# 2017 ～ 2018 学年第一学期

# 《复变函数与积分变换》课程考试试卷(A卷) (闭卷)

院(系)____________ 专业班级______________ 学号_________________ 姓名_____________

考试日期：2017 年 12 月 3 日　　　　考试时间：8:30 ~ 11:00

一、单项选择题(每题 2 分，共 24 分).

1. 方程 $z^4+a^4=0\ (a>0)$ 的解为：(　　)

A．$\dfrac{a}{\sqrt{2}}(\pm1+i),\ \dfrac{a}{\sqrt{2}}(\pm1-i)$，　　B．$\dfrac{a}{\sqrt{2}}(1\pm i),\ \dfrac{a}{\sqrt{2}}(\pm1+i)$，

C．$a(\pm1+i),\ a(\pm1-i)$，　　D．$a(1\pm i),\ a(\pm1+i)$．

2. $\mathrm{Ln}(-3+4i)$ 的值为：(　　)

A．$\ln5+i(\pi-\arctan\dfrac{3}{4}+2k\pi)$，　　B．$\ln5+i(\pi-\arctan\dfrac{4}{3}+2k\pi)$，

C．$\ln5+i(\pi+\arctan\dfrac{3}{4}+2k\pi)$，　　D．$\ln5+i(\pi+\arctan\dfrac{4}{3}+2k\pi)$．

3. $(1+i)^6$ 的值为：(　　)

A．$8i$，　B．$8$，　C．$-8i$，　D．$-8$．

4. 下列关系式正确的是：(　　)

A．$|\mathrm{e}^z|=\mathrm{e}^{|z|}$，　B．$\overline{\cos z}=\cos\overline{z}$，　C．$\mathrm{Ln}\,a^b=b\,\mathrm{Ln}\,a$，　D．$(a^b)^c=a^{bc}$．

5. 函数 $f(z)=x^2+2y^3i$，则 $f'(3+i)$ 的值为：(　　)

A．不存在，　B．$6$，　C．$3$，　D．$2$．

6. 积分 $\oint_{|z|=a}(|z|-e^z\sin z)\,dz\ (a>0)$ 的值为：(　　)

A．$2\pi i$，　B．$2\pi a i$，　C．$0$，　D．不存在.

7. 函数 $f(z)=\dfrac{e^{z^2}}{\cos z}$ 在 $z=0$ 点展开为 Taylor 级数的收敛半径为：(　　)

A．$\pi$，　B．$\dfrac{\pi}{2}$，　C．$1$，　D．$+\infty$．

8. $z=0$ 是函数 $f(z)=z^2(e^{z^2}-1)$ 的 (　　) 阶零点.

A．$2$，　B．$3$，　C．$4$，　D．$5$．

9. $z=\infty$ 是函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2}+\sin\dfrac{1}{z}$ 的 (　　).

A．可去奇点，　B．本性奇点，　C．非孤立奇点，　D．极点.

10. 映射 $f(z)=z^3$ 在 $z=i$ 处的伸缩率与旋转角分别为：(　　)

A. 3 和 $\pi/2$，　　B. 3 和 $\pi$，　　C. $-3$ 和 $\pi$，　　D. $-3$ 和 $-\pi$.

11. 函数 $f(t)=\begin{cases} e^t, & t\le 0 \\ 0, & t>0 \end{cases}$ 的 Fourier 变换 $F(\omega)$ 为：(　　)

A. $\dfrac{1}{1+j\omega}$，　　B. $\dfrac{1}{-1+j\omega}$，　　C. $\dfrac{1}{1-j\omega}$，　　D. $\dfrac{1}{-1-j\omega}$.

12. 单位冲激函数 $\delta(t)$ 和 $\cos t$ 的卷积为 $f(t)=\delta(t)*\cos t$，则 $f'(t)=$(　　).

A. $\cos t$，　　B. $-\cos t$，　　C. $\sin t$，　　D. $-\sin t$.

二、(*10 分*) 验证 $u(x,y)=e^y\cos x+y$ 为调和函数，并求二元函数 $v(x,y)$，使得函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 为解析函数，且满足 $f(0)=1$.

三、(*12 分*) 将函数 $f(z)=\dfrac{z+1}{z(z-1)^2}$ 在下列指定的环域内展开为 Laurent 级数：

(1) $0<|z|<1$；　　(2) $1<|z-1|<+\infty$.

四、计算下列积分 (*共 10 分*). (每小题 5 分)

1. $\displaystyle\oint_{|z|=\pi}\frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}dz$.　　2. $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{z}{z+1}\mathrm{e}^{\frac{z}{z+1}}dz$.

五、计算下列积分 (*共 10 分*). (每小题 5 分)

1. $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\cos\theta}{5-4\cos\theta}d\theta$.　　2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+4x+13}dx$.

六、(*6 分*) 求区域 $D=\{z:|z+1|>1, \operatorname{Im}z>0\}$ 在映射 $w=\dfrac{-i}{z+1}$ 下的像.

七、(*10 分*) 求一共形映射 $w=f(z)$，将 $z$ 平面上的区域 $D=\{z:|z+2|<2\}$ 映射到 $w$ 平面上的区域 $G=\{w:\dfrac{\pi}{4}<\arg w<\dfrac{3\pi}{4}\}$.

八、(*12 分*) 利用 Laplace 变换求解常微分方程组：

$$\begin{cases} x'(t)-x(t)-y''(t)-y(t)=0, & x(0)=0, \\ x'(t)+y'(t)=e^t+\sin t, & y(0)=y'(0)=0. \end{cases}$$

九、(*6 分*) 设函数 $f(z)$ 在圆域 $|z|<R$ 内解析且 $|f(z)|\le M<+\infty$，$f(0)=0$，证明：在圆域 $|z|<R$ 内恒有 $|f(z)|\le\dfrac{M}{R}|z|$.