数.

初等函数

$w = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$

$|e^z| = e^x$, $\mathrm{Arg}\, e^z = y + 2k\pi$, $T = 2k\pi i$

$w = \mathrm{Ln} z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)$

四则运算规则在集合意义下成立

$w = z^n = e^{n\mathrm{Ln} z} = e^{n[\ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)]}$

$= |z|^n e^{in\arg z}$.

$$\left.\begin{aligned} \cos z &= \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \\ \sin z &= \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \end{aligned}\right\} \text{无界}$$

eg: 下列关系式中，不正确的一项是

A、$\overline{e^{z}} = e^{\bar{z}}$　　B. $\overline{\sin z} = \sin \bar{z}$　　C、$\overline{\ln z} = \ln \bar{z}$　　D、$\overline{\cos z} = \cos \bar{z}$

$z = x+iy$.

A. $\overline{e^{z}} = \overline{e^{x+iy}} = \overline{e^{x}\cdot e^{iy}}$

$= \overline{e^{x}\cdot(\cos y + i\sin y)}$

$= e^{x}(\cos y - i\sin y)$

$= e^{x-iy} = e^{\bar z}$.

B. $\overline{\sin z} = \overline{\sin(x+iy)}$

$= \overline{\sin x \underbrace{\cos iy}_{实} + \cos x \underbrace{\sin iy}_{虚}}$

$= \sin x\cos iy - \cos x\sin iy$

$= \sin(x-iy) = \sin\bar z$.

C. $\overline{\ln z} = \overline{\ln|z| + i\arg z}$

$= \ln|z| + \overline{i\arg} z$.

$\ln\bar z = \ln|\bar z| + i\arg|\bar z|$

考虑. $z = ki\ (k<0)$

$\overline{\arg z} \neq \arg\bar z$.

D. $\overline{\cos z} = \overline{\cos(x+iy)}$

$= \overline{\cos x\cos iy - \sin x\sin iy}$

$= \cos x\cos iy + \sin x\sin iy$

$= \cos(x-iy) = \cos\bar z$.

解析区域内均有 $\overline{f(z)} = f(\bar z)$.

第三章 复变函数的积分

1、直接化为定积分

$z(t)=x(t)+iy(t)$.

$$\int_c f(z)\,dz=\int_a^b f(z(t))\cdot z'(t)\,dt.$$

2、第二类曲线积分

$$\int_c f(z)\,dz=\int_c (u+iv)(dx+idy)$$

性质：$\left|\int_c f(z)\,dz\right| \le \int_c |f(z)|\,ds$.

重要积分：
$$\oint_{|z|=r}\frac{dz}{(z-z_0)^n}=\begin{cases}0 & (\text{其他})\\ 2\pi i & (n=1)\end{cases}$$

定理 3.2 单连通D内解析. $f(z)$在D内任意一条曲线 C 的积分 $\int_c f(z)\,dz=0$

$f'(z)$连续下 Green公式.

积分与路径无关

复合闭路定理. $\oint_c f(z)\,dz=\sum_{k=1}^{n}\oint_{C_k} f(z)\,dz$

柯西积分公式. $f(z)$在C所围的D内解析, $\bar{D}$连续, $z_0\in D$

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz.$$

解析函数区域内的值完全由边界确定.

连续性的证明：已知 $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz-f(z_0)\right|.$$
($f(z_0)$为常数, $\oint_c \frac{1}{z-z_0}\,dz=2\pi i$)

$$\le \frac{1}{2\pi}\oint_c \frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}\,|dz|.$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\varepsilon}{r}\cdot 2\pi r=\varepsilon.$$

邻域.

推论1（平均值公式） 代入 $z=z_0+Re^{i\theta}$ 柯西.

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+Re^{i\theta})d\theta$$ 圆周上函数平均值.

推论2（将 z_0 看作变量）

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(t)}{t-z}dt$$

定理3.8（最大模原理）.

$f(z)$ 在D内解析，$f(z)$ 不为常数，则 $|f(z)|$ 在D内无max.

$f(z)$ 为D内解析函数，非常数且无零点，取 $g(z)=\frac{1}{f(z)}$.

D内无法取到 $|f(z)|_{min}$

定理3.9 解析函数的高阶导数公式.

在简单闭曲线围成区域D内解析

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz.$$

使用条件：区域D内解析.

