练　习　一

1．求下列各复数的实部、虚部、模与幅角。

（1）$\dfrac{1-2i}{3-4i}-\dfrac{2-i}{5i}$；

解：$\dfrac{1-2i}{3-4i}-\dfrac{2-i}{5i}$

$=\dfrac{16}{25}+\dfrac{8}{25}i$

$\operatorname{Re} z=\dfrac{16}{25}\quad \operatorname{Im} z=\dfrac{8}{25}\quad |z|=\dfrac{8\sqrt{5}}{25}$

$Argz=\arctan\dfrac{1}{2}+2k\pi \quad k\in z$

（2）$(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2})^3$

解：$(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2})^3$

$=(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3})^3=[e^{i\frac{\pi}{3}}]^3=-1$

$\operatorname{Re} z=-1 \quad \operatorname{Im} z=0 \quad |z|=1$

$Argz=\pi+2k\pi \quad k\in z$

2．将下列复数写成三角表示式。

1）$1-\sqrt{3}i$

解：$1-\sqrt{3}i$

$=2(\cos\dfrac{5\pi}{3}+i\sin\dfrac{5\pi}{3})$

（2）$\dfrac{2i}{1+i}$

解：$\dfrac{2i}{1+i}$

$=1+i=\sqrt{2}(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4})$

3．利用复数的三角表示计算下列各式。

（1）$\dfrac{-2+3i}{3+2i}$

解：$\dfrac{-2+3i}{3+2i}$

$=i=\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}$

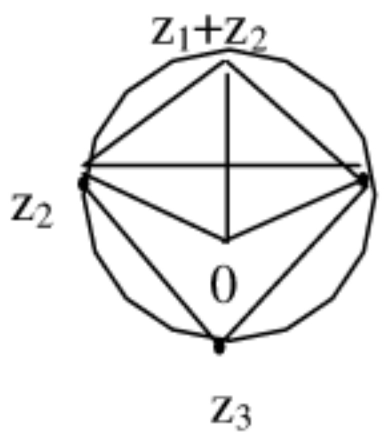
（2）$\sqrt[4]{-2+2i}$

解：$\sqrt[4]{-2+2i}=[2\sqrt{2}(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4})]^{\frac{1}{4}}$

$$= 2^{\frac{3}{8}}[\cos\frac{3\pi/4+2k\pi}{4}] + i\sin\frac{3\pi/4+2k\pi}{4}] = 2^{\frac{3}{8}}[\cos\frac{3+8k}{16}\pi + i\sin\frac{3+8k}{16}\pi]$$

$$k = 0,1,2,3$$

4．. 设 z_1, z_2, z_3 三点适合条件：$z_1 + z_2 + z_3$=0，$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, z_1, z_2, z_3 是内接于单位圆 $|z|$=1 的一个正三角形的项点。



证：因 $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, 所以 z_1, z_2, z_3 都在圆周 $|z| = |z_1| = 1$, 又因 $z_1 + z_2 + z_3$=0

则 $z_1 + z_2 = -z_3$，$|z_1 + z_2| = |-z_3| = 1$，所以 $z_1 + z_2$ 也在圆周 $|z| = 1$ 上，又 $|z_1 + z_2 - z_1| = |z_2| = 1$, 所以以 0，$z_1, z_1 + z_2$ 为顶点的三角形是正三角形，所以向量 z_1与$z_1 + z_2$ 之间的张角是 $\frac{\pi}{3}$，同理 z_2与$z_1 + z_2$ 之间的张角也是 $\frac{\pi}{3}$，于是 z_1与z_2 之间的张角是 $\frac{2\pi}{3}$，同理 z_1 与 z_3，z_2 与 z_3 之间的张角都是 $\frac{2\pi}{3}$，所以 z_1, z_2, z_3 是一个正三角形的三个顶点。

5．解方程 $z^3 + 1 = 0$

$$解: z^3 = -1 \Rightarrow z = \cos\frac{2k\pi+\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi+\pi}{3} \qquad k = 0,1,2$$

$$z_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_2 = \cos\pi + i\sin\pi = -1$$

$$z_3 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

6．试证：当 $|\alpha| = 1, |\beta| < 1$ 时，则 $\left|\frac{\alpha-\beta}{1-\overline{\alpha}\beta}\right| = 1$。

证：$\left|\frac{\alpha-\beta}{1-\overline{\alpha}\beta}\right| = \left|\frac{\alpha-\beta}{\overline{\alpha}\cdot\alpha-\overline{\alpha}\beta}\right| = \left|\frac{\alpha-\beta}{|\overline{\alpha}|\,|\alpha-\beta|}\right| = \frac{1}{|\overline{\alpha}|} = 1$

7．设 $z+z^{-1}=2\cos\theta(z\neq 0,\theta$ 是 Z 的辐角)，求证 $z^{n}+z^{-n}=2\cos n\theta.$

证：$z+z^{-1}=2\cos\theta\Rightarrow z^{2}-2\cos\theta\cdot z+1=0$

则 $z=\cos\theta\pm i\sin\theta$

当 $z=\cos\theta+i\sin\theta$ 时 $z^{-1}=\cos\theta-i\sin\theta$

$z^{n}+z^{-n}=(\cos n\theta+i\sin\theta)+[\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta)]=2\cos n\theta$

故 $z^{n}+z^{-n}=2\cos n\theta$

当 $z=\cos\theta-i\sin\theta$ 时，同理可证。

*8．思考题：

（1）复数为什么不能比较大小？

答：复数域不是有序域，复数的几何意义是平面上的点。

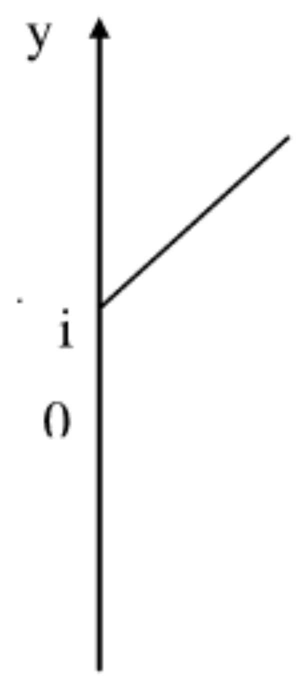
（2）是否任意复数都有辐角？

答：否，$z=0$ 是模为零，辐角无定义的复数。

练 习 二

1．指出满足下列各式的点 Z 的轨迹是什么曲线？

（1） $\arg(z-i)=\dfrac{\pi}{4}$



解：设 $z=x+iy$ 　则 $\arg(z-i)=\arg[x+i(y-1)]=\dfrac{\pi}{4}$

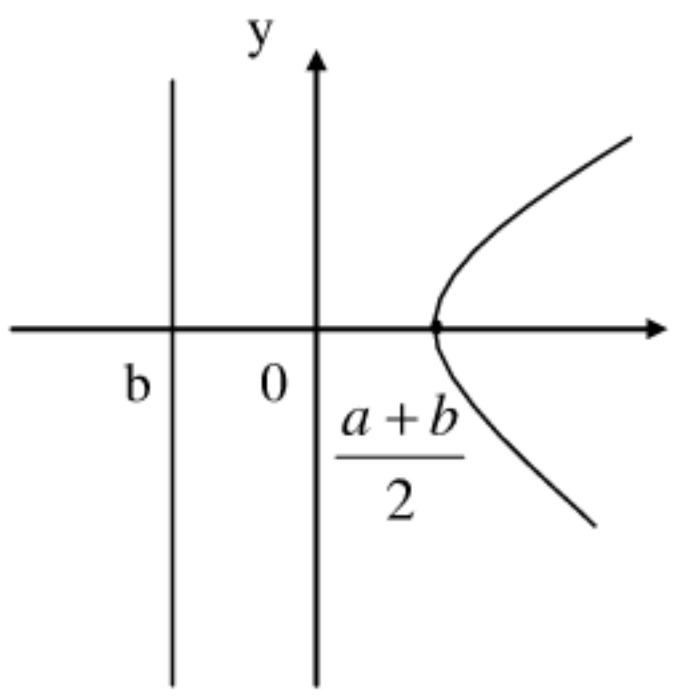
$\therefore\begin{cases}x>0\\ y-1>0\\ x=y-1\end{cases}$ 则点 Z 的轨迹为：

（2） $|z-a|=\mathrm{Re}(z-b)$，其中 a,b 为实数常数；

解：设 $z=x+iy$ 　　则：$|(x-a)+iy|=\mathrm{Re}(x-b+iy)$

$\therefore\begin{cases}(x-a)^2+y^2=(x-b)^2\\ x-b\geq 0\end{cases}$ 　　则：$\begin{cases}y^2=2(a-b)x+b^2-a^2\\ \quad=2(a-b)(x-\dfrac{a+b}{2})\\ x\geq b\end{cases}$

若：$a=b$ 　则轨迹为：　$y=0$



若：$a>b$ 　则 $x\geq\dfrac{a+b}{2}>b$

轨迹：$y^2=2(a-b)(x-\dfrac{a+b}{2})$

若：$a<b$ 　则 $x\leq\dfrac{a+b}{2}$，无意义

（3） $z\overline{z}+a\overline{z}+\overline{a}z+b=0$，其中为 a 复数 b 为实常数。

解：由题设可知：$(z+a)(\overline{z}+\overline{a})+b-|a|^2=0$

即：$|z+a|^2=|a|^2-b$

若：$|a|^2=b$，则 Z 的轨迹为一点 $-a$，

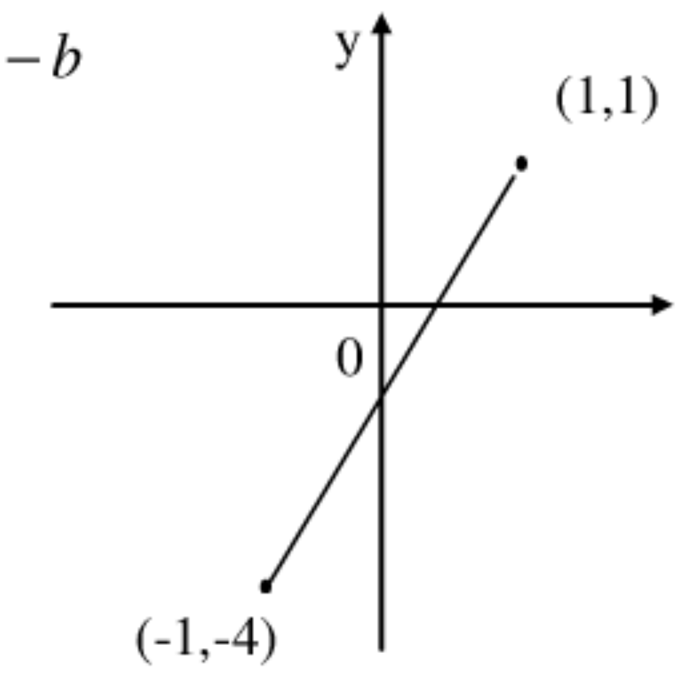
若：$|a|^2 > b$，则 Z 的轨迹为圆，圆心在 $-a$，半径为 $\sqrt{|a|^2 - b}$

若：$|a|^2 < b$，无意义

2．用复参数方程表示曲线，连接 $1+i$ 与 $-1-4i$ 直线段。

解：$z-(1+i)=[(-1-4i)-(1+i)]t \quad 0 \le t \le 1$

则 $z=(1+i)-(2+5i)t \quad (0 \le t \le)$



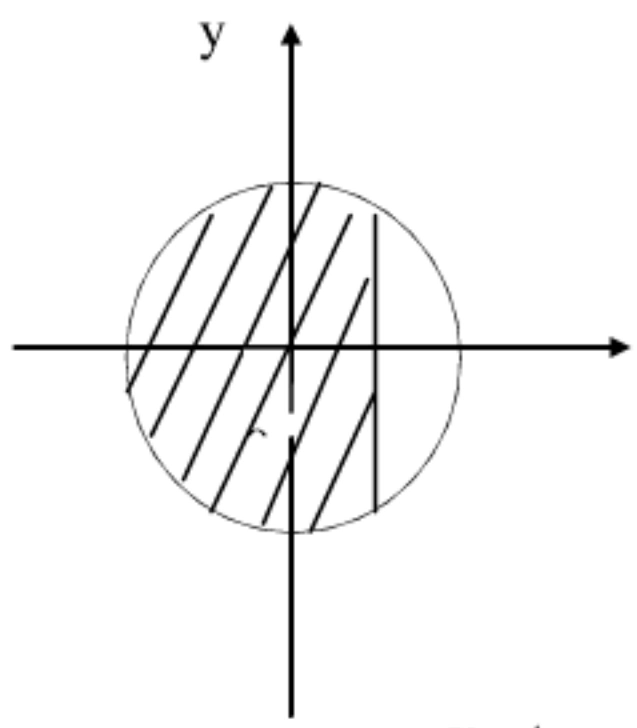
3．描出下列不等式所确定和区域与闭区域，并指明它是有界的还是无界的？是单连域还是多连域？并标出区域边界的方向。

（1） $|z|<1, \operatorname{Re} z \le \dfrac{1}{2}$

解：由 $|z|<1$，得 $x^2+y^2<1$

又 $\operatorname{Re} z \le \dfrac{1}{2}$，得 $x \le \dfrac{1}{2}$

有界，单连域



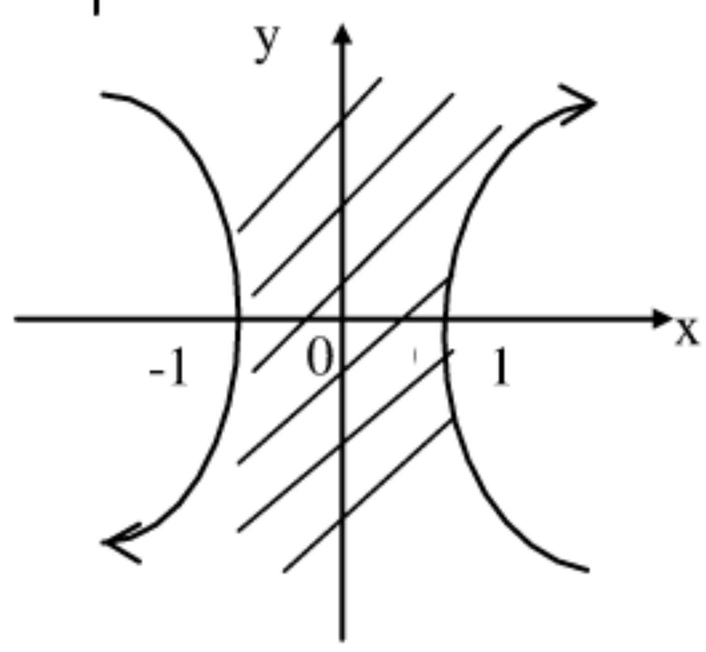
（2） $\operatorname{Re} z^2 < 1$

解：令 $z=x+iy$

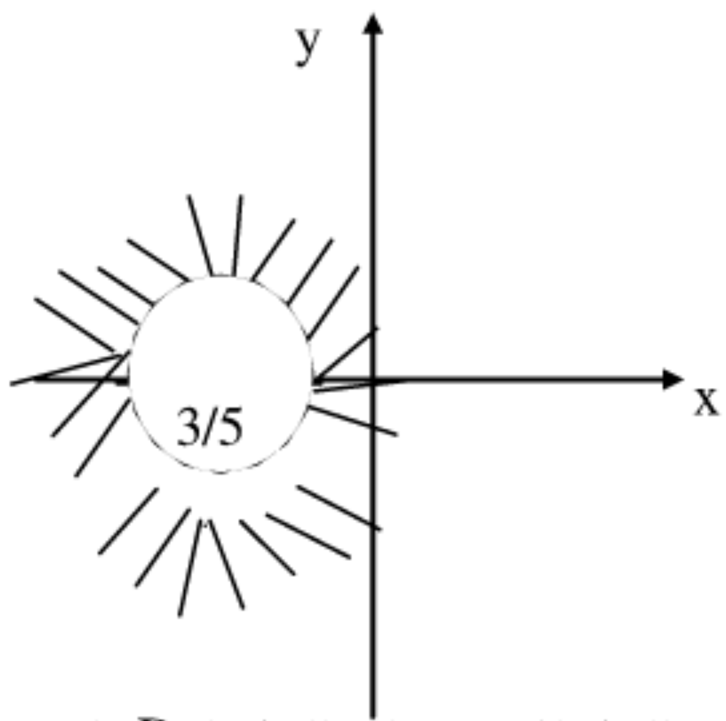
由 $\operatorname{Re} z^2 < 1 \Rightarrow x^2 - y^2 < 1$