定理3.10 柯西不等式：

$f(z)$ 在 $|z-z_0|<R$ 内解析，

高阶导数公式两边取模，有.

$$|f^{(n)}(z)|\leq\frac{n!}{2\pi}\oint_C\frac{|f(z)|}{|z-z_0|^{n+1}}ds.$$

$$=\frac{n!}{2\pi}\cdot\frac{M}{R^{n+1}}\cdot 2\pi\cdot R.$$

$$|f^{(n)}(z)|\leq\frac{n!\cdot M}{R^n}.$$

学习思路

定理3.11 刘维尔定理.

柯西不等式中取 $n=1$，即有

$$|f'(z)|\leq\frac{M}{R}.$$

eg：若C为单位圆周，$f(z)=\oint_C \frac{\xi^2+1}{2(z-\xi)}d\xi$，则$f'(2)=$

A、0　　B、-2　　C、2　　D、4

eg：计算$\int_C(-2y+2xi)dz$，其中C为从0到$3+i$的线段．

eg：$f(z)$在全平面解析，且$\lim\limits_{z\to\infty}\frac{f(z)}{z}=0$．证明$\forall z_0$有$f(z_0)=f(0)$．

eg：$f(z)$在$|z|<R$内解析，且$|f(z)|\le M<+\infty$，$f(0)=0$，证明：$|z|<R$内有$|f(z)|\le\frac{M}{R}|z|$

eg：$f(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$，证明

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}z^{n-1}|f(z)|^2dz=a_0\overline{a_n}$$

1. $f(z)=\oint_C \frac{g(\xi)}{z-\xi}d\xi$，其中 $g(\xi)=\frac{\xi^2+1}{2}$

$f(z)=-2\pi i\cdot\frac{z^2+1}{2}=-\pi i(z^2+1)$，$f'(z)=-2\pi i z$

$f'(2)=-4\pi i$ ×　　$z=2$ 在 $|z|=1$ 外侧

内部均解析，$f(z)=0$，$f'(2)=0$
$(|z|=2)$.

2. $\int_C(-2y+2xi)\,dz$，　$0\to3+i$

1. $x: 0\to3$
2. $y: 0\to1$

① $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$，解析

原式 $=\int_C(-2y+2xi)(dx+i\,dy)$

$=\int_C -2y\,dx-2i\cdot y\,dy+2x\cdot i\,dx-2x\,dy$

$=\int_0^3 2xi\,dx-2i\int_0^1 y\,dy-2\cdot3\int_0^1 dy$

$=9i-2i\cdot\frac{1}{2}-6$

$=-6+8i$.

② $z=3t+t\cdot i$，$0\le t\le1$　$(x=3t,\ y=t)$

$\int_0^1(-2t+2\cdot3t\cdot i)(3+i)\,dt$

$=\int_0^1(-6t-2it+18it-6t)\,dt$

$=\int_0^1(-12+16i)t\,dt=-6+8i$

3. $\lim_{z\to\infty}\frac{f(z)}{z-z_0}\cdot\frac{z-z_0}{z}=0$，取 $|z|\le R$，$R\to+\infty$，$\frac{f(z)}{z-z_0}<\varepsilon\to0$

$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(z)}{z-z_0}dz\le\frac{1}{2\pi}\varepsilon\cdot2\pi R$　多项，无法约出消去R.

$f'(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz$

$=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(z)}{z-z_0}\cdot\frac{dz}{z-z_0}$

$\le\frac{1}{2\pi}\oint\left|\frac{f(z)}{z-z_0}\right|\frac{ds}{|z-z_0|}$

$=\frac{1}{2\pi}\varepsilon\cdot\frac{2\pi R}{R}=\varepsilon$

即有 $f'(z_0)=0\Rightarrow f(z)=f(0)$.

4.

①非常好看出很像刘维尔定理，但又有不同

$|f'(z)| \le \frac{M}{R}$ 给出一阶导. 积分？所求

$|f'(z)| \le \frac{M}{R}$.

$$\left|\oint f'(z)\,dz\right| \le \oint |f'(z)||dz| \le \frac{M}{R}\oint |dz|$$

即 $|f(z)| \le \frac{M}{R}|z|$.

②最大模原理

构造 $g(z)=\frac{f(z)}{z}$， $|g(z)|=\frac{|f(z)|}{|z|}$

考虑在 $|z|=R$上， $|g(z)| \le \frac{M}{R}$.

$\Rightarrow \frac{|f(z)|}{|z|} \le \frac{M}{R}$， $|f(z)| \le \frac{M}{R}|z|$.

5. $|f(z)|^2 = f(z)\cdot\overline{f(z)}$ （$|z|^2=z\cdot\bar{z}=1$）.