即：$y^2 > x^2 - 1$

无界，单连域



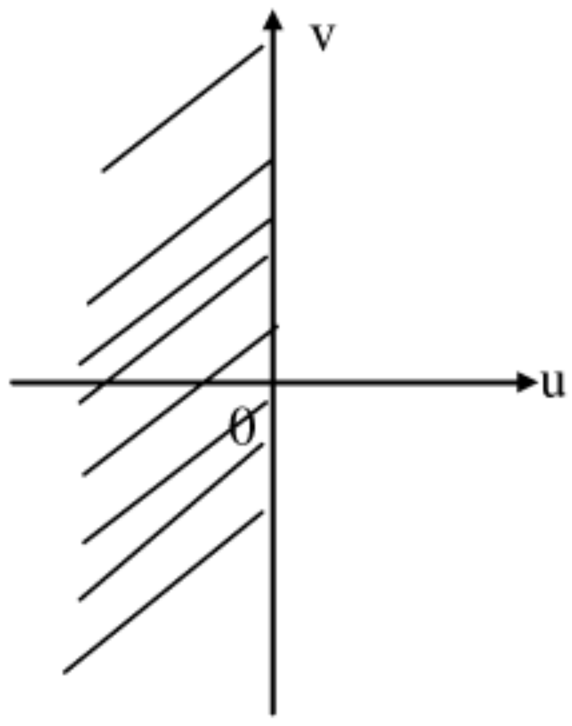
（3）$\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right| \le 2$



解：令 $z = x + iy$　则：$(x+\dfrac{5}{3})^2 + y^2 \ge (\dfrac{4}{3})^2$

无界，多连域

4．对于函数 $\omega = f(z) = iz, D: \operatorname{Im} z > 0$，描出当 z 在区域 D 内变化时，w 的变化范围。



解：令 $z = x + iy$

则 $w = f(z) = iz = i(x+iy) = -y + ix$

$\because \operatorname{Im} z > 0,$ 则 $y > 0$

$\because \operatorname{Re} w = -y < 0,$

$\therefore w$ 的变化范围在第 2, 3 象限, 但不包括虚轴

5. 试证 $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\operatorname{Re} z}{z}$ 不存在。

证：$\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\operatorname{Re} z}{z} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x}{x+iy}$

令 $y = kx$　则：上述极限为 $\dfrac{1}{1+ki}$ 不确定，因而极限不存在。

*6. 思考题

（1）怎样理解复变函数 $w = f(z)$？

答：设 $w = u + iv, z = x + iy, 则 w = f(z)$ 就是

$u + iv = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$

即 $\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$　因此，一个复变函数 $f(z)$ 与两个实变函数 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 相对应，从几何意义上来说，复变函数可以看作是 z 平面上的点集 D 到 w 平面上的点集 G 上的映射。

（2）设复变函数 $f(z)$ 当 $z \to z_0$ 时的极限存在，此极限值与 z 趋于 z_0 所采取的方式（取的路径）有无关系？

答：没有关系，z 以任意方式趋于 z_0 时，极限值都是相同的，反过来说，若令 z 沿两条不同的曲线趋于 z_0 时极限值不相等，则说明 $f(z)$ 在 z_0 没有极限，这与高等数学中的情形是类似的，只是一元实函数中，x 只能从左、右以任何方式趋于 x_0，而这里可以从四面八方任意趋于 z_0。

练 习 三

1．用导数定义，求 $f(z)=z\operatorname{Re}z$ 的导数。

解：$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)\operatorname{Re}(z+\Delta z)-z\operatorname{Re}z}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{z\operatorname{Re}\Delta z+\Delta z\operatorname{Re}z+\Delta z\operatorname{Re}\Delta z}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}(\operatorname{Re}z+\operatorname{Re}\Delta z+z\frac{\operatorname{Re}\Delta z}{\Delta z})$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}(\operatorname{Re}z+\frac{\operatorname{Re}\Delta z}{\Delta z})=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}(\operatorname{Re}z+z\cdot\frac{\Delta x}{\Delta x+i\Delta y})$$

当 $z\neq 0$ 时，导数不存在，

当 $z=0$ 时，导数为 0。

2．下列函数在何处可导？何处不可导？何处解析？何处不解析？

（1）$f(z)=\dfrac{1}{\bar z}$

解：$$f(z)=\frac{1}{\bar z}=\frac{z}{|z|^2}=\frac{x}{x^2+iy}+i\frac{y}{x^2+y^2}=u(x,y)+iv(x,y)$$

$$u_x=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\qquad u_y=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$v_x=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\qquad v_y=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

当且仅当 $x=y$ 时，$f(z)$ 满足 $C-R$ 条件，故当 $x=y$ 时 $f(z)$ 可导，但在复平面不解析。

（2）$f(z)=x^3-3xy^2+i(3x^2y-y^3)$

解：令 $f(z)=u(x,y)+iv(xy)$

则 $$u_x=3x^2-3y^2\quad v_x=-6xy$$
$$u_y=6xy\qquad v_y=3x^2-3y^2$$

因 $f(z)$ 在复平面上处处满足 $C-R$ 条件，且偏导数连续，故 $f(z)$ 可导且解析。

3．设 $my^3+nx^2y+i(x^3+lxy^2)$ 为解析函数，试确定 l,m,n 的值。

解：由 $C-R$ 条件可知：$2nxy=2lxy$　　所以 $n=l$

又 $3my^2+nx^2=-3x^2-ly^2$　所以 $3m=-l,$ 且$n=-3$

即 $\begin{cases} m=1 \\ n=l=-3 \end{cases}$

4. 设 $f(z)$ 在区域 D 内解析，试证明在 D 内下列条件是彼此等价的。

（1）$f(z)$=常数；　（2）$f'(z)=0$；　（3）$\operatorname{Re} f(z)=$ 常数

（2）$\operatorname{Im} f(z)=$ 常数；　（5）$\overline{f(z)}$ 解析；　（6）$|f(z)|=$ 常数。

证: 由于 $f(z)$ 在且域 D 内解析，则可得 $C-R$ 方程成立，即

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \text{ 且 } \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

1）→2）由 $f(z)\equiv c$ 则 $f'(z)=c'=0$ 在 D 内成立，故（2）显然成立，

2）→3）由 $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0 \Rightarrow u(x,y)$ 是常数

即 $\operatorname{Re} f(z)=$ 常数

3）→4） $u\equiv$ 常数 $\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0$ 由 $C-R$ 条件 $\left.\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial y}=0 \\ \frac{\partial v}{\partial x}=0 \end{cases}\right\} \Rightarrow v(x,y)$ 是常数

$\Rightarrow \operatorname{Im} f(z)=$ 常数

4）→5）若 $\operatorname{Im} f(z)=c, f(z)=u+ic, \overline{f(z)}=u-ic_1,$ 因 $f(z)$ 在 D 内解析

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial c}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial c}{\partial x}=0$$

即 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial(-c)}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial(-c)}{\partial x}$ 一阶偏导连续且满足 $C-R$ 条件 $\Rightarrow \overline{f(z)}$ 在 D 内解析。

5）→6） $f(z)=u+iv, g(z)=\overline{f(z)}=u-iv$ 　因 $g(z)$ 解析，则由 $C-R$ 条件

$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$，　对 $f(z)$ 在 D 内解析，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\Rightarrow\left.\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial v}{\partial x}=0\Rightarrow v\text{为常数}\\[2mm]\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial v}{\partial x}=0\Rightarrow v\text{为常数}\end{cases}\right\}\Rightarrow|f(z)|$$

为常数

6）→1） $|f(z)|=$ 常数 $\Rightarrow|f(z)|^2=$ 常数，令 $u^2+v^2=c$

分别对 x,y 求偏导数得

$$\begin{cases}u\dfrac{\partial u}{\partial x}-v\dfrac{\partial u}{\partial y}=0\\[2mm]v\dfrac{\partial u}{\partial x}+u\dfrac{\partial u}{\partial y}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(u^2+v^2)\dfrac{\partial u}{\partial x}=0\\[2mm](u^2+v^2)\dfrac{\partial u}{\partial y}=0\end{cases}$$

若 $u^2+v^2=0$ 则 $u=v=0,f(z)=0$，因而得证

若 $u^2+v^2\neq 0$，则 $\dfrac{\partial u}{\partial x}-i\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$，故 $u=$ 常数，由 $C-R$ 条件 $\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=0,\Rightarrow v$ 为常数

$$\Rightarrow f(z)=\text{常数}$$

*5. 思考题：

（1）复变函数 $f(z)$ 在一点 z_0 可导与在 z_0 解析有什么区别？

答：$f(z)$ 在 z_0 解析则必在 z_0 可导，反之不对。这是因为 $f(z)$ 在 z_0 解析，不但要求 $f(z)$ 在 z_0 可导，而且要求 $f(z)$ 在 z_0 的某个邻域内可导，因此，$f(z)$ 在 z_0 解析比 $f(z)$ 在 z_0 可导的要求高得多，如 $f(z)=|z|^2$ 在 $z_0=0$ 处可导，但在 $z_0=0$ 处不解析。

（2）函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析与 $f(z)$ 在区域 D 内可导有无区别？

答：无，（两者等价）。

（3）用 $C-R$ 条件判断 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 解析时应注意些什么？

答：$u(x,y),v(x,y)$ 是否可微。

（4）判断复变函数的可导性或解析性一般有哪些方法。

答：一是定义。二是充要条件。三是可导（解析）函数的和、差、积、商与复合仍可导（解析）函数。

练 习 四

1．由下列条件求解析函数 $f(z)=u+iv$；

（1） $u=2(x-1)y, f(2)=-i$

解：由 $f(z)$ 解析可知： $u_x=v_y \quad u_y=-v_x$ 而 $u_x=2y \quad u_y=2(x-1)$

则 $v_x=-u_y=-2(x-1), v_y=u_x=2y$

所以 $v(x,y)=\int v_y dy=\int 2y dy=y^2+\varphi(x)$

$$-2(x-1)=v_x=\varphi'(x) \qquad \therefore \varphi(x)=\int -2(x-1)dx=-(x-1)^2+c$$

由 $f(2)=-i$ 可知 $c=0$

$\therefore f(z)=2(x-1)y+i(y^2-x^2+2x-1)$

（2） $v=arctg\dfrac{y}{x}, x>0.$

解：因 $v_x=-\dfrac{y}{x^2+y^2} \qquad v_y=-\dfrac{x}{x^2+y^2}$ 由 $f(z)$ 解析

可知： $u_x=v_y=\dfrac{x}{x^2+y^2} \qquad u_y=-v_x=\dfrac{y}{x^2+y^2}$

$$u(x,y)=\int u_x dx=\int\frac{x}{x^2+y^2}dx=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+\varphi(y)$$

$$u_y=\frac{y}{x^2+y^2}+\varphi'(y)=\frac{y}{x^2+y^2} \qquad \therefore u(x,y)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+c$$

即 $f(z)=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+c+iarctg\dfrac{y}{x}$

2．设 $v=e^{px}\sin y$，求 p 的值使 v 为调和函数，并求出解析函数 $f(z)=u+iv$。

解：要使 $v(x,y)$ 为调和函数，有： $\Delta v=v_{xx}+v_{yy}=0$，即： $p^2e^{px}\sin y-e^{px}\sin y=0$

$\therefore p=\pm 1$ 时，v 为调和函数，要使 $f(z)$ 解析，则 $u_x=v_y, u_y=-v_x$

$$u(x,y)=\int u_x dx=\int v_y dy=\int e^{px}\cos y dx=\frac{1}{p}e^{px}\cos y+\varphi(y)$$

$u_y=\frac{1}{p}e^{px}\sin y+\varphi'(y)=-pe^{px}\sin y$

$\therefore \varphi'(y)=(\frac{1}{p}-p)e^{px}\sin y \qquad \therefore \varphi(y)=(p-\frac{1}{p})e^{px}\cos y+c$

即：$u(x,y)=pe^{px}\cos y+c \qquad \therefore f(z)=\begin{cases} e^x(\cos y+i\sin y)+c=e^z+c & p=1 \\ e^{-x}(\cos y+i\sin y)+c=-e^{-z}+c & p=-1 \end{cases}$

3．如果 $f(z)=u+iv$ 为解析函数，试证 $-u$ 是 v 的共轭调和函数。

证：因 $f(z)$ 解析，有：$\Delta u=0,\Delta v=0,u_x=v_y,u_y=-v_x$

所以，u,v 均为调和函数， 且 $-u$ 亦为调和函数

$$\begin{cases} v_x=-u_y=\dfrac{\partial(-u)}{\partial y} \\ v_y=u_x=\dfrac{\partial(-u)}{\partial x} \end{cases}$$

故 $-u$ 是 v 的共轭调和函数

4．如果 $f(z)=u+iv$ 是一解函数，试证：$\overline{\overline{i f(z)}}$ 也是解析函数。

证：因 $f(z)$ 解析，则 $u_x=v_y,u_y=-v_x$ 且 u,v 均可微，从而 $-u$ 也可微。

而 $\overline{\overline{i f(z)}}=v-iu=v+i(-u)$

可知：$v_x=-u_y=\dfrac{\partial(-u)}{\partial y}$

$v_y=-u_x=\dfrac{\partial(-u)}{\partial x}$

即满足 $C-R$ 条件 $\therefore \overline{if(z)}$ 也是解析函数。

5．试解方程：

（1）$e^z=1+\sqrt{3}i$

解：$e^z=1+\sqrt{3}i=2(\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3})=2e^{i(\frac{\pi}{3}+2k\pi)}=e^{\ln 2+i(2k\pi+\frac{\pi}{3})} \quad k\in z$

$\therefore z=\ln 2+i(2k\pi+\frac{\pi}{3}) \quad k\in z$

（2）$\sin z+\cos z=0$

解：由题设可知：$e^{i2z}=-i$

$\therefore z=k\pi-\dfrac{\pi}{4},\quad k\in z$

6．求下列各式的值：

（1）$Ln(-3+4i)$

解：$Ln(-3+4i)$

$=\ln 5+i\arg(-3+4i)$

$=\ln 5+i(2k\pi+\pi-aratg\dfrac{4}{3})$

（2）3^{3-i}

解：$Ln3^{3-i}$

$=3^{3}\cdot 3^{-i}$

$=27\cdot e^{-iLn3}=27\cdot e^{-i(\ln 3+i2k\pi)}=27e^{-i\ln 3+2k\pi}$

$=27e^{2k\pi}[\cos(\ln 3)-i\sin(\ln 3)]$

（3）e^{2+i}

解：$e^{2+i}=e^{2}\cdot e^{i\cdot 1}$

$=e^{2}(\cos 1+i\sin 1)$

*7. 思考题

（1）为什么复变指数函数是周期函数，而实变指数函数没有周期？

答：由于实数是复数的特例，因此在把实变函数中的一些初等函数推广到复变数情形时，要使定义的各种复变初等函数当 z 取实数 x 时与相应的实变初等函数有相同的值并保持某些性质不变，但不能保持所有的性质不变。

复变指数函数并不能保持实变指数函数的所有性质。如对复数 z，一般没有 $e^{z}>0$。而复变指数函数的周期性，仅当周期是复数（$2k\pi i$）时才显现出来。所谓实变指数函数 e^{x} 没有周期，是指其没有实的周期。