$= (a_0+a_1z+\cdots)\overline{(a_0+a_1z+\cdots)}$

$= (a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n)(\overline{a_0}+\overline{a_1}\frac{1}{z}+\cdots+\overline{a_n}\frac{1}{z^n})$

由留数定理，取C_{-1}，即取 z 的$-n$次项

即 $C_{-1}=a_0\overline{a_n}$.

$\Rightarrow$ 原式 $= a_0\overline{a_n}$.

第四章 解析函数的级数表示

复数序列的极限

$\forall \varepsilon>0, \exists N$, s.t. $n>N$ 时，

总有 $|z_n-z_0|<\varepsilon$ 成立

充分必要条件

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$.

发散，条件收敛，绝对收敛.

定义与实变中相同.

交错级数收敛的判定：单调递减.

幂级数

幂级数在 z_1 收敛，则级数在圆域

$|z-z_0|<|z_1-z_0|$ 内绝对收敛.

阿贝尔定理.

对于幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$，有.

(1) 若在 $z=z_0$ 处收敛，则在 $|z|<|z_0|$ 收敛

(2) 若在 $z=z_1$ 处发散，则在 $|z|>|z_1|$ 发散.

收敛半径

(1) 比值法：若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lambda$，则 $R=\frac{1}{\lambda}$

(2) 根值法：若 $\lim\limits_{n\to\infty}|c_n|^{\frac{1}{n}}=\lambda$，则 $R=\frac{1}{\lambda}$.

收敛圆内的任意性质：收敛圆内为解析函数.

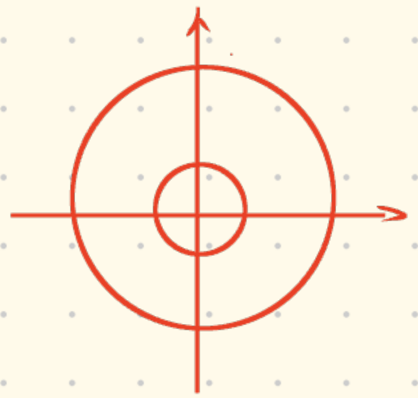
泰勒级数

$$f(z)=f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n+\cdots$$

函数在某一点解析的充分必要条件：

在该点的邻域内可写成幂级数

收敛区间：圆盘内部



(有理分式中若有幂级数，则可直接提)

洛朗级数

允许负幂级数存在，可扩充圆盘区域至圆环区域.

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$$

其中 $c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$.

不可使用高阶导数公式

(有不解析区域).

实际计算可采用 主

第五章 留数及其应用

孤立奇点定义：$f(z)$在z_0不解析，在z_0的一个去心邻域内解析

可去奇点、极点、本性奇点

留数定义： $C_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\,dz$ （重要积分公式）

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i\, C_{-1}$$

将C_{-1}称为$f(z)$在z_0处的留数，记为$Res[f(z)]$

留数定理：有限个孤立奇点外处处解析

正向简单闭曲线

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} Res[f(z),z_k]$$

函数在极点处的留数

① 简单极点 $Res[f(z),z_0]=\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$

② $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$ 0阶 1阶， $Res[f(z),z_0]=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$

③ z_0为$f(z)$的m阶极点.

$$Res[f(z),z_0]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]$$

无穷远点的留数 根本：转化到0研究

$$\lim_{z\to\infty} f(z) \xrightarrow{z=\frac{1}{\xi}} \lim_{\xi\to 0} f\left(\frac{1}{\xi}\right) = \lim_{\xi\to 0}\varphi(\xi)$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\,dz$$

$f(z)$在包括无穷远点的留数总和为0

$$Res[f(z),\infty] = -Res\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{1}{z^2},0\right]$$

留数在定积分中的应用

① $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\,d\theta$

令 $z=e^{i\theta}$， $dz=ie^{i\theta}d\theta = iz\,d\theta$

$$\oint_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\,d\theta = \oint_{|z|=1} f(z)\,dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} Res[f(z),z_k]$$

② $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx$， $R(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$， $Q(z)$比$P(z)$至少高2次

$Q(z)$在实轴上无零点， $R(z)$在上半平面内极点为z_k

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} Res[f(z),z_k]$$

③ $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{iax}\,dx$， $R(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$， $Q(z)$比$P(z)$至少高一次

$Q(z)$在实轴上无零点， $R(z)$在上半平面内极点为z_k

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{iax}\,dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} Res[f(z),z_k]$$

sinx 取Im

cosx 取Re

若实轴上有奇点z_i，则再加 $\pi i\sum Res[f(z),z_i]$

eg: $z=0$ 是 $\dfrac{1}{\cos\frac{1}{z}}$ 的 ____ 奇点

eg: 计算 $\oint_{|z|=2} \dfrac{z}{1-z^2}\cos\dfrac{1}{z}\,dz$.

eg: 计算 $\int_0^{\pi} \dfrac{\cos\theta}{5+4\cos\theta}\,d\theta$.