（2）实变三角函数与复变三角函数在性质上有哪些异同？

答：两者在函数的奇偶性、周期性、可导性上是类似的，而且导数的形式、加法定理、正余弦函数的平方和等公式也有相同的形式。

最大的区别是，实变三角函数中，正弦函数与余弦函数都是有界函数，但在复变三角函数中，$|\sin z|\le 1$ 与 $|\cos z|\le 1$ 不再成立。因为

$$|\sin z| = \left|\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}\right| = \frac{1}{2}\left|e^{iz} - e^{-iz}\right|$$
$$\geq \frac{1}{2}\left|\,\left|e^{iz}\right| - \left|e^{-iz}\right|\,\right|$$
$$= \frac{1}{2}\left|e^{-y} - e^{y}\right|$$

当 $y \to +\infty$ 时，$e^{-y} \to 0, e^{y} \to +\infty$。故 $|\sin z| \to +\infty.$

（3）怎样理解实变对数函数与复变对数函数的异同？并理解复变对数函数的运算性质。

答：因为我们把对数函数定义为指数函数的反函数。所以由复变指数函数的多值性推出复变对数函数也是多值函数，$Lnz = \ln|z| + iArgz.$

Lnz 的主值即 $\ln z = \ln|z| + i\arg z$，是单值函数，当 $z = x$，而 $x > 0$ 时，$\ln z$ 就与高等数学中的 $\ln x$ 值一致了。

在复变对数函数的运算性质中，注意到等式

$\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2$ 与 $\ln(z_1 / z_2) = \ln z_1 - \ln z_2$，

要对其含义理解清楚。在实变对数函数中它们的意义是明了的，但在复变指数函数中，例如，

$$Ln(z_1 z_2) = Ln|z_1 z_2| + iArg(z_1 z_2).$$

$$\ln z_1 = \ln|z_1| + iArgz_1, \ln z_2 = \ln|z_2| + iArgz_2,$$

而 $\quad \ln z_1 z_2 = \ln|z_1| + \ln|z_2|$，

$$Arg(z_1 z_2) = Argz_1 + Argz_2$$

应理解为：任意给定等式两端两个多值函数一对可能取的值，左端多值函数也必有一个值使等式成立。反过来也一样。也就是理解为等式两端可能取的函数值从全体上讲是相同的（即不能只考虑某一单值支）。后一式也同样理解，但对等式

$$nLnz = Ln(z^n) \text{ 和 } Ln\sqrt[n]{z} = \frac{1}{n}Lnz,$$

它两端所能取的值从全体上看还是不一致的。如对 $nLnz = Lnz^n$，取 $n = 2$ 时，设 $z = re^{i\vartheta}$，得 $2Lnz = 2\ln r + i(2\theta + 4k\pi).k = 0,\pm1,\pm2,\cdots$ 而从 $z^2 = r^2 e^{i2\theta}$，得

$$Ln(z^2) = \ln r^2 + i(2\theta + 2m\pi), m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

两者的实部是相同的，但虚部的可取值不完全相同。

（4）调和函数与解析函数有什么关系？

答：如果 $f(z)=u+iv$ 是区域 D 内的解析函数，则它的实部 u 和虚部 v 的二阶偏导数必连续，从而满足拉普拉斯方程，所以是调和函数。

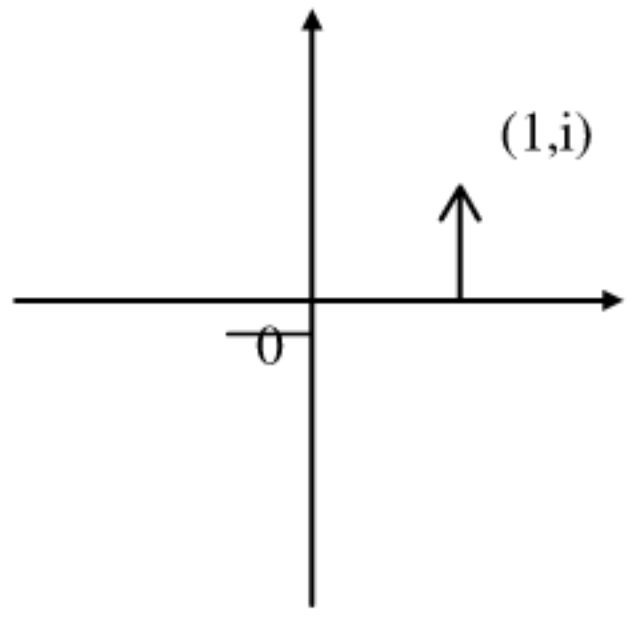
由于解析函数的导函数仍是解析函数，所以它的实部和虚部的任意阶偏导数都是 $f(z)$ 的相应阶导数的实部和虚部，所以它们的任意阶偏导数都存在且连续。故可以推出：u 、v 的任意阶偏导数仍是调和函数。

（5）若 v 是 u 的共轭调和函数，可以说 u 是 v 的共轭调和函数吗？

答：不行，两者的地位不能颠倒。因为，若 v 是 u 的共轭调和函数，则应有 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y};$ 而 u 是 v 的共轭调和函数，要求 $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial y},$ 两者一般不能同时成立，所能推知的是 $-u$ 是 v 的共轭调和函数。

练 习 五

1．计算积分 $\int_0^{1+i}[(x-y)+ix^2]dz$，积分路径：自原点沿实轴至 1，再由 1 铅直向上至 1+i。



解：$\int_0^{1+i}[(x-y)+ix^2]dz$

$$=\int_{(0,0)}^{(1,0)}[(x-y)+ix]^2dz+\int_{(0,0)}^{(1,0)}[(x-y)+ix^2)]dz$$

$$=\int_0^1(x+ix^2)dx+i\int_0^1(1-y+i)dy$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{5}{6}i$$

2．计算积分 $\oint_c\frac{\overline{z}}{|z|}dz$ 的值，其中 C 为（1）$|z|=2;$（2）$|z|=4.$

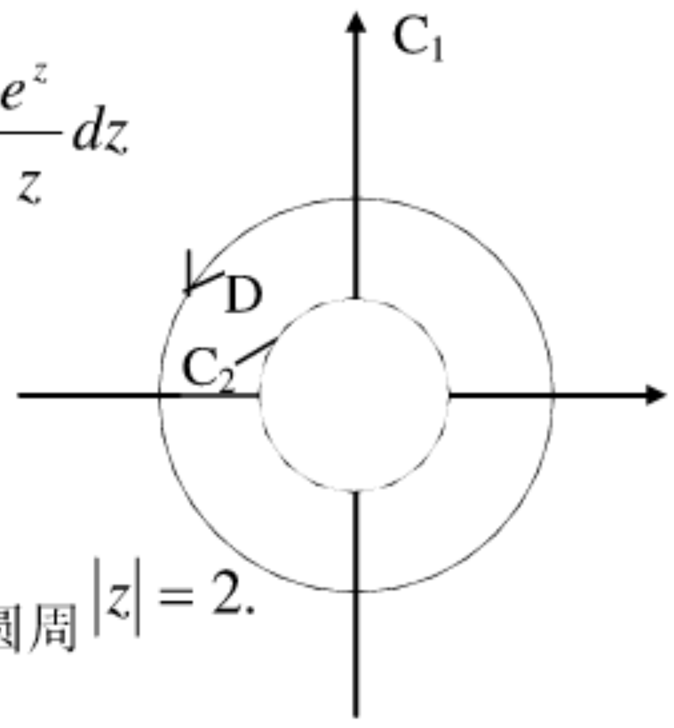
解：令 $z=re^{i\theta}$ 则

$$\oint_{|z|=r}\frac{\overline{z}}{|z|}dz=\int_0^{2\pi}\frac{re^{-i\theta}}{r}rie^{i\theta}d\theta=2\pi ri$$

当 $r=2$ 时，为 $4\pi i$

当 $r=4$ 时，为 $8\pi i$

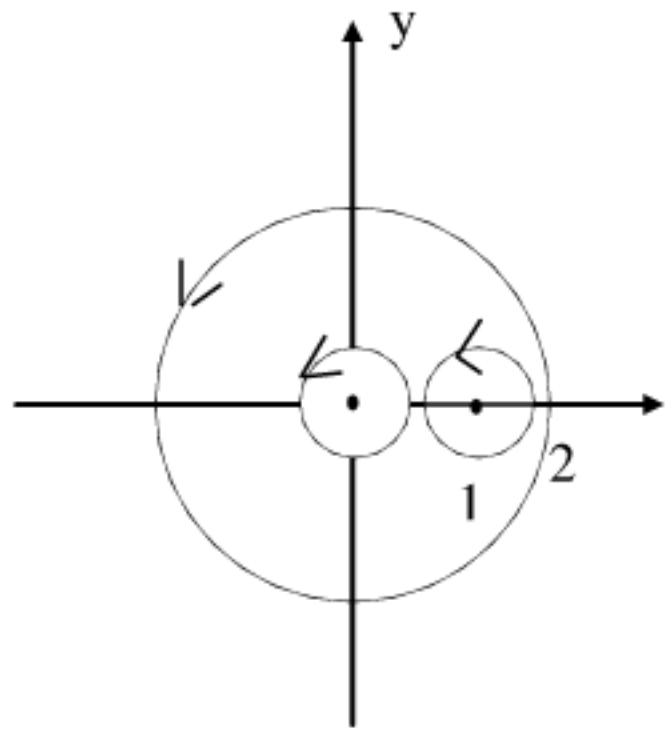
3．求积分 $\int_c\frac{e^z}{z}dz$ 的值，其中 C 为由正向圆周 $|z|=2$ 与负向圆周 $|z|=1$ 所组成。



解：$\int_c\frac{e^z}{z}dz=\oint_{|z|=2}\frac{e^z}{z}dz-\oint_{|z|=1}\frac{e^z}{z}dz$

$$=2\pi i-2\pi i=0$$

4．计算 $\oint_c\frac{1}{z^2-z}dz$，其中 C 为圆周 $|z|=2.$



解：$\oint_c\frac{1}{z^2-z}dz$

$$=\oint_{|z|=2}\frac{1}{z(z-1)}dz=\oint_{|z|=2}\frac{1}{(z-1)}dz-\oint_{|z|=2}\frac{1}{z}dz$$

$$=2\pi i-2\pi i=0$$

5．计算下列积分值：

（1） $\int_0^{\pi i}\sin zdz$

解：$\int_0^{\pi i}\sin zdz=-\cos z\Big|_0^{\pi i}=1-\cos\pi i$

（2） $\int_1^{1+i}ze^z dz$

解：$\int_1^{1+i}ze^z dz=\int_1^{1+i}zde^z=(ze^z-e^z)\Big|_1^{1+i}=ie^{1+i}$

6．当积分路径是自 $-i$ 沿虚轴到 i，利用积分性质证明：

$$\left|\int_{-i}^{i}(x^2+iy^2)dz\right|\le 2$$

证：$\left|\int_{-i}^{i}(x^2+iy^2)dz\right|\le\int_{-i}^{i}\left|(x^2+iy^2)\right|\left|dz\right| \le\int_{-i}^{i}\left|y^2\right|ds\le 1.2=2$

*7. 思考题

（1）在积分的定义中为什么要强调积分 $f(z)$ “沿曲线 C 由 α 到 β 的积分”？它与“沿曲线 C 由 β 到 α 的积分”有什么区别？

答：在定积分中已有 $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$ ，即积分是与区间的方向有关的，这里 $w=f(z)$ 在 C 上的积分也与 C 的方向有关。这从积分和式 $s_n=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta z_k$ 中的因子 $\Delta z_k=z_k-z_{k-1}$ 可直接看出，若改变 C 的方向，即 $f(z)$ 是沿曲线 C 由 β 到 α 积分，则积分与原积分反号：

$$\int_C f(z)dz=-\int_{C^-}f(z)dz$$

其中 C^{-1} 表示 C 的反向曲线。

（2）复函数 $f(z)$ 的积分与实一元函数定积分是否一致？

答：若 C 是实轴上的区间 $[\alpha,\beta]$，由定义知

$$\int_C f(z)dz=\int_\alpha^\beta f(x)dx,$$

即为一个实函数的积分，如果 $f(x)$ 是实值的，则为一元实函数的定积分，因而这样定义复变函数积分是合理的，而且可以把高等数学中的一元实函数的定积分当作复积分的特例看待。

应当注意的是，一般不能把起点为 α，终点为 β 的函数 $f(z)$ 的积分记作 $\int_{\alpha}^{\beta} f(z)dz$，因为这是一个线积分，要受积分路线的限制，必须记作 $\int_{C} f(z)dz.$

（3）应用柯西——古萨定理应注意些什么？

答：必须注意定理的条件“单连域”，被积函数虽然在 B 内处处解析，但只要 B 不是单连的，定理的结论就不成立。例如 $f(z)=\dfrac{1}{z}$ 在圆环域：$\dfrac{1}{2}<|z|<\dfrac{3}{2}$ 内解析，C 为域内以原点为中心的正向圆周，但 $\oint_{C}\dfrac{1}{z}\cdot dz=2\pi i$，就是因为不满足“单连域”这个条件。

还要注意定理不能反过来用，即不能因为有 $\oint_{C} f(z)dz=0$，而说 $f(z)$ 在 C 内处处解析，例如 $\oint_{|z|=1}\dfrac{1}{z^{2}}\cdot dz=0$，但 $f(z)=\dfrac{1}{z^{2}}$ 在 $|z|=1$ 内并不处处解析。

练 习 六

1．计算下列积分

（1）$\oint_{|z|=2}\frac{2z^2-z+1}{z-1}dz$

解：$z=1$为奇点：

$$\oint_{|z|=2}\frac{2z^2-z+1}{z-1}dz=2\pi i(2z^2-z+1)\Big|_{z=1}=4\pi i$$

（2）$\oint_{|z|=1}\frac{e^z}{z^{100}}dz$

解：$\frac{2\pi i}{99!}e^z\Big|_{z=0}=\frac{2\pi i}{99!}$

（3）$\oint_{|z|=2}\frac{\sin z}{(z-\frac{\pi}{2})^2}dz$

解：$\oint_{|z|=2}\frac{\sin z}{(z-\frac{\pi}{2})^2}dz=2\pi i(\sin z)'\Big|_{z=\frac{\pi}{2}}=2\pi i\cos z\Big|_{z=\frac{\pi}{2}}=0$

（4）$\oint_{c=c_1+c_2}\frac{\cos z}{z^3}dz$，其中$C_1:|z|=2;\quad C_2:|z|=3$为负向。

解：$\oint_{c=c_1+c_2}\frac{\cos z}{z^3}dz=\oint_{c_1}\frac{\cos}{z^3}dz+\oint_{c_2}\frac{\cos z}{z^3}dz$

$=(\frac{\cos z}{2!}-\frac{\cos z}{2!})\cdot(\cos z)''|z=0=0$

或 $\oint_{c_1}=\oint_{c_2^-}\Rightarrow\oint_{c_1}-\oint_{c_2^-}=\oint_{c_1}+\oint_{c_2}=0$

2．若$f(z)$是区域G内的非常数解析函数，且$f(z)$在G内无零点，则$f(z)$不能在G内取到它的最小模。

证：设$g(z)=\frac{1}{f(z)}$，　　因$f(z)$为非常数解析函数，且$\forall z\in G\quad f(z)\neq 0$

则$g(z)$为非常数解析函数　　所以$g(z)$在G内不能取得最大模

即$f(z)$不能在G内取得最小模

3. 设 $f(z)$ 在 $|z|\le 1$ 上解析，且在 $|z|=1$ 上有 $|f(z)-z|<|z|$, 试证 $\left|f'(\frac{1}{2})\right|<8$ 。