1、非孤立奇点、

2、取无穷远点留数 （±1均在 $|z|=2$ 内）

$$f\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{z^{-1}}{1-z^{-2}}\cos z=\frac{z}{z^2-1}\cos z.$$

$$\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{z(z+1)(z-1)}\cos z.$$

$$\operatorname{Res}[f(z),\infty]=-\operatorname{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2},0\right]$$

$$=-\frac{1}{1\cdot(-1)}\cdot 1=1$$

$$\oint_{|z|=2}f(z)\,dz=-2\pi i\cdot\operatorname{Res}[f(z),\infty]=-2\pi i.$$

3. 取 $z=e^{i\theta}$，$dz=ie^{i\theta}d\theta=iz\,d\theta$

$$\text{原式}=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos\theta}{5+4\cos\theta}d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\oint_{|z|=1}\frac{z+z^{-1}}{2}\frac{1}{5+2(z+z^{-1})}\frac{dz}{iz}.$$

$$=\frac{1}{2}\oint_{|z|=1}\frac{1+z^2}{4iz\left(z+\frac{1}{2}\right)(z+2)}dz$$ 留数 $0,-\frac{1}{2}$

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=\frac{1}{4i},$$

$$\operatorname{Res}\left[f(z),-\frac{1}{2}\right]=\left.\frac{1+z^2}{4iz(z+2)}\right|_{z=-\frac{1}{2}}=-\frac{5}{12i}.$$

$$\text{原式}=\frac{1}{2}\cdot 2\pi i\left[\frac{1}{4i}-\frac{5}{12i}\right]$$

$$=-\frac{\pi}{6}$$

第六章 共形映射

伸缩率与旋转角不变性：

在z_0处$f'(z_0)\neq 0$即可.

伸缩率 $\lim_{\Delta z\to 0}\frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}=|f'(z_0)|$

旋转角 $\varphi-\theta=\arg f'(z_0)$

第一类保角映射：$f(z)$在D内解析，$f'(z)\neq 0$

第二类保角映射 $f(z)$有伸缩率不变，旋转角相反

共形映射：$f(z)$在D内为第一类保角映射

且为单射（$z_1\neq z_2$时，有$f(z_1)\neq f(z_2)$）

保域性定理：$f(z)$在D内解析，$f(z)\not\equiv C$，$G=f(D)$为区域

边界对应原理：曲线上对应的点取向相同.

分式线性映射

分式线性映射将圆映射为圆（保圆性）

在扩充复平面内为共形映射

1. 已知原曲线与映射函数

① 三点定圆法

② 分解为已知几何变换方式

③ 取特殊线与特殊点.

保角性的应用

2. 已知原曲线与变换后的曲线

① 对应点公式

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}:\frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}=\frac{z-z_1}{z-z_2}:\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}$$

含有∞的那项取作1.

推论：若有$f(z_1)=w_1$与$f(z_2)=w_2$

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}=k\frac{z-z_1}{z-z_2}$$ （k为复常数）