证：因 $|f(z)|-|z|\le|f(z)-z|\le|z|$ （在 $|z|=1$ 上） 所以 $|f(z)|\le 2,\quad(|z|=1)$

$$\therefore\left|f'(\frac{1}{2})\right|\le\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\frac{f(z)-z+z}{(z-\frac{1}{2})^2}dz\right|\le\frac{1}{2\pi}\oint_{|z|=1}\frac{f(z)-z+|z|}{(z-\frac{1}{2})^2}|dz|$$

$$\le\frac{1}{2\pi}\oint_{|z=1|}\frac{2|z|}{\left|z-\frac{1}{2}\right|}ds\le\frac{1}{\pi}\oint_{|z=1|}\frac{1}{\frac{1}{4}}ds=8$$

$(\left|z-\frac{1}{2}\right|^2=x^2+y^2-x+\frac{1}{4}=1-x+\frac{1}{4}\ge\frac{1}{4},(x,y)$在$|z|=1$ 上

4．设 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在区域 D 内处处解析，C 为 D 内的任何一条简单闭曲线，它的内部全含于 D，如果 $f(z)=g(z)$ 在 C 上所有点处成立，试证在 C 内所有的点处 $f(z)=g(z)$ 也成立。

证：设 $F(z)=f(z)-g(z)$，因 $f(z),g(z)$ 均在 D 内解析，所以 $F(z)$ 在 D 内解析。

在 C 上，$F(z)=0,(z\in c)$，$\forall z_0\in c$ 有：$$F(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_c\frac{F(z)}{z-z_0}dz=0$$

所以 $f(z_0)=g(z_0)$

由 z_0 的任意性可知：在 C 内 $f(z)=g(z)$

*5．思考题

（1）复合闭路定理在积分计算中有什么用处？要注意什么问题？

答：由复合闭路定理，可以把沿区域外边界线的回路积分转化为沿区域内边界线的积分，从而便于计算。特别地，如果积分回路的内域中含有被积函数的有限个奇点，我们就可以挖去包含这些点的足够小的圆域（包括边界），函数在剩下的复连域解析，由复合闭路定理，就可以将大回路的积分换成分别沿这些小圆周的回路积分。

利用复合闭路定理是计算沿闭曲线积分的最主要方法。

使用复合闭路定理时，要注意曲线的方向，边界曲线 C 由 $C_0,C_1,C_2,\cdots,C_n$ 所围，

$\oint_C f(z)dz = 0$，即 $\oint_{C_0+C_1^-+\cdots C_n^-} f(z)dz = 0$，这时 C_0 取逆时针方向，而 $C_1^-, C_2^-, \cdots, C_n^-$ 取顺时针方向，而公式

$$\oint_{C_0} f(z)dz = \int_{C_1+C_2+\cdots C_n} f(z)dz$$

中 $C_0, C_1, \cdots, C_n$ 都取逆时针方向。

（2）柯西积分公式成立的条件是什么？柯西积分公式说明了什么问题？

答：柯西积分公式是建立在柯西积分定理基础上的，以柯西定理成立为前提条件，因此柯西定理的条件也是柯西积分公式成立的条件。即函数 $f(z)$ 在以 C 为边界的闭区域 $\overline{G}$ 上解析，当然也可以放宽到 $f(z)$ 在 G 内解析，在 C 上连续。

柯西积分公式反映了解析函数值之间很强的内在联系，$f(z)$ 在区域内点 α 的值 $f(\alpha)$，可以用 $f(z)$ 在边界 C 上的值通过积分来表达。这就是说，函数 $f(z)$ 在区域中任一点的值，完全由它在区域边界 C 上的值所确定，这是实变量的可微函数所不具有的。

（3）解析函数的高阶导数公式说明解析函数的导数与实函数的导数有何不同？

答：高阶导数公式说明，函数 $f(z)$ 只要在闭区域 $\overline{G}$ 中处处可微，它就一定处处无限次可微，并且它的各阶导数均为闭区域 $\overline{G}$ 上的解析函数。这一点与实变量函数有本质的区别。我们知道，对于实函数 $y = f(x)$ 而言，即使它在某一区间上一次可导，导数 $f'(x)$ 不一定仍然可导，甚至可能是不连续的。

练 习 七

1．序列 $z_n = \frac{n!}{n^n} i^n$ 是否有极限？若有，求出其极限。

解：因 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_n}{z_{n-1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{n!i^n}{n^n}}{\frac{(n-1)!^{n-1}}{(n-1)^{n-1}}}\right| = \lim_{n\to\infty}[1+\frac{1}{n-1}^{n-1}]^{-1} = e^{-1} < 1$

故级数 $\sum z_n$ 收敛，则其通项 $z_n \to 0,(n\to\infty)$

即序列 z_n 有极限，亦即 $\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} i^n = 0$

2. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n!}$ 是否收敛？是否绝对收敛？

解：因 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{i^n}{n!}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ 收敛，因而绝对收敛，故原级数收敛。

3．试确定下列幂级数的收敛半径。

（1）$\sum_{n=0}^{\infty}\cos(in)z^n$

解：$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\cos in}{\cos i(n+1)}\right|$ $= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{e^n + e^{-n}}{2}}{\frac{e^{(-(n+1)} + e^{1(n+1)}}{2}}\right|$

$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{e^n + e^{-n}}{e^{-(n+1)} + e^{(n+1)}}\right| = \frac{1}{e}$

（2）$\sum_{n=0}^{\infty}(n + a^n)z^n$

解：$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n + a^n}{(n+1) + a^{n+1}}\right|$

当 $|a|<1$ 时　　$R=1$

当 $|a|=1$ 时　　$R=1$

当 $|a|>1$ 时　　$R=1/|a|$

4．将下列各函数展开为 z 的幂级数，并指出其收敛区域。

（1）$\dfrac{1}{(1-z)^2}$

解：$\dfrac{1}{(1-z)^2}=(\dfrac{1}{1-z})'=(\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n)'=\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^{n-1}\cdot n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n\ (|z|<1).$

R=1，收敛域为 $|z|<1$

（2）$e^{\frac{z}{z-1}}$

解：$g(z)=e^{\frac{z}{z-1}}=e.e^{\frac{z}{z-1}}$，令 $f(z)=e^{\frac{z}{z-1}}$，则 $f'(z)=f(z)\dfrac{-1}{(z-1)^2}$

$$(z-1)^2f'(z)+f(z)=0$$

对此求导

$$(z-1)^2f''(z)+(zz-1)f'(z)=0$$

$$(z-1)^2f'''(z)+(4z-3)f''(z)+2f'(z)=0$$

$$f(0)=e^{-1},f'(0)=-e^{-1},f''(0)=-e^{-1},f'''(0)=-e^{-1}$$

$$f^{(4)}(0)=e^{-1}$$

故 $e^{\frac{z}{z-1}}=1-z-\dfrac{1}{2!}z^2-\dfrac{1}{3!}z^3+\dfrac{1}{4!}z^4+\cdots,|z|<1$

（3）$\int_0^z e^{z^2}dz$

解：$\int_0^z e^{z^2}dz=\int_0^z\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^{2n}}{n!}dz=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_0^z\dfrac{z^{2n}}{n!}dz$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{2n+1}z^{2n+1},\qquad |z|<\infty$$

5．讨论级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(z^{n+1}-z^{n})$ 的收敛性。

解：级数的部分和为 $S_n=\sum_{k=0}^{\infty}(z^{n+1}-z^{n})=z^{n+1}-1$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(z^{n+1}-1)$$

当 $|z|<1$ 时，$\lim_{n\to\infty}S_n=-1,$ 级数收敛。

当 $|z|>1$ 时，$\lim_{n\to\infty}S_n$ 不存在，级数发散。

当 $z=1$ 时，$\lim_{n\to\infty}S_n=0,$ 级数收敛。

当 $z=-1$ 时，$\lim_{n\to\infty}S_n$ 不存在，级数发散。

6．证明 $\sum_{n=1}^{\infty}z^{-n}$ 在 $|z|>1$ 内解析。

证：当 $|z|>1$ 时，显然 $z\neq 0$，令 $w=\dfrac{1}{z}$，则

$\sum_{n=1}^{\infty}z^{-n}=\sum_{n=1}^{\infty}w^{n}$，此级数在 $|w|<1$ 是收敛的。

故在 $|w|<1$ 是解析的，此即 $\left|\dfrac{1}{z}\right|<1$，亦即在

$|z|>1$ 内，$\sum_{n=1}^{\infty}z^{-n}$ 解析。

*7. 思考题

（1）如何判定级数的绝对收敛性与收敛性？

答：由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$ 的各项都为非负实数，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 的绝对收敛性可依正项级数的定理判定之。又由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 可表示为 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+i\sum_{n=1}^{\infty}b_n$，其中 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 均为数项级数，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 的收敛性可依赖于数项级数的定理判定之。

（2）判定级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛的必要条件是什么？$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 绝对收敛的充要条件又是什么？

答：如同实级数一样，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛的必要条件是 $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0;$ 而 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 绝对收敛的充要条件是 $\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Re}\, a_n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Im}\, a_n$ 都是绝对收敛级数。

（3）为什么说函数能展为幂级数与函数为解析函数是等价的？

答：因为在收敛圆内，幂级数的和函数是解析函数。同时，在某点邻域内解析的函数在其邻域内必然可以展成幂级数。

练　习　八

1．求下列函数在指定点 z_0 处的 Taylor 展式。

（1）$\frac{1}{4-3z}, z_0=1+i$

解：$f(z)$ 只有一个奇点 $z=\frac{4}{3}$，其收敛半径为 $R=\left|\frac{4}{3}-1-i\right|=\frac{\sqrt{10}}{3}$

则 $\frac{1}{4-3z}=\frac{1}{1-3i-3(z-1-i)}=\frac{1}{1-3i}=\frac{1}{1-\frac{3}{1-3i}(z-1-i)}$

$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{(1-3i)^{n+1}}[z-(1+i)]^n$，$|z-(1+i)|<\frac{\sqrt{10}}{3}$

（2）$\sin z, z_0=1$

解：$\sin z=\sin(z-1+1)=\sin(z-1)\cos 1+\sin 1\cos(z-1)$

$$=\cos 1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-1)^{2n+1}}{(2n+1)!}+\sin 1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-1)^{2n}}{2n!}$$

或：$(\sin z)^{(n)}=\sin(z+n\cdot\frac{\pi}{2})$　，$(\sin z)^{(n)}\Big|_{z=1}=\sin(1+n\cdot\frac{\pi}{2})$

故 $\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sin(\frac{n\pi}{2}+1)(z-1)^n, |z-1|<\infty$

2．将下列各函数在指定圆环域内展为 Laurent 级数。

（1）$z^2e^{\frac{1}{z}}$，$0<|z|<\infty$

解：$z^2e^{\frac{1}{z}}=z^2(1+\frac{1}{z}+\frac{z^{-2}}{2!}+\cdots)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{-n+2}}{n!}$　。

（2）$\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}, 1<|z|<2$

解：奇点为 $z=2,\pm i$，故可在 $1<|z|<2$ 中展开为洛朗级数。

$$\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}=\frac{1}{z-2}-\frac{2}{z^2+1}=-\frac{1}{2(1-\frac{z}{2})}-\frac{2}{z^2(1+\frac{1}{z^2})}$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{2})^n-\frac{2}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{z^2})^n$$

3．将 $\frac{1}{(z^2+1)^2}$，在 $z=i$ 的去心邻域内展为 $Laurent$ 级数。

解：因 $\frac{1}{z+1}=\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{1+\frac{z-i}{2i}}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-i)^n}{(2i)^{n+1}}$

所以 $\frac{1}{(z^2+1)^2}=\frac{1}{(z-i)^2}\frac{1}{(z+i)^2}=\frac{1}{(z-i)^2}(\frac{-1}{(z+i)})'=\sum_{n=0}^{\infty}n\frac{(z-i)^{n-3}}{2^{n+1}}i^{n-1}$。

4．证明在 $f(z)=\cos(z+\frac{1}{z})$ 以 z 的各幂表出的 Lanrent 展开式中的各系数为：

$$C_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(2\cos\theta)\cos n\theta d\theta, n=0,\pm1,\cdots\cdots$$

提示：令 C 为单位圆 $|z|=1$，在 C 上取积分变量 $z=e^{i\theta}$，则 $z+\frac{1}{z}=2\cos\theta, dz=ie^{i\theta}d\theta$。

证明：$f(z)$ 在 $0<|z|<1$ 上解析，令 $c:|z|=1$

在 c 上取 $z=e^{i\theta}$ 则 $z+\frac{1}{z}=2\cos\theta \quad dz=ie^{j\theta}d\theta$

$$\therefore C_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_c\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{\cos(2\cos\theta)}{e^{(n+1)i\theta}}ie^{i\theta}d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(2\cos\theta)\cos n\theta d\theta-\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(2\cos\theta)\sin\theta d\theta$$

而 $\int_0^{2\pi}\cos(2\cos\theta)\sin n\theta d\theta=0$

$$\therefore c_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(2\cos\theta)\cos n\theta d\theta$$

*5. **思考题**

（1）实变函数中函数展成 Taylor 级数和复变量函数中函数展开为 Taylor 级数的条件有什么不同？

答：在实变量函数的情形下，即使 $f(x)$ 的各阶导数都存在，欲把函数展开成幂级数也未必可能。这是因为在实变量函数里，函数 $f(x)$ 展开成 Taylor 级数的条件既要求 $f(x)$ 具有各阶导函数，还要求所展成的 Taylor 级数的余项趋向于零，对于一个具体的函数来说，要证明其各阶导数都存在，已不容易，要证明其级数的余项趋近于零就更困难了。而对复变函数来讲，只要函数在 z_0 的邻域内处处解析，不仅有一阶导数，且有各阶导数。而实函数的可导性不能保证导数的连续性，因而不能保证高阶导数的存在。

（2）确定 $f(z)$ 的 Taylor 级数的收敛半径时，应注意什么？奇点为什么在收敛圆周上？

答：一般地，$f(z)$ 在解析区域 D 内一点 z_0 的 Taylor 级数的收敛半径，等于 z_0 到 D 的边界上各点的最短距离。但 $f(z)$ 在 D 内有奇点时，$R=|\alpha-z_0|,\alpha$ 是 $f(z)$ 的距 z_0 最近的一个奇点。因此，在确定 $f(z)$ 的 Taylor 级数的收敛半径时，要确定 $f(z)$ 在 D 内有无奇点，并找出距 z_0 距离最近的一个奇点。

奇点总是落在收敛圆周上，因为若在收敛圆内，则在圆内出现 $f(z)$ 的不解析点；若在圆外，则收敛圆还可扩大。

（3）Laurent 级数与 Taylor 级数有何关系？

答：Laurent 级数与 Taylor 级数的关系是：当已给函数 $f(z)$ 在点 z_0 处解析时，中心在 z_0，半径等于由 z_0 到函数 $f(z)$ 的最近奇点的距离的那个圆域可以看成圆环域的特殊情形。在其中就可以作出罗伦级数展开式，根据柯西积分定理，这个展式的所有系数 $C_{-n}(n=1,2,\cdots)$ 都等于零。在此情形下，计算罗伦级数的系数公式与 Taylor 级数的系数公式相同，所以罗伦级数就转化为 Taylor 级数。因此，Taylor 级数是罗伦级数的特殊情形。

练　习　九

1．找出下列各函数的所有零点，并指明其阶数。

（1） $\dfrac{z^2+9}{z^4}$

解：$\dfrac{z^2+9}{z^4}=(z+3i)(z-3i)\dfrac{1}{z^4}$，所以

$z=\pm 3i$ 为一阶零点

（2） $z^2(e^{z^2}-1)$

解：（法一）令 $f(z)=z^2(e^{z^2}-1)$ 则 $f(z)\Big|_{z=\sqrt{2k\pi i}}=0$

$$f'(z)=(2z+2z^3)e^{z^2}-2z$$

$$f''(z)=(2+6z^2)e^{z^2}+(2z+2z^3)2ze^{z^2}-2$$

$$f'(z)\Big|_{z=0}=0,f'(z)\Big|_{z=\sqrt{2k\pi i}}\neq 0,(k\neq 0)$$

$$f''(z)\Big|_{z=0}=0$$

$$f'''(z)=12ze^{z^2}+12z^3e^{z^2}+c8z+12z^3)e^{z^2}+(4z^2+4z^3)2ze^{z^2}$$

$$f'''(z)\Big|_{z=0}=0$$

$$f^{(4)}(z)=12e^{z^2}+24e^{z^2}+e^{z^2}+36z^2e^{z^2}+24z^2e^{z^2}+(8+36z^2)e^{z^2}+(8z+12z^3)2ze^{z^3}+$$
$$(16z+32z^3e^{z^3}+(8z^3+8z^4)e^{z^2}\cdot 2z$$

$$f^{(4)}(z)\Big|_{z=0}=20\neq 0$$

$\therefore z=0$ 为 4 阶零点 $\quad z=\sqrt{2k\pi i}(k\neq 0)$ 为一阶零点。

（法二）

令 $f(z)=z^2(e^{z^2}-1)$

$$=z^2(1+\frac{z^2}{1!}+\frac{z^4}{2!}+\cdots+\frac{z^{2n}}{n!}+\cdots-1)$$

$$=z^4(1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{3!}+\cdots+\frac{z^{2n-2}}{n!}+\cdots)$$

$z=0$为 4 阶零点。

$z=\sqrt{2k\pi i}$为 1 阶零点。

（3）$f(z)=6\sin z^3+z^3(z^6-6)$，问$z=0$是$f(z)$的几阶零点。

解：$f(z)=6\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(z^{2n-1})3}{(2n-1)!}+z^9-6z^3$

$$=6(z^3-\frac{z^9}{3!}+\frac{z^{15}}{5!}-\frac{z^{21}}{7!}+\cdots)+z^9-6z^3$$

$$=\frac{6}{5!}z^{15}-\frac{6}{7!}z^{21}+\cdots$$

$$=z^{15}(\frac{6}{5!}-\frac{6}{7!}z^6+\cdots)$$

$\therefore z=0$是$f(z)$的 15 阶零点。

2．下列各函数有哪些奇点？各属何类型（若是极点，指明它的阶数）。

（1）$\frac{tg(z-1)}{z-1}$

解：$\frac{tg(z-1)}{z-1}=\frac{\sin(z-1)}{(z-1)\cos(z-1)}$

$\lim\limits_{z\to1}\frac{tg(z-1)}{z-1}=1$ $\therefore z=1$为可去奇点，$z-1=k\pi+\frac{\pi}{2},z=k\pi+\frac{\pi}{2}+1$是简单极点。

（2）$\frac{1}{e^z-1}-\frac{1}{z}$

解：$\frac{1}{e^z-1}-\frac{1}{z}=\frac{z-e^z+1}{z(e^z-1)}$，令$z(e^z-1)=0$，得$z=0,z=2k\pi i$，$k=\pm1,\pm2,\cdots$

而 $\lim\limits_{z\to0}(\frac{1}{e^z-1}-\frac{1}{z})=\lim\limits_{z\to0}\frac{z-e^z+1}{(e^z-1)z}=\lim\limits_{z\to0}\frac{1-e^z}{e^z-1+ze^z}$

$$=\lim_{z\to0}\frac{-e^z}{e^z+e^z+ze^z}=-\frac{1}{2}$$ $\therefore z=0$为可去奇点

当 $z=2k\pi i$ 时，$(k\neq 0), z-e^{z}+1\neq 0$

而 $\left[(e^{z}-1)z\right]'\Big|_{z=2k\pi i}=e^{z}-1+ze^{z}\Big|_{z=2k\pi i}\neq 0$ $\qquad\therefore z=2k\pi i$ 为一阶极点

（3）$e^{\frac{1}{z-1}}$

解：$e^{\frac{1}{z-1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\frac{1}{z-1})^{n}$ ，$\qquad\therefore z=1$ 为本性奇点

（4）$\dfrac{1}{\sin z+\cos z}$

解：$\dfrac{1}{\sin z+\cos z}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\sin(z+\frac{\pi}{4})}$， $\quad z=k\pi-\dfrac{k}{4}$ 时为 1 阶极点。

（5）$\dfrac{\sin z}{z^{3}}$

解：$z=0$ 为奇点

$$\frac{\sin z}{z^{3}}=\frac{1}{z^{3}}(z-\frac{z^{3}}{3!}+\frac{z^{5}}{5!}+\cdots)=\frac{1}{z^{2}}(1-\frac{z^{2}}{3!}+\frac{z^{4}}{5!}-\cdots)$$

$$=\frac{1}{z^{2}}\sum_{n=0}(-1)^{n}\frac{z^{2n}}{(2n+1)!}$$

$\therefore z=0$ 为二阶极点

（6）$\dfrac{1}{z^{2}(e^{z}-1)}$

解：$z=0, z=2k\pi i$ 为奇点

而 $(e^{z}-1)z^{2}=z^{2}(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n}}{n!}-1)$

$$=z^{2}(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n}}{n!})=z^{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{n!}$$

$\therefore z=0$ 为三阶极点 $\qquad z=2k\pi i$ 为简单极点

3．若 $f(z)$ 与 $g(z)$ 是以 z_0 为零点的两个不恒为零的解析函数，则

$\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)}=\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f'(z)}{g'(z)}$ （或两端均为∞）。

证明：$f(z_0)=g(z_0)$，且$f(z)\equiv 0$，$g(z)\equiv 0, f(z), g(z)$是解析函数

则$f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$ 其中$\varphi(z),\psi(z)$为解析函数

$g(z)=(z-z_0)n\psi(z)$ 且$\varphi(z_0)\neq 0,\psi(z_0)\neq 0, m,n$各为某一正整数

$$\therefore \frac{f(z)}{g(z)}=(z-z_0)^{m-n}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$$

$$\therefore \frac{f'(z)}{g'(z)}=\frac{m(z-z_0)^{m-1}\varphi(z)+(z-z_0)^m\varphi'(z)}{m(z-z_0)n-1\psi(z)+(z-z0)n\psi'(z)}=(z-z_0)^{m-n}\frac{m\varphi(z)+(z-z_0)\varphi'(z)}{n\psi(z)+(z-z_0)\psi(z)}.$$

$$\lim_{z-z_0}\frac{f'(z)}{g'(z)}=\lim_{z-z_0}(z-z_0)^{m-n}\frac{m\varphi(z)+(z-z_0)\varphi'(z)}{n\psi(z)+(z-z_0)\psi'(z)}$$

（1） 若$m>n$，则$\lim\limits_{z-z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)}=0$ $\lim\limits_{z-z_0}\dfrac{f'(z)}{g'(z)}=0.$

(2) 若$m=n$，则$\lim\limits_{z-z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)}=\dfrac{\varphi(z_0)}{\psi(z_0)}$ $\lim\limits_{z-z_0}\dfrac{f'(z)}{g'(z)}=\dfrac{\varphi(z_0)}{\psi(z_0)}$

(3) 若$m<n$，$\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)}=\infty$ $\lim\limits_{z-z_0}\dfrac{f'(z)}{g'(z)}=\infty$， 故$\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)}=\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f'(z)}{g'(z)}.$

4．问∞是否为下列各函数的孤立奇点？

（1） $\dfrac{\sin z}{1+z^2+z^3}$

解：令$f(z)=\dfrac{\sin z}{1+z^2+z^3}$

$f(z)$在除$1+z^2+z^3=0$的根的内解析，而根为有限个。

所以 $z=\infty$是$f(z)$的孤立奇点，$\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=0$

（2） $\dfrac{1}{e^z-1}$

解：令$f(z)=\dfrac{1}{e^z-1}$

$f(z)$在$e^z-1=0$即$z=2k\pi i(k=\pm1,\pm2,\cdots)$上不解析

$\therefore z=\infty$不是$f(z)$的孤立奇点。

5．思考题

（1）解析函数的零点、极点、多项式的根及使有理函数的分母为零的点有什么关系？

答：若z_0为$f(z)$的m级零点，则

$$f(z)=C_m(z-z_0)^m+C_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+\cdots,C_m\neq 0.$$

它是多项式的m重根的推广。因为当多项式展为 Taylor 级数时，只有有限多项，而现在有无穷多项。

若z_0为$f(z)$的m级极点，则

$$f(z)=C_{-m}(z-z_0)^{-m}+C_{-m+1}(z-z_0)^{-m+1}$$
$$+\cdots+C_{-1}(z-z_0)+\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n,C_{-m}\neq 0.$$

它是有理函数的分母在$z=z_0$有m重零点的推广。当有理函数在$z=z_0$展成部分分式时也有以上形式。

（2）怎样确定极点的级？

答：1）若$f(z)=g(z)/(z-z_0)^m$，而$g(z)$在$|z-z_0|<\delta$内解析且$g(z_0)\neq 0$，则z_0是$f(z)$的m级极点。或$\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)^m\cdot f(z)=C_{-m}(C_{-m}\neq 0,m\geq 1)$，则$z_0$是$f(z)$的$m$级极点。

2）若$f(z)=P(z)/Q(z),z_0$是$P(z)$的k级零点，是$Q(z)$的m级零点。则

当$k>m$时，z_0为$f(z)$的$k-m$级零点。

当$m>k$时，z_0为$f(z)$的$m-k$级极点。

3）若$f(z)=1/Q(z),z_0$是$Q(z)$的m级零点，则z_0是$f(z)$的m级极点。

（3）怎样来确定∞点函数的性态？

答：若函数$f(z)$在∞点的去心邻域$R<|z|<+\infty$ 内解析，当点∞为$f(z)$的孤立奇点时，我们可以作变换$t=1/z$，则变换把扩充复平面的∞点映射成t平面上的点$t=0$，扩充复平面

上∞点的去心邻域变为t平面上原点的去心邻域$0<|t|<1/R$。而$f(z)=f(1/t)=\varphi(t)$。从而把在$R<|z|<+\infty$内对$f(z)$的研究，化为在$0<|t|<1/R$内对$\varphi(t)$的研究，因为$f(z)$在$R<|z|<+\infty$内解析，所以$\varphi(t)$在$0<|t|<1/R$内解析，$t=0$为$\varphi(t)$孤立奇点。

我们规定，如果$t=0$是$\varphi(t)$可去奇点、m级极点或本性奇点，则称$z=\infty$是$f(z)$可去奇点、m级极点或本性奇点。

练　习　十

1．求下列函数在指定点处的留数。

（1）$\dfrac{1}{(z-1)(z+1)}$，$z=\pm 1$

解：$\operatorname{Res}[f(z),1]=\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{(z-1)}{(z-1)(z+1)^2}=\dfrac{1}{4}$　　（$z=1$ 是简单极点）

$$\operatorname{Res}[f(z),-1]=\lim_{z\to -1}\frac{1}{(2-1)!}\frac{d}{dz}[(z+1)^2\cdot\frac{1}{(z-1)(z+1)^2}]$$

$$=-\frac{1}{(z-1)^2}\bigg|_{z=-1}=-\frac{1}{4}$$

（2）$\dfrac{1-e^{2z}}{z^4}$，$z=0$

解：令 $\varphi(z)=1-e^{2z}$ 则 $\varphi(0)=0,\varphi'(z)=-2e^{2z},\varphi'(0)=-2\neq 0$

$\therefore z=0$ 为三阶极点

$$\frac{1-e^{2z}}{z^4}=\frac{-1}{z^4}[\frac{2z}{1!}+\frac{(2z)^2}{2!}+\frac{(2z)^3}{3!}+\cdots+\frac{(2z)^n}{n!}\cdots],$$

$\therefore \operatorname{Res}[f(z),0]=-\dfrac{4}{3}$

2．求下列函数在孤立奇点处的留数。

（1）$\dfrac{\sin 2z}{(z+1)^3}$

解：$z=-1$ 是 $f(z)=\dfrac{\sin 2z}{(z+1)^3}$ 的三级极点

$$\operatorname{Res}[f(z),-1]=\lim_{z\to -1}\frac{1}{(3-1)!}\frac{d^2}{dz^2}[(z+1)^3\cdot\frac{\sin 2z}{(z+1)^3}]$$

$$=-2\sin 2z\big|_{z=-1}=2\sin 2$$

（2）$\dfrac{1}{z\sin z}$

解：$z=0$ 是 $f(z)=\dfrac{1}{z\sin z}$ 的二级极点，$z=k\pi(k\neq 0$ 为整数）是 $f(z)$ 的简单极点

$$\mathrm{Re}\,s[f(z),0]=\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}[z^2\cdot\frac{1}{2\sin z}]=0$$

$$\mathrm{Re}\,s[f(z),k\pi]=\lim_{z\to k\pi}\frac{z-k\pi}{z\sin z}=\frac{1}{k\pi}\lim_{z\to k\pi}\frac{z-k\pi}{\sin z}=\frac{1}{k\pi}\cdot\frac{1}{\cos k\pi}=(-1)^k\frac{1}{k\pi}$$

（3）$\dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}$

解：$\mathrm{Re}\,s[f(z),1]=\lim_{z\to 1}(z-1)\cdot\dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}=-e$

$$\mathrm{Re}\,s[f(z),0]=\frac{1}{1\,!}+\frac{1}{2\,!}+\frac{1}{3\,!}+\cdots+\frac{1}{n\,!}+\cdots=e-1$$

$$\left[\begin{array}{l} e^{\frac{1}{z}}=1+\dfrac{1}{1\,!z}+\dfrac{1}{2\,!z^2}+\cdots+\dfrac{1}{n\,!z^n}+\cdots \\ \dfrac{1}{1-z}=1+z+z^2+\cdots \qquad |z|<1 \end{array}\right]$$

（4）$e^{z+\frac{1}{z}}$

解：$e^{z+\frac{1}{z}}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(z+\frac{1}{z})^n=1+(z+\frac{1}{z})+\frac{1}{2!}(z+\frac{1}{z})^2+\cdots$

而$\dfrac{1}{z}$的系数为 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}\begin{bmatrix}2k+1\\k\end{bmatrix}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\,\frac{1}{(k+1)!}$

3．判定$z=\infty$是下列函数的什么奇点，并求出在∞的留数。

（1）$z+\dfrac{1}{z}$

解：$z+\dfrac{1}{z}$在无穷远点的领域 $0<|z|<+\infty$ 内解析，所以$z=\infty$是它的弧立奇点且为一级极点

$$\mathrm{Re}\,s[f(z),\infty]=-1$$

（2）$\sin z-\cos z$

解：$\sin z-\cos z$在全平面解析，$\therefore z=\infty$是该函数的孤立奇点

$$\sin z-\cos z=[z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots]$$

$$-[1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\cdots]$$

$\therefore \mathrm{Re}\,s[f(z,\infty)]=0$　　$z=\infty$是本性奇点

4．利用留数计算下列复积分

（1）$\oint_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2} dz$

解：在$|z|=\frac{3}{2}$的内部仅含奇点$z=1$，且为一阶极点

而$\mathrm{Res}[f(z),1]=\lim_{z\to 1}\frac{e^z}{(z+3)^2}=\frac{e}{16}$

所以$\oint_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2} dz = 2\pi\, i\cdot\frac{e}{16}=\frac{1}{8}\pi\, ie$

（2）$\oint_{|z|=1}\frac{dz}{(z-a)^n(z-b)^n}$　(n为整数$,|a|\neq 1,|b|\neq 1,|a|<|b|$)

解：①当$|a|<|b|<1$时$, z=a, z=b$均为$|z|=1$内的n阶极点

$$\mathrm{Res}[f(z),a]=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\frac{1}{(z-b)^n}=\frac{1}{(n-1)!}\cdot\frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{(n-1)!(a-b)^{2n-1}}$$

$$\mathrm{Res}[f(z),b]=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to b}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\frac{1}{(z-a)^n}=\frac{1}{(n-1)!}\cdot\frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{(n-1)!(b-a)^{2n-1}}$$

原式= 0

②$|a|<1<|b|$时$,$原式$=\frac{2\pi(2n-2)!\,i(-1)^{n-1}}{[(n-1)!]^2(a-b)^{2n-1}}$

③当$1<|a|<|b|$时，积分为 0。

（3）$\oint_{|z|=3}\frac{z^{15}}{(z^3+1)^2(z^4+2)^3}dz$

解：$z=\pm i,\ z=\sqrt[4]{2}[\cos\frac{\pi+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}],\ (k=0,1,2,3)$

$$\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-\mathrm{Res}[f(\frac{1}{z})\cdot\frac{1}{z^2},0]=-\mathrm{Res}[\frac{1}{z(1+z^2)^3(1+2z^4)^3},0]$$

$$=-\lim_{z\to 0}\frac{1}{(1+z^2)^3(1+2z^4)^3}=-1$$

∴ 原式= $2\pi i$

*5．思考题

（1）留数的各种求法的理论根据是什么？

答：留数的各种求法的理论根据是留数定理。它把求沿封闭曲线 C 的积分，转化为求被积函数在 C 内各孤立奇点的留数。而一般地求函数在孤立奇点 z_0 处的留数只需求出 z_0 的圆环域中罗朗级数的系数 C_{-1} 就可以了。对于孤立奇点的不同类型，C_{-1} 的求法不同，有不同的计算规则。

（2）有限可去奇点的留数为 0，当 ∞ 为函数 $f(z)$ 的可去奇点时，留数是否一定为 0?