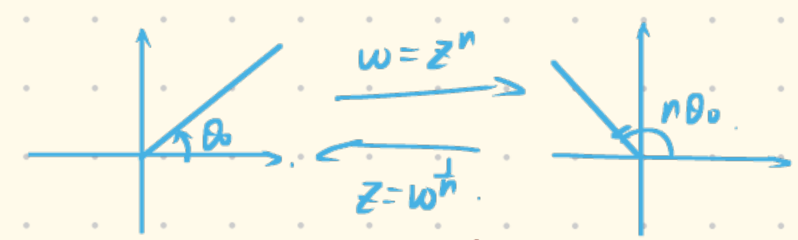
典型的区域间映射

上半圆 ⇒ 第一象限 $w=\frac{1+z}{1-z}$

上半平面 ⇒ 单位圆 $w=\frac{z-i}{z+i}$

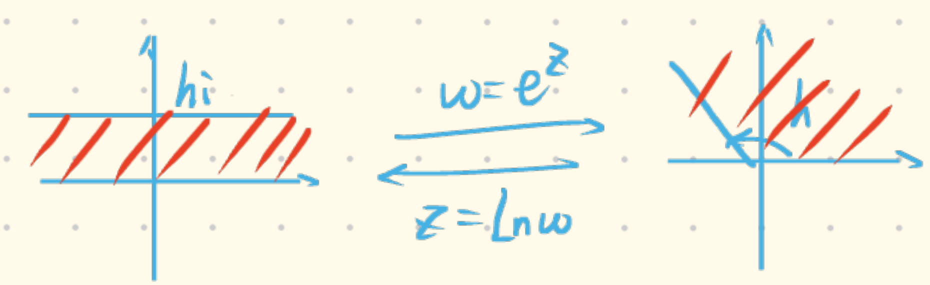
~~单位上半圆 ⟶ 单位圆 $w=z^2$~~

幂函数映射 （角形域⇔角形域）



指数函数映射 （带形域⇔角形域） 限定 $h<2\pi$

注意模范围



综合运用 （将某区域映为某一已知特殊区域）

图形有两交点 ⟶ 角形 $w=k\frac{z-z_1}{z-z_2}$

图形有一交点 ⟶ 带形 $w=k\cdot\frac{1}{z-z_0}$

eg：下列函数在$|z|=4$内为共形映射的为

A. $w=z^2$　　B. $w=\ln z$　　C. $w=e^z$　　D. $w=\frac{1}{z}$

eg：将$|z|<2$与$|z-1|>1$构成区域映为上半平面

P139

1. A. $w'=2z$

$w'(0)=0$ ✗

B. $w'=\frac{1}{z}$, $w=\ln z$

负实轴上不解析 ✗

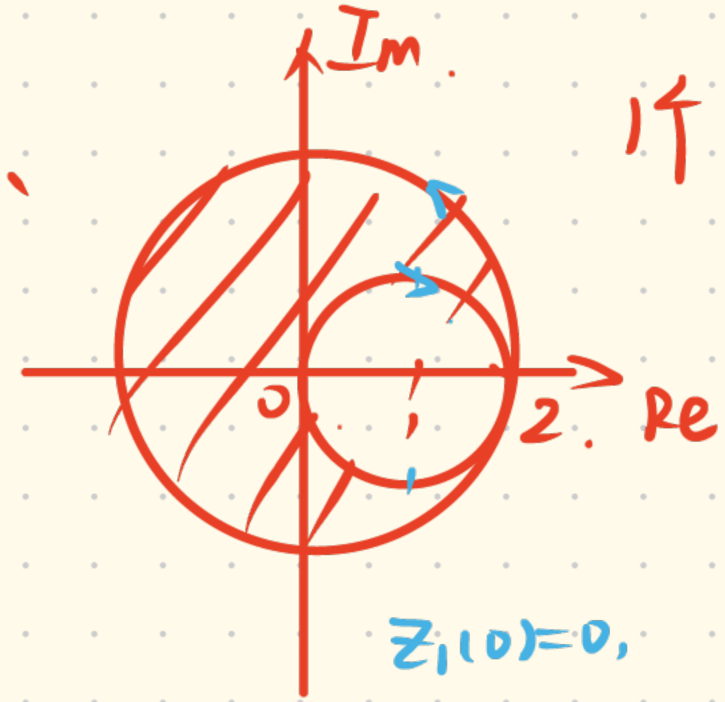
C. $w=e^{z}$, $w'=e^{z}$

多值函数，但在$|z|\le 4$内单值 ✓

D. $w=\frac{1}{z}$, $w'=-\frac{1}{z^2}$

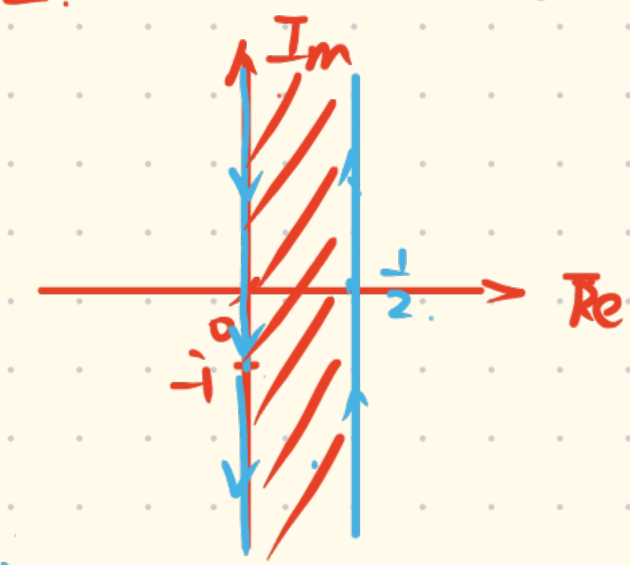
在 $z=0$处不解析 ✗

2.



1个交点：$z=2 \longrightarrow \infty$ 映成带形

$$\xrightarrow{z_1=\frac{z}{z-2}}$$



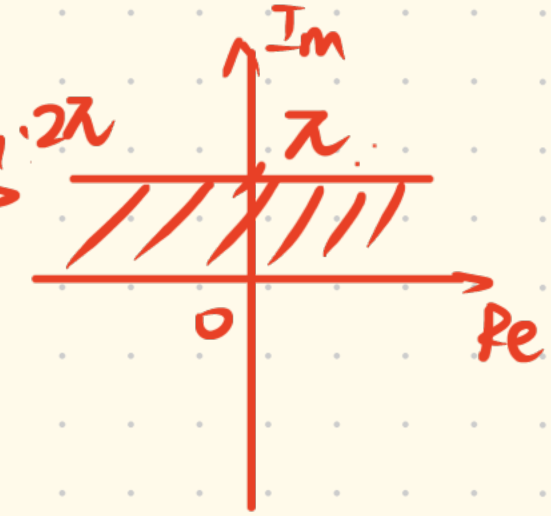
$z_1(0)=0$, $z_1(-2)=\frac{1}{2}$

$z_1(2)=\infty$, $z_1(-2i)=\frac{1+i}{2}$

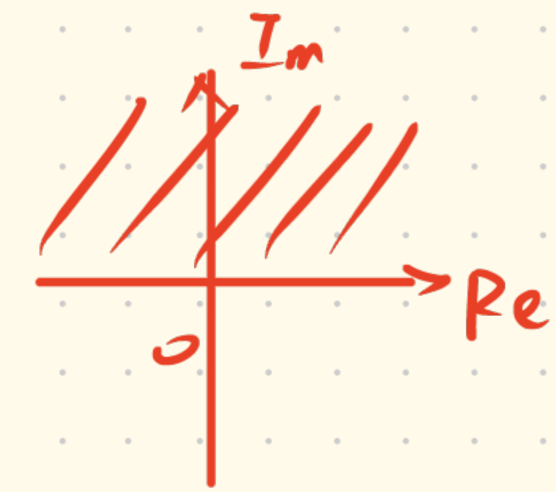
$z_1(1+i)=-i$. $z_1(2)=\infty$

$z_1(1-i)=i$. $z_1(2i)=\frac{1-i}{2}$

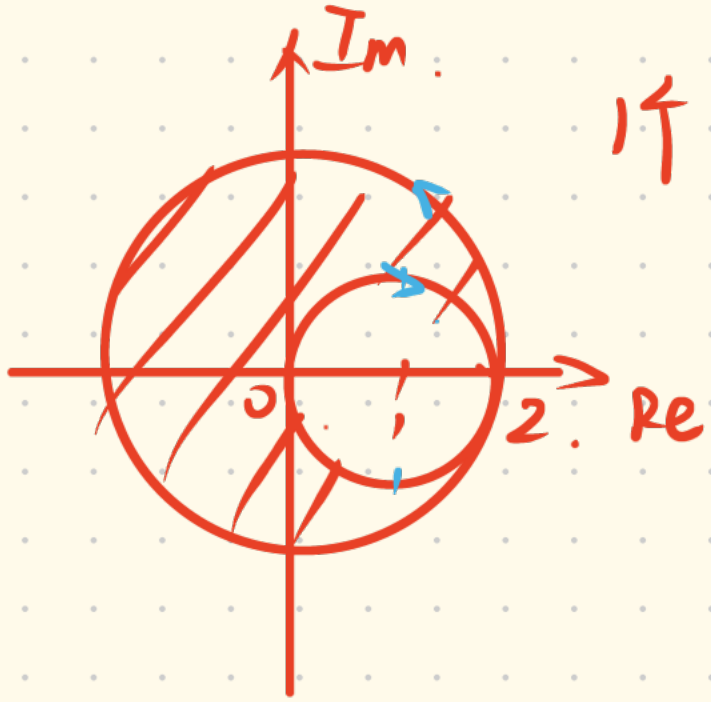
$$\xrightarrow{z_2=iz_1\cdot 2\pi}$$



$$\xrightarrow{z_3=e^{z_2}}$$

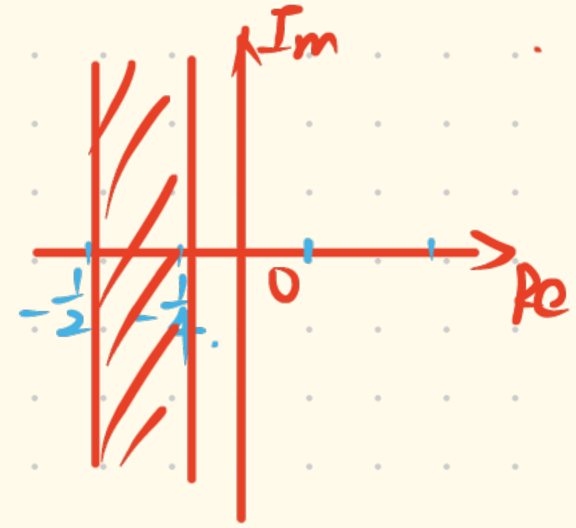


$$w=e^{2\pi i\cdot\frac{z}{z-2}}$$



作切点：$z=2 \longrightarrow \infty$ 变成带形

$$\xrightarrow{z_1=\frac{1}{z-2}}$$



$$w=e^{\left(\frac{1}{z-2}+\frac{1}{4}\right)(-i\pi)}.$$

$$\frac{4+z-2}{4(z-2)}=\frac{z+2}{4(z-2)}.$$

$z_1(0)=-\frac{1}{2}$,

$z_1(1+i)=-\frac{1+i}{2}$

$z_1(2)=\infty$

$z_1(1-i)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

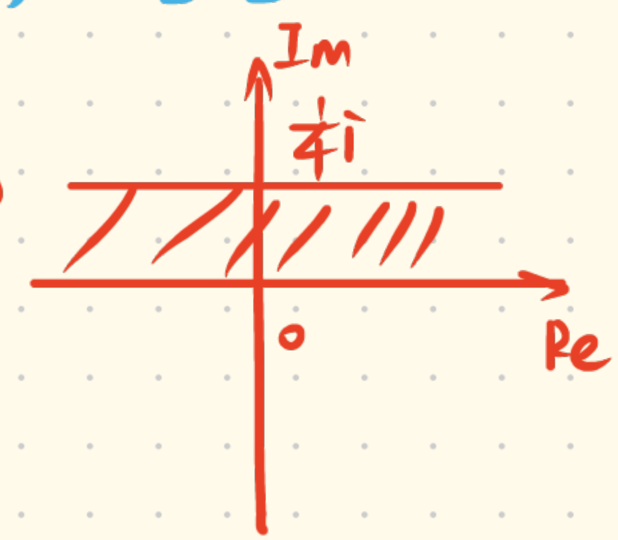
$z(-2)=-\frac{1}{4}$

$z(-2i)=-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i$

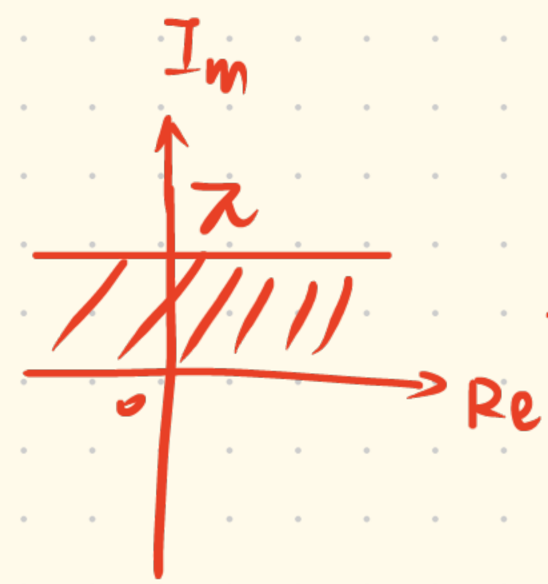
$z(2)=\infty$

$z(2i)=-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i$.

$$\xrightarrow{z_2=\left(z_1+\frac{1}{4}\right)\cdot(-i)}$$



$$\xrightarrow{z_3=4\pi z_2}$$



$$\xrightarrow{z_4=e^{z_3}}$$

第八章 傅里叶变换

定义 $F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$

称$F(\omega)$为$f(t)$的傅里叶变换，记为$F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$

逆变换：$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$

基本傅里叶变换对.

$\delta(t) \longleftrightarrow 1$.

$1 \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$.

$\sin\omega_0 t \longleftrightarrow \pi j[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$

$\cos\omega_0 t \longleftrightarrow \pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$

$X(j\omega)=2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\delta(\omega-k\omega_0)$

其中 a_k为 $x(t)$的傅里叶展开系数，$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$.

$e^{at} \longleftrightarrow \frac{1}{1-\alpha}$ （注意：$\alpha\in R$）

傅里叶变换性质.

1. 线性性质.