答：否。如 $f(z)=1/z, \infty$ 点为可去奇点，但 $\operatorname{Re}s[f(z),\infty]=-1$；而 $f(z)=1/z^2$，$\operatorname{Re}s[f(z),\infty]=0$。可见当 ∞ 为 $f(z)$ 的可去奇点时，留数不一定为零，这与有限可去奇点留数必为零不同。

练　习　十　一

利用留数求下列定积分。

1．$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+\cos\theta}\qquad (a>1)$

解：令 $z=e^{i\theta}$, 则 $\cos\theta=\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$

$$\therefore \text{原式}=\oint_{|z|=1}\frac{1}{a+\frac{z^2+1}{2z}}\cdot\frac{1}{iz}dz=\oint_{|z|=1}\frac{-2i}{2az+z^2+1}dz$$

$a>1$ 时被积函数的二个极点中只有 $z=-a+\sqrt{a^2-1}$ 在圆周 $|z|=1$ 内

$$\mathrm{Re}\,s[f(z),-a+\sqrt{a^2+1}]=\lim_{z\to -a+\sqrt{a^2+1}}\frac{-2i}{z+a+\sqrt{a^2-1}}=\frac{-i}{\sqrt{a^2-1}}$$

$$\therefore \text{原式}=2\pi i\cdot\frac{-i}{\sqrt{a^2-1}}=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

2．$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{a+\cos^2\theta}\qquad (a>0)$

解：$I=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{a^2+\cos^2\theta}=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2d\theta}{2a^2+\cos 2\theta+1}$

$$\underline{\underline{\text{令}t=2\theta}}\ \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dt}{2a^2+\cos t+1}$$

令 $z=e^{it}$, 则 $\cos t=\frac{z^2+1}{2z},\qquad dt=\frac{1}{iz}dz$

$$I=\frac{1}{2}\oint_{|z|=1}\frac{1}{2a^2+\frac{z^2+1}{2z}+1}\cdot\frac{1}{iz}dz=\frac{1}{2}\oint_{|z|=1}\frac{-2idz}{[z^2+(4a^2+2)z+1]}$$

分母 $=0\Rightarrow z=-1-2a^2\pm 2a\sqrt{a^2+1}$

$$\therefore I=-i\cdot 2\pi i\,\mathrm{Re}\,s[f(z),-1-2a+2a\sqrt{a^2+1}]=\frac{\pi}{2a\sqrt{a^2+1}}$$

3．$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{x^4+x^2+1}dx$

解：这里$P(z)=z^2$，$Q(z)=z^4+z^2+1$, $Q(x)$在实轴上无零点，积分存在。

$$Q(z)=(z^2+1)^2-z^2=(z^2+z+1)(z^2-z+1)$$

$R(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$有四个简单极点：$\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2},\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$，上半平面只包含$\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2},\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$

$$\operatorname{Re}s\left[R(z),\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right]=\lim_{z\to\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}}\frac{z^2}{(z^2-z+1)(z-\frac{-1-\sqrt{3}i}{2})}=-\frac{i+\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{Re}s\left[R(z),\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right]=\lim_{z\to\frac{1+\sqrt{3}i}{2}}\frac{z^2}{(z^2+z+1)(z-\frac{1+\sqrt{3}i}{2})}=-\frac{i-\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}$$

故$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+x^2+1}dx=2\pi i\left\{-\frac{i+\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}-\frac{i-\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}\right\}=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$

4．$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^3}dx$

解：原式$\displaystyle=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^3}dx$

而$f(z)=\dfrac{1}{(1+z^2)^3}$在上半平面只有一个极点，$z=i$，为3阶极点。

所以$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^3}dx=\frac{1}{2}\cdot 2\pi i\operatorname{Re}s[f(z),i]=\pi i\cdot\frac{1}{2}\lim_{z\to i}\frac{d^2[\frac{1}{(z+i)^3}]}{dz^2}$

$$=\frac{1}{2}\pi i\cdot\frac{1^2}{2^5\cdot i^5}=\frac{3\pi}{16}$$

5．$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+9}dx$

解：原式$\displaystyle=\operatorname{Re}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+9}dx$

而$\dfrac{1}{z^2+9}$在上半平面只有简单极点：$z=3i$

所以$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+9}dx=2\pi i\cdot\mathrm{Re}\,s[\frac{e^{iz}}{z^2+9},3i]=2\pi i\cdot\lim\limits_{z\to 3i}(z-3i)\cdot\frac{e^{iz}}{z^2+9}\Big|_{z\to 3i}=\frac{\pi e^{-3}}{3}$

即$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+9}dx=\frac{\pi}{3}e^{-3}$

6．$\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\beta x}{(x^2+b^2)^2}dx \qquad (\beta>0,b>0)$

解：原式$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin\beta x}{(x^2+b^2)^2}dx=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{i\beta x}}{(x^2+b^2)^2}dx$

令$f(z)=\frac{z\cdot e^{i\beta z}}{(z^2+b^2)^2}$　而$f(z)$有两个二级极点，其中$z=bi$在上半平面。

所以 $\mathrm{Re}\,s[f(z),bi]=\lim\limits_{z\to bi}\left(\frac{ze^{i\beta z}}{(z^2+b^2)^2}(z-bi)^2\right)=\frac{\beta e^{-b\beta}}{4b}$

$\therefore\int_0^{\infty}\frac{x\sin\beta x}{(x^2+b^{2)}}dx=\frac{1}{2}\mathrm{Im}[2\pi i\,\mathrm{Re}\,s(f(z)\cdot bi)]=\frac{1}{2}\mathrm{Im}[2\pi i\frac{\beta e^{-b\beta}}{4b}]$

$=\frac{\beta\pi e^{-\beta b}}{4b}$

*7．思考题

1．利用留数计算定积分要注意哪些问题?

答：由于留数是与求封闭曲线 C 上的复积分联系在一起的，而定积分的积分区间是实轴上的某一有限或无限线段。因此，首先要解决的是将实定积分的积分区间拓展为闭曲线，这可以用代换（如$\int_0^{2\pi}R(\cos\theta,\sin\theta)d\theta$型）或添加辅助曲线并辅以极限概念（如$\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)dx$型）来完成。其次，定积分的被积函数必须与某个解析函数有关，这一点不难办到，因为被积函数通常为初等函数，而初等函数一般都可以推广到复数域中。

练 习 十 二

1．一个解析函数所构成的映射在什么条件下具有伸缩和旋转角的不变性？映射 $w=z^2$ 在z平面上处处都具有这个性质吗？

解：当解析函数 $f(z)$，满足 $f'(z)\neq 0$ 时，具有伸缩和旋转不变性

$w=z^2$, 则 $w'=2z$, 当$z\neq 0$时, 有$w\neq 0$，因而只有当 $z\neq 0$ 时，映射

$w=z^2$ 具有伸缩和旋转不变性。

2．求 $f(z)=z^3$ 在下列各点处的导数值，并根据导数的几何意义解释这些结果。

（1） $z_1=i$；　　（2） $z_2=1-i$；　　（3） $z_3=0$

解： $f'(z)=3z^2$

（1）当 $z_1=i$ 时, $|f'(z_1)|=3$， $\arg f'(z_1)=\pi$ 映射 $f(z)=z^3$ 在 $z=i$ 处具有保解性且伸缩率不变，伸缩率为3，旋转角为π。

（2） $z_2=1-i$ 时, $|f(z_2)|=6$， $\arg f'(z_2)=-\dfrac{\pi}{2}$ 映射 $f(z)=z^3$ 在 $z=1-i$ 处具有保角性且伸缩率不变，伸缩率为6，旋转角为$-\dfrac{\pi}{2}$。

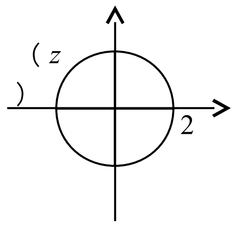
（3） $z_3=0$ 时, $|f'(z_3)|=0, \arg f'(z_3)=0$ 且映射 $f(z)=z$ 在 $z=0$ 处不具有保角性。

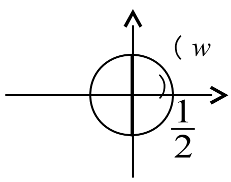
3．在映射 $w=\dfrac{1}{z}$ 下，求下列曲线的像。

（1） $x^2+y^2=4$

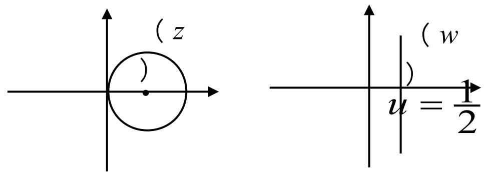
解： $w=\dfrac{1}{z}\Rightarrow z=\dfrac{1}{w}=\dfrac{u-iv}{u^2+v^2}\Rightarrow x=\dfrac{u}{u^2+v^2}$， $y=\dfrac{-v}{u^2+v^2}$

$x^2+y^2=4\Rightarrow u^2+v^2=(\dfrac{1}{2})^2$





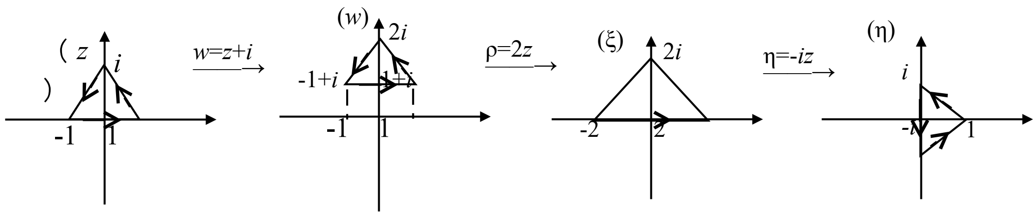
（2）$(x-1)^2+y^2=1$



解：$x=\dfrac{u}{u^2+v^2}$，$y=\dfrac{-v}{u^2+v^2}$

$$(x-1)^2+y^2=1 \Rightarrow u=\frac{1}{2}$$

4．一个以 $z_1=i, z_2=-1, z_3=1$ 为项点的三角形内部在映射 $w=z+i, \xi=2z, \eta=-iz$ 下分别变为怎样的区域。



*5．思考题

（1）为什么在论述导数的几何意义时，要假定 $f'(z_0)\neq 0$ 。

答：若在 z_0 处 $f'(x0)=0$，则 $\arg f'(z_0)$ 不确定。

（2）若 z_1 与 z_2 关于一圆周对称，在 $w=\dfrac{1}{z}$ 的映射下，它们的象在 w 平面上是否也关于某一圆周对称？若 z_1 与 z_2 关于某直线对称，在 $w=\dfrac{1}{z}$ 的映射下，它们的象在 w 平面上能否关于某圆周对称？

答：它们的象在 w 平面上关于某一圆周（将直线看作圆周）对称，可能关于某一圆周对称。

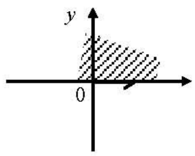
练　习　十　三

1．下列函数将下列区域映射成什么区域？

（1）$x>0,\ y>0,\ w=\dfrac{z-i}{z+i}$

解：（z）

法一：



$w=\dfrac{z-i}{z+i}$

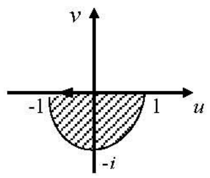
$\xrightarrow{\qquad\qquad}$

$z_1: 0\to -1$

$z_3: \infty\to 1$

$z_2: 1\to -i$

$z_4: i\to 0$



法二：$w=\dfrac{z-i}{z+i}\Rightarrow z=\dfrac{i(1+w)}{1-w}$

令 $z=x+iy,\ w=u+iv$

则 $x+iy=\dfrac{i(1-u^2-v^2)+2vi^2}{(1-u)^2+v^2}\Rightarrow y=\dfrac{1-u^2-v^2}{(1-u)^2+v^2},\ x=\dfrac{-2v}{(1-u)^2+v^2}$

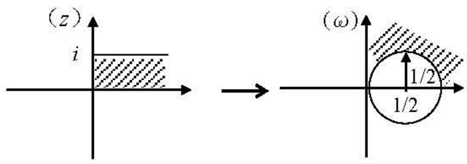
$\therefore x>0,\ y>0\Rightarrow u^2+v^2<1,\ v<0$

（2）$\operatorname{Re} z>0,\ 0<\operatorname{Im} z<1,\ w=\dfrac{i}{z}$

解：$z=\dfrac{i}{w}=\dfrac{i}{u+iv}=\dfrac{v+iu}{u^2+v^2}$

$\Rightarrow x=\dfrac{v}{u^2+v^2},\ y=\dfrac{u}{u^2+v^2}$

$\operatorname{Re} z>0\Leftrightarrow x>0\Rightarrow v>0$



$0<\operatorname{Im} z<1\Leftrightarrow 0<y<1\Rightarrow u>0,\ u<u^2+v^2[u>0\ (u-\dfrac{1}{2})^2+v^2>(\dfrac{1}{2})^2]$

2．求将点 $-1,\infty,i$ 分别依次映射为下列各点的分式线性映射。

（1）$i,1,1+i$

解：$\dfrac{z+1}{1}:\dfrac{i+1}{1}=\dfrac{w-1}{w-1}:\dfrac{1+i-i}{1+i-1}$

化简得　$w=\dfrac{z+i+2}{z-i+2}$

（2）$\infty,i,1$

解：$\dfrac{z+1}{1}:\dfrac{i+1}{1}=\dfrac{1}{w-i}:\dfrac{1}{1-i}$

$$w-i=\frac{-(i+1)(i-1)}{z+1},\quad \therefore w=\frac{iz+2+i}{z+1}$$

（3） $0,\infty,1$

解：$\dfrac{z+1}{1}:\dfrac{i+1}{1}=\dfrac{w}{i}:\dfrac{1}{1}$

$$w=\frac{z+1}{i+1}=\frac{(1-i)(z+1)}{2}=\frac{(1-i)z+(1-i)}{2}$$

3．求将上半平面 $\operatorname{Im} z>0$ 映射为单位圆内部 $|w|<1$ 的分式线性映射 $w=f(z)$，并满足条件：

（1） $f(i)=0,\ f(-1)=1$

解：$f(i)=0$, 有 $f(-i)=\infty$, 故有 $w=k\dfrac{z-i}{z+i}$

又 $f(-1)=1,\ \therefore 1=k\dfrac{-1-i}{-1+i}\Rightarrow k=-i$

$$w=-i\frac{z-i}{z+i}$$

（2） $f(1)=1,\ f(i)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

解：由 $f(i)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, 有 $f(-i)=\sqrt{5}$, 又 $\therefore f(1)=1$，由对应点公式可得

$$w=\frac{3z+(\sqrt{5}-2i)}{(\sqrt{5}-2i)z+3}$$

*4．思考题

（1）怎样判断一个圆周在经过分式线性映射后变成一个圆周还是变成一条直线？

答：观察在此圆周上是否存在一点，它经过分式线性映射后映到∞。

（2）分式线性映射有几个复参数？有几个实参数？有几种方法可以唯一地决定一个分式线性映射？

答：由 $w=\dfrac{az+b}{cz+d},\ ad-bc\neq 0$ 看出，它有三个独立的复参数，六个独立的实参数。有两种方法可以唯一地确定它：

1）给定三对对应点；

2）给定一个圆周映到另一个圆周，希望某一个点变到另一指定点（不在此圆周上），并且希望此点上一个方向映到象点上某一个方向。

练　习　十　四

1．求将$|z|<1$映射为$|w|<1$的分式线性映射$w=f(z)$，并满足：

（1）$f(\frac{1}{2})=0,\ \ f(-1)=1$

解：由$f(\frac{1}{2})=0,$ 知 $f(2)=\infty$

又$f(-1)=0$

由对应点公式可得$w=\dfrac{2z-1}{z-2}$

（2）$f(\frac{1}{2})=0,\ \ \arg f'(\frac{1}{2})=\frac{\pi}{2}$

解：由$f(\frac{1}{2})=0,$ 知 $f(2)=\infty$

故　$w=k-\dfrac{z-\frac{1}{2}}{z-2}$

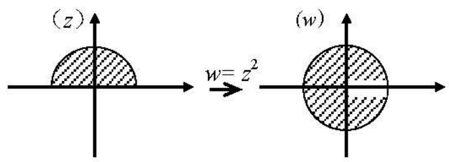
$$w'=k\frac{-\frac{3}{2}}{(z-2)^2},\ \ w'(\frac{1}{2})=-\frac{2}{3}k$$

$$\arg f'(\frac{1}{2})=\arg(-\frac{2}{3}k)=\frac{\pi}{2},\ \ \therefore k=ic\ \ (c<0)$$

$$\because |w|=1,\ \ \therefore k=-2i,\ \ w=-2i\frac{z-\frac{1}{2}}{z-2}=\frac{(2z-1)i}{2-z}$$

2．映射$w=z^2$将上半单位圆域：$|z|<1,\ \operatorname{Im}z>0$映射成什么区域？

解：



映射成$|w|<1$且沿内 0 到 1 的半径有割痕

3．求将下列各区域映到上半平面的保形映射。

（1）$|z+i|>\sqrt{2},\ |z-i|<\sqrt{2}$

解：先把c_1、c_2的交点－1 与 1 分别映射成ξ平面中的$\xi=0$与$\xi=\infty$，则有

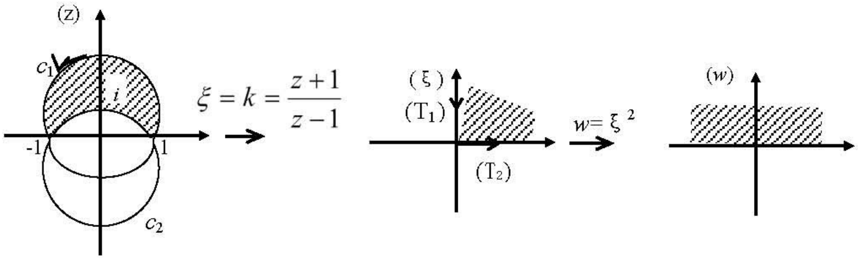
$$\xi = k(\frac{z+1}{z-1})$$

因两圆在－1 处所围的交角为$\dfrac{\pi}{2}$，根据保角性，圆弧 c_1、c_2 映射成交角为$\dfrac{\pi}{2}$的两直线。

c_2 上的点 $(0, \sqrt{2}-1)$ 使其映射到 ξ 平面上的正实轴上。

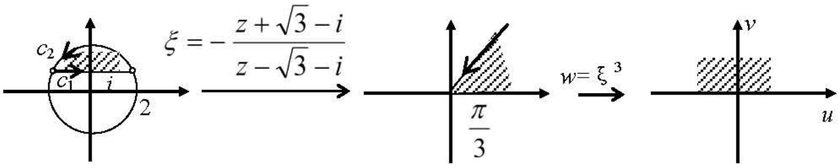
令 $k = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)$，则点 $(0, \sqrt{2-1})$ 映射到 ξ 平面上的点（1, 0）最后由映射 $w = \xi^2$ 将其定义上半平面。

$\therefore w = [k(\dfrac{z+1}{z-1})]^2 = -i(\dfrac{z+1}{z-1})^2$ $\qquad w = -i(\dfrac{z+1}{z-1})^2$



（2）$|z|<2,\ \mathrm{Im}z>1$

解：直线 $\mathrm{Im}z=1$ 与 $|z|=2$ 的交点为 $(-\sqrt{3}, 1)$ 和 $(\sqrt{3}, 1)$ 首先将点 $A(-\sqrt{3}, 1)$ 与点 $B(\sqrt{3}, 1)$ 分别映射为原点和无穷点，故有



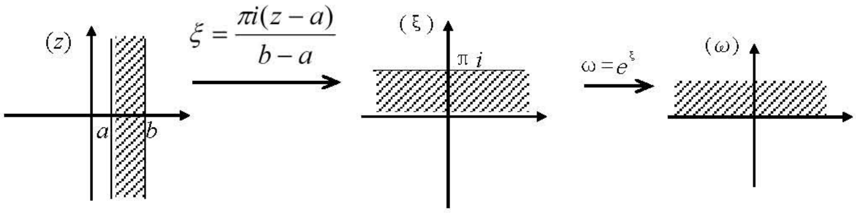
$$\xi = k\frac{z+\sqrt{3}-i}{z-\sqrt{3}-i}$$

c_1 与 c_2 的交角为$\dfrac{\pi}{3}$，为使点（0，1）映射正实轴上，可令 $k=-1$，则点（0，1）映射到 ξ 平面上（1，0）

最后由映射 $\qquad w = -[\dfrac{z+\sqrt{3}-i}{z-\sqrt{3}-i}]^3$

$w=\xi^3$ 将其映射成上半平面 $\qquad w = [\dfrac{z-\sqrt{3}-i}{z+\sqrt{3}-i}]^3$

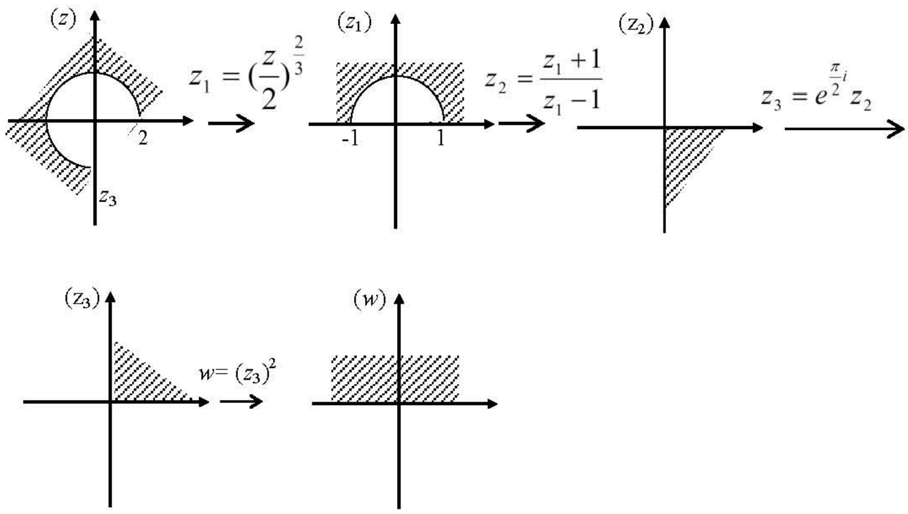
（3） $a < \operatorname{Re} z < b$



$$\omega = e^{\frac{\pi i}{b-a}(z-a)}$$

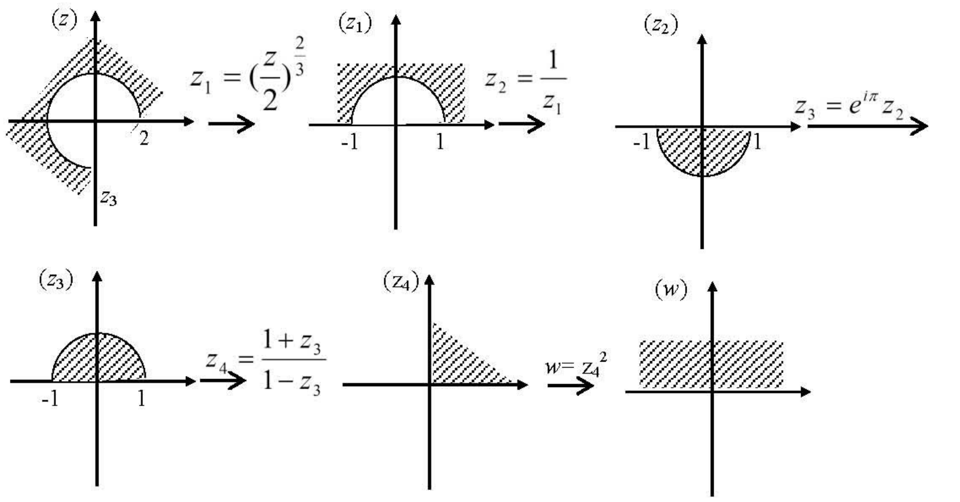
（4） $|z| > 2,\ 0 < \arg z < \dfrac{3\pi}{2}$ s

法一：



$$w = -\left(\frac{z^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{2}{3}}}{z^{\frac{2}{3}} - 2^{\frac{2}{3}}}\right)^2$$

法二：



故 $w=(\dfrac{z^{\frac{2}{3}}-2^{\frac{2}{3}}}{z^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{2}{3}}})^2$

*4．思考题

（1）幂函数所实现的映射有什么性质？它在什么地方实现保角映射？

答：它把以原点为顶点的角形域映射成以原点为顶点的角形域，但张角变成了原来的 n 倍，即把角形域映射成角形域。它在一阶导数不为零处，即 $z\neq 0$ 处实现保角映射。

（2）正整次幂函数将角形域变为角形域和分式线性函数将角形域变为角形域各自有什么特点？

答：正整次幂函数将角形域的“角度”扩大为另一角形域，而分式线性函数是将角形域“保角”的映为另一角形域。

（2）如何将带形区域保角映射为角形区域？

答：指数函数可以将带形区域映射为角形区域。

练　习　十　五

1．试求 $f(t)=|\sin t|$ 的离散频谱和它的傅里叶级数的复指数形式。

解：$\omega_0=\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac{2\pi}{\pi}=2$　　$c_0=F(0)=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(t)dt=\dfrac{2}{\pi}$

$$c_n=F(n\omega_0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt=-\frac{2}{\pi}\frac{1}{(4n^2-1)}\qquad(n=0,\pm1,\cdots)$$

$$\therefore f(t)=-\frac{2}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}e^{jn\omega_0 t}=-\frac{2}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}e^{j2nt\omega_o}$$

2．求下列函数的傅氏变换。

（1）$f(t)=\begin{cases}-1, & -1<t<0\\ 1, & 0<t<1\\ 0, & \text{其它};\end{cases}$

解：$\mathscr{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-1}^{0}-e^{-j\omega t}dt+\int_0^1 e^{-j\omega t}dt$

$$\underline{\underline{令t_1=-t}}\ -\int_0^1 e^{j\omega t_1}dt_1+\int_0^1 e^{-j\omega t}dt$$

$$=-\int_0^1 e^{j\omega t}dt+\int_0^1 e^{-j\omega t}dt=-2j\int_0^1\sin\omega t dt=2j\left.\frac{\cos\omega t}{\omega}\right|_0^1=2j(\frac{\cos\omega-1}{\omega})$$

（2）$f(t)=\begin{cases}e^t, & t\le 0\\ 0, & t>0\end{cases}$

解：$\mathscr{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{0}e^t e^{i\omega t}dt=\dfrac{1}{1-j\omega}$

3．设 $f(t)=\begin{cases}1, & |t|\le 1\\ 0, & |t|>1\end{cases}$，求 $f(z)$ 的傅氏变换，并推证：

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega\cos\omega t}{\omega}d\omega=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & |t|<1\\ \dfrac{\pi}{4}, & |t|=1\\ 0, & |t|>1\end{cases}$$

解：$\mathscr{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-1}^{1}e^{-i\omega t}dt=\frac{1}{j\omega}e^{-j\omega t}\Big|_{-1}^{1}=\frac{2}{\omega}\sin\omega$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\sin\omega}{\omega}e^{j\omega t}dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}\cos\omega td\omega=\begin{cases}1, & |t|>1\\ \frac{1}{2}, & |t|=1\\ 0, & |t|>1\end{cases}$$

$$故\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\omega\cos\omega t}{\omega}d\omega=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & |t|<1\\ \frac{\pi}{4}, & |t|=1\\ 0, & |t|>1\end{cases}$$

4．根据（8.4）式，推出函数$f(z)$的傅氏积分式的三角形式：

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)d\tau\right]d\omega$$

证：$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau\right]e^{j\omega t}d\omega$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)e^{-j\omega(t-\tau)}d\tau\right]d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)d\tau d\omega+j\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\sin\omega(t-\tau)d\tau d\omega\right]d\omega$$

考虑到积分$\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\sin\omega(t-\tau)d$是$\omega$的奇函数，就有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\sin\omega(t-\tau)d\tau\right]d\omega=0$$

又积分$\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)d\tau$是$\omega$的偶函数，故

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)d\tau\right]d\omega$$

练　习　十　六

1．求下列函数的傅氏变换。

（1）$\operatorname{sgn} t=\begin{cases}-1 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}$

解：设$\operatorname{sgn} t=2u(t)-1$，则

$$\mathscr{F}[\operatorname{sgn} t]=\mathscr{F}[2u(t)-1]=2\mathcal{F}[u(t)]-\mathcal{F}[1]$$

$$=2(\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega))-2\pi\delta(\omega)=\frac{2}{j\omega}$$

（2）$f(t)=\cos t\sin t$

解：$\mathscr{F}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos t\sin te^{-j\omega t}dt$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin 2te^{-j\omega t}dt$$

$$=\frac{\pi}{2}j[(\delta(\omega+2)-\delta(\omega-2))]$$

（3）$f(t)=\sin^3 t$

解：因$\sin^3 t=(\frac{e^{jt}-e^{-jt}}{2j})^3$

故有$\mathscr{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\sin^3 te^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{3jt}-3e^{jt}+3e^{-jt}-e^{-j3t}}{-8j}dt$

$$=\frac{\pi}{4}j[\delta(\omega-3)-3\delta(\omega-1)+3\delta(\omega+1)-\delta(\omega+3)]$$

2．已知$F(\omega)=\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$为函数$f(t)$的傅氏变换，求$f(t)$。

解：$F(\omega)=\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}[e^{-j(\omega-\omega_0)}+e^{-jt(c_0+\omega_0)}]dt$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-j\omega t}(e^{-j\omega t}+e^{jt\omega_0})dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\omega_0 te^{-j\omega t}dt=\mathcal{F}[F(t)]$$

所以$f(t)=\cos\omega_0 t$

3．求函数$f(t)=\frac{1}{2}[\delta(t+a)+\delta(t-a)+\delta(t+\frac{a}{2})+\delta(t-\frac{a}{2})]$的傅氏变换。