$ax(t)+by(t) \longleftrightarrow aX(j\omega)+bX(j\omega)$.

2. 时移性质

$x(t-t_0) \longleftrightarrow e^{-j\omega t_0}X(j\omega)$.

3. 位移性质

$X[j(\omega-\omega_0)] \longleftrightarrow e^{j\omega_0 t}x(t)$.

4. 卷积性质.

$y(t)=x(t)*h(t)$

$\Rightarrow Y(j\omega)=X(j\omega)\cdot H(j\omega)$.

eg: $f(t) = e^{jt} + \delta(t-1)$, 求 $F(\omega)$.

eg: $\delta(1-t) * \sin(t-1)$.

1、 $f(t) = e^{jt} + \delta(t-1)$.

$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$

$\delta(t) \leftrightarrow 1$.

$F(j\omega) = \underbrace{e^{-j\omega}}_{\text{时移性质}} + \underbrace{2\pi\delta(\omega-1)}_{\text{位移性质}}$.

2、$\delta(t)$为偶函数

$\delta(t-1) \leftrightarrow e^{-j\omega}$

$\sin(t-1) \leftrightarrow \pi j[\delta(\omega+1) - \delta(\omega-1)]e^{-j\omega}$

$e^{-2j\omega} \cdot \pi j[\delta(\omega+1) - \delta(\omega-1)] \longleftrightarrow \sin(t-2)$.

第九章　拉普拉斯变换

定义：$F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-st}\,dt$

称 $F(s)$ 为 $f(t)$ 的拉普拉斯变换，记为 $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$

基本拉普拉斯变换（本课程中只讨论 $u(t)$）

$1 \longrightarrow \frac{1}{s}$

$e^{at} \longrightarrow \frac{1}{s-a}$

$t^m \longrightarrow \frac{m!}{s^{m+1}}$

$\sin at \longrightarrow \frac{a}{s^2+a^2}$

$\cos at \longrightarrow \frac{s}{s^2+a^2}$

拉普拉斯变换性质

1. 线性性质

$\mathcal{L}[\alpha f(t)+\beta g(t)]=\alpha F(s)+\beta G(s)$

$\mathcal{L}^{-1}[\alpha F(s)+\beta G(s)]=\alpha f(t)+\beta g(t)$

2. 相似性质

$\mathcal{L}[f(at)]=\frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$

3. 延迟性质

$\mathcal{L}[f(t-\tau)]=e^{-s\tau}F(s)$　　符号相同

$\mathcal{L}^{-1}[e^{-s\tau}F(s)]=f(t-\tau)\,u(t-\tau)$

4. 位移性质　　符号相反

$\mathcal{L}[e^{at}f(t)]=F(s-a)$

5. 微分性质

① $\mathcal{L}[f'(t)]=sF(s)-f(0)$

各系数之和为 $n-1$

$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)]=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)$

② $F'(s)=-\mathcal{L}[t f(t)]$

$F^{(n)}(s)=(-1)^n\mathcal{L}[t^n f(t)]$

Z变换．

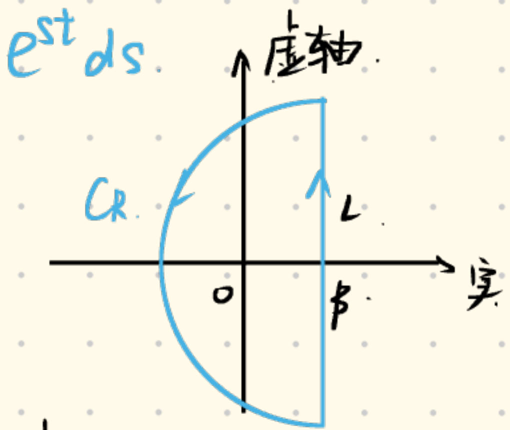
6. 积分性质

① $\mathcal{L}[\int_0^t f(t)dt]=\frac{F(s)}{s}$　　$\mathcal{L}[\underbrace{\int_0^t dt\cdots\int_0^t f(t)dt}_{n次}]=\frac{1}{s^n}F(s)$

② $\int_s^{\infty}F(s)ds=\mathcal{L}[\frac{f(t)}{t}]$　　$\underbrace{\int_s^{\infty}ds\cdots\int_s^{\infty}ds}_{n次}=\mathcal{L}[\frac{f(t)}{t^n}]$

拉普拉斯逆变换

定义：$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\beta-j\infty}^{\beta+j\infty}F(s)\,e^{st}\,ds$



使用留数计算反演积分

$=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[F(s)e^{st},s_k]$

取留数时应取 $F(s)e^{st}$ 的留数