解：$F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}[\delta(t+a)+\delta(t-a)+\delta(t+\frac{a}{2})+\delta(t-\frac{a}{2})]e^{-j\omega t}dt$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left[e^{-j\omega t}\Big|_{t=-a}+e^{-j\omega t}\Big|_{t=a}+e^{-j\omega t}\Big|_{t=-\frac{a}{2}}+e^{-j\omega t}\Big|_{t=\frac{a}{2}}\right]$$

$$=\frac{1}{2}[e^{+j\omega a}+e^{-j\omega a}]+\frac{1}{2}[e^{+j\omega\cdot\frac{a}{2}}+e^{-j\omega\cdot\frac{a}{2}}]$$

$$=\cos a\omega+\cos\frac{a\omega}{2}$$

4．证明：若$\mathscr{F}[e^{j\varphi(t)}]=F(\omega)$, 其中 $\varphi(t)$ 为一实函数，则

$$\mathscr{F}[\cos\varphi(t)]=\frac{1}{2}[F(\omega)+\overline{F(-\omega)}]$$

$$\mathscr{F}[\sin\varphi(t)]=\frac{1}{2j}[F(\omega)-\overline{F(-\omega)}]$$

其中 $\overline{F(-\omega)}$ 为 $F(\omega)$ 的共轭函数。

证明：$\mathscr{F}[e^{j\varphi(t)}]=F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j\varphi(t)}e^{-j\omega t}dt$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}[\cos\varphi(t)+j\sin\varphi(t)]e^{-j\omega t}dt$$

$$\overline{F(\omega)}=\int_{-\infty}^{+\infty}[(\cos\varphi(t)-j\sin\varphi(t))]e^{j\omega t}dt$$

$$\overline{F(-\omega)}=\int_{-\infty}^{+\infty}[(\cos\varphi(t)-j\sin\varphi(t))]e^{-j\omega t}dt$$

所以$\frac{1}{2}[F(\omega)+\overline{F(\omega)}]=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\varphi(t)e^{-j\omega t}dt=\mathscr{F}[\cos\varphi(t)]$

同理：$\frac{1}{2j}[F(\omega)+\overline{F(\omega)}]=\mathscr{F}[\sin\varphi(t)]$

练　习　十　七

1．设 $f_1(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t\geq 0\end{cases}$，$f_2(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ e^{-t}, & t\geq 0\end{cases}$ 求 $f_1(t)*f_2(t)$。

解：$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau=\int_0^t e^{\tau-t}d\tau=1-e^{-t}$

$$\therefore f_1(t)*f_2(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1-e^{-t}, & t\geq 0\end{cases}$$

2．求下列函数的傅氏变换。

（1）$f(t)=\sin\omega_0 t\cdot u(t)$

解：$\mathscr{F}[f(t)]=\dfrac{1}{2\pi}\mathscr{F}[\sin\omega_0 t]*\mathscr{F}[u(t)]$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}j\pi[\delta(\tau+\omega_0)-\delta(\tau-\omega_0)]\cdot(\frac{1}{j(u-\tau)}+\pi\delta(u-\tau))d\tau$$

$$=\frac{\omega_0}{\omega_0^2-\omega^2}-\frac{\pi}{2j}[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]$$

（2）$f(t)=e^{j\omega_0 t}\cdot t\cdot u(t)$

解：$\mathscr{F}[te^{j\omega_0 t}]=2\pi j\delta'(\omega-\omega_0)=F_1(\omega)$

$$\mathcal{F}[u(t)]=\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)=F_2(\omega)$$

$$\therefore\mathcal{F}[f(t)]=\frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[(te^{j\omega_0 t})\,\mathcal{F}(u(t))=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F_1(\tau)F_1(\omega-\tau)d\tau$$

$$=\frac{-1}{(\omega-\omega_0)^2}+\pi j\delta'(\omega-\omega_0)$$

3．证明：

$a[f_1(t)*f_2(t)]=[af_1(t)]*F_2(t)$　　　（a 为常数）

证：$a\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}af_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau=(af_1(t))*f_2(t)$

4．若 $F_1(\omega)=\mathscr{F}[f_1\cdot(t)]$，$F_1(\omega)=\mathscr{F}[f_2(t)]$，证明：

$$\mathscr{F}[f_1(t)\cdot f_2(t)]=\frac{1}{2\pi}F_1(\omega)*F_2(\omega)$$

证： $$\frac{1}{2\pi}F_1(\omega)*F_2(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(t)e^{-j\tau t}dt)\cdot F_2(\omega-\tau)d\tau$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(t)(\int_{-\infty}^{+\infty}F_2(\omega-\tau)e^{-j\tau t}d\tau)dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(t)[\int_{-\infty}^{+\infty}F_2(\omega-\tau)e^{-j(\omega-\tau)t}d(\omega-\tau)]e^{-j\omega t}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(t)f_1(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$=\mathcal{F}[f_1(t)\cdot f_2(t)]$$

练　习　十　八

1．求下列函数的拉氏变换。

（1）$f(t)=\begin{cases}3, & 0\le t<\dfrac{\pi}{2}\\ \cos t, & t\ge\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$

解：$F(s)=\mathscr{L}[f(t)]=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}3e^{-st}dt+\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\cos te^{-st}dt$

$$=\frac{3}{-s}e^{-st}\Big|_{t=0}^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{+\infty}\cos(\frac{\pi}{2}+\tau)e^{-s(\tau+\frac{\pi}{2})}d\tau$$

$$=\frac{3}{s}(1-e^{-\frac{\pi}{2}s})+e^{-\frac{1}{2}\pi s}\int_0^{+\infty}(-\sin\tau)\cdot e^{-st}d\tau=\frac{3}{s}(1-e^{-\frac{\pi}{2}s})+e^{-\frac{1}{2}\pi s}\ \mathscr{L}[-\sin t]$$

$$=\frac{3}{s}(1-e^{-\frac{\pi}{2}s})-\frac{1}{s^2+1}e^{-\frac{1}{2}\pi s}$$

（2）$f(t)=e^{2t}+5\delta(t)$

解：$F(s)=\mathscr{L}[f(t)]=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}dt=\int_0^{+\infty}[e^{2t}+5\delta(t)]e^{-st}dt$

$$=\int_0^{+\infty}e^{-(s-2)t}dt+5\int_0^{+\infty}\delta(t)e^{-st}dt$$

$$=-\frac{e^{-(s-2)t}}{s-2}\Big|_0^{+\infty}+5e^{-st}\Big|_{t=0}=\frac{1}{s-2}+5$$

$$=\frac{5s-9}{s-2}\qquad(\operatorname{Re}s>2)$$

（3）$f(t)=(t-1)^2e^t$

解：$F(s)=\mathscr{L}[f(t)]=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}dt=\int_0^{+\infty}\sin t\cos t\cdot e^{-st}dt$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\sin 2t\cdot e^{-st}dt=\frac{1}{2}\ \mathscr{L}[\sin 2t]=\frac{1}{2}\times\frac{2}{s^2=2^2}$$

$$=\frac{1}{s^2+4}$$

（4）$f(t)=(t-1)^2e^2$

解：$F(s)=\mathscr{L}[f(t)]=\mathscr{L}[t^2e^t]-2\mathscr{L}[te^t]+\mathscr{L}[e^t]$

$$=(\frac{1}{s-1})''+2\times(\frac{1}{s-1})'+\frac{1}{s-1}$$

$$=(\frac{2}{(s-1)^3}-\frac{2}{(s-1)^2})+\frac{1}{s-1}$$

$$=\frac{s^2-4s+5}{(s-1)^3}$$

2．利用拉氏变换的性质，计算$\mathscr{L}[f(t)]$。

（1） $f(t)=te^{-3t}\sin t$

解：$\mathscr{L}[\sin t]=\dfrac{1}{s^2+1}$

$$\mathscr{L}[e^{-3t}\sin t]=\frac{1}{(s+3)^2+1}$$

$$\mathscr{L}[f(t)]=-(\frac{1}{(s+3)^2+1})'=\frac{2(s+3)}{[(s+3)^2+1]^2}$$

（2） $f(t)=t\int_0^t e^{-3t}\sin 2tdt$

解法（1）： $f'(t)=t\int_0^t e^{-3t}\sin 2tdt+te^{-3t}\sin 2t$

$$\therefore \mathscr{L}[f'(t)]=s\,\mathscr{L}[f(t)]=\mathscr{L}[\int_0^t e^{-3t}\sin 2tdt]+\quad \mathscr{L}[te^{-3t}\sin 2t]$$

$$=\frac{1}{2}\mathscr{L}[e^{-3t}\sin 2t]+\mathscr{L}[te^{-3t}\sin 2t]$$

$$\mathscr{L}[f(t)]=\frac{2}{s^2}\,\frac{1}{(s+3)^2+4}+\frac{4(s+3)}{((s+3)+4)^2s}=\frac{2(3s^2+12s+13)}{s^2[(s+3)^2+4]^2}$$

法2：$\mathscr{L}[e^{-3t}\sin 2t]=\dfrac{2}{(s+3)^2+4}$

$$\mathscr{L}[\int_0^t e^{-3t}\sin 2tdt]=\frac{1}{s}\cdot\frac{2}{(s+3)^2+4}$$

$$\therefore \mathscr{L}[t\int_0^t e^{-3t}\sin 2tdt]=-[\frac{2}{s[4+(s+3)^2]}]'=\frac{2(3s^2+12s+13)}{s^2[(s+3)^2+4]^2}$$

（3） $\int_0^t \dfrac{e^{-3t}\sin 2tdt}{t}dt$

$$\mathscr{L}[e^{-3t}\sin 2t]=\frac{2}{4+(s+3)^2}$$

$$\mathscr{L}[\frac{1}{t}e^{-3t}\sin 2t]=\int_s^{\infty}\frac{2}{4+(s+3)^2}ds=-arctg\frac{s+3}{2}+\frac{\pi}{2}$$

$$\mathscr{L}[\int_0^t\frac{e^{-3t}\sin 2t}{t}dt]=\frac{1}{s}(\frac{\pi}{2}-arctg\frac{s+3}{2})$$

3．求积分$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}dt$的值。

$$\mathscr{L}[e^{-t}-e^{-2t}]=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}$$

$\therefore$原式$=-\ln\frac{1}{2}=\ln 2$

$$\mathscr{L}[\frac{1}{t}(e^{-t}-e^{-2t})]=\int_s^{\infty}(\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2})ds=\int_s^{\infty}\frac{1}{s^2+3s+2}ds$$

$$=\ln\frac{s+1}{s+2}\Big|_s^{\infty}=-\ln\frac{s+1}{s+2}$$

练　习　十　九

1．求下列像函数 $F(s)$ 的拉氏逆变换。

（1）$\dfrac{s}{(s-a)(s-b)}$

解：原式 $=\dfrac{a}{a-b}\cdot\dfrac{1}{s-a}-\dfrac{b}{a-b}\cdot\dfrac{1}{s-b}$

$\therefore \mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\dfrac{a}{a-b}e^{at}-\dfrac{b}{a-b}e^{bt}$

或 $f(t)=\dfrac{s}{(s-a)+(s-b)}e^{st}\Big|_{s=a}+\dfrac{s}{(s-a)+(s-b)}e^{st}\Big|_{s=b}$

$=\dfrac{a}{a-b}e^{at}+\dfrac{b}{b-a}e^{bt}$

（2）$\dfrac{1}{s^4+5s^2+4}$

解：原式 $=\dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{s^2+1}-\dfrac{1}{s^2+4})$

$\therefore \mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\dfrac{1}{3}\sin t-\dfrac{1}{6}\sin 2t$

（3）$\ln\dfrac{s^2-1}{s^2}$

解：$f(t)=-\dfrac{1}{t}\mathscr{L}^{-1}[F'(s)]$

$\therefore F(s)=\ln(s^2-1)-\ln s^2=\ln(s+1)+\ln(s-1)2\ln s$

$\therefore F'(s)=\dfrac{1}{s+1}+\dfrac{1}{s-1}-\dfrac{2}{s}$

故 $f(t)=-\dfrac{1}{t}(e^{-t}+e^{t}-2)=\dfrac{1}{t}(2-2\cdot\dfrac{e^{t}+2^{-t}}{2})=\dfrac{2}{t}(1-cht)$

（4）$\dfrac{1+e^{-2s}}{s^2}$

解：$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s^2}]+\mathscr{L}[e^{-2s}\cdot\frac{1}{s^2}]$

$$= t+\mathscr{L}^{-1}[e^{-2s}\cdot\frac{1}{s}]$$

$$\mathcal{L}^{-1}[e^{-as}F(s)]=f(t-a)u(t-a)\quad(a>0)$$

$$\therefore f(t)=t+(t-2)u(t-2)$$

$$=\begin{cases}t, & 0\le t<2\\ 2(t-1), & t\ge 2\end{cases}$$

2．利用卷积定理证明：$\mathscr{L}[\int_0^t f(t)dt]=\mathscr{L}[f(t)*u(t)]=\frac{F(s)}{s}$

证：$\mathscr{L}[\int_0^t f(t)dt]=\mathscr{L}[\int_0^t f(t)\cdot dt]=\mathscr{L}[f(t)*u(t)]=t+(t-2)u(t-2)$

$$=\int_0^{+\infty}[f(t)*u(t)]e^{-st}dt=\int_0^{+\infty}e^{st}[\int_0^t f(\tau)u(t-\tau)]dt$$

$$=\begin{cases}t, & 0\le t<2\\ 2(t-1), & t\ge 2\end{cases}$$

$$=\int_0^{\infty}f(\tau)e^{-st}dt=\int_0^{\infty}u(t)e^{-st}du=\frac{F(s)}{s}$$

3．用拉氏变换求下列微分方程。

（1）$y''-2y'+y=e^t$，$y(0)=y'(0)=0$

解：取拉氏变换有：

$$s^2\mathcal{L}[y(t)]-sy(0)-y'(0)-2(s\,\mathcal{L}[y(t)]-y(0)]+\mathcal{L}[y(t)]=\frac{1}{s-1}$$

$$\therefore (s^2-2s+1)\,\mathcal{L}[y(t)]=\frac{1}{s-1}$$

$$\therefore \mathcal{L}[y(t)]=\frac{1}{(s-1)^3}$$

取拉氏逆变换有：$y(t)=\frac{1}{2}t^2e^t$

（2）$y^{(4)}+y'''=\cos t$，$y(0)=y'''(0)=0$，$y''(0)=C$（常数）

解：$s^4y(s)-sy''(0)+s^3y(s)-y''(0)$

$$= \frac{s}{s^2+1}$$

$$\therefore y(s) = \frac{1}{s^2(s+1)(s^2+1)} + \frac{c}{s^3}$$

$$= -\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{2(s+1)} + \frac{s-1}{2(s^2+1)} + \frac{c}{s^3}$$

$$\therefore y(t) = -1 + t + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t + \frac{c}{2}t^2$$

（3） $\begin{cases} y'' - x'' + x' - y = e^t - 2, & x(0) = x'(0) = 0 \\ 2y'' - x'' - 2y' + x = -t, & y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$

解：设$\mathscr{L}[y(t)] = Y(s)$，$\mathscr{L}[x(t)] = X(s)$

则：$\begin{cases} s^2Y(s) - s^2X(s) + sX(s) - Y(s) = \dfrac{1}{s-1} - \dfrac{2}{s} \\ 2s^2Y(s) - s^2X(s) - 2sY(s) + X(s) = -\dfrac{1}{s^2} \end{cases}$

$$\begin{cases} (s+1)Y(s) - sX(s) = \dfrac{-s+2}{s(s-1)^2} \\ 2sY(s) - (s+1)X(s) = -\dfrac{1}{s^2(s-1)} \end{cases}$$

可得：$\begin{cases} X(s) = \dfrac{2s-1}{s^2(s-1)^2} \\ Y(s) = \dfrac{1}{s(s-1)^2} \end{cases}$ $\quad \therefore \begin{cases} x(t) = -t + te^t \\ y(t) = 1 - e^t + te^t \end{cases}$

$$\therefore y(t) = 1 + te^t - e^t$$

（$x(t) = \lim\limits_{s\to 0}\dfrac{d}{ds}[\dfrac{2s-1}{(s-1)^2}e^{st}] + \lim\limits_{s\to 1}\dfrac{d}{ds}[\dfrac{2s-1}{s^2}e^{st}] = -t + te^t$）