2017 ～ 2018 学年第一学期

《复变函数与积分变换》课程考试试卷(A卷) (闭卷)

院(系)____________ **专业班级**______________ **学号**_________________ **姓名**_____________

考试日期：2017 年 12 月 3 日　　　　考试时间：8:30～11:00

一、单项选择题(每题 2 分，共 24 分).

1. 方程 $z^4+a^4=0\ (a>0)$ 的解为：(　A　)

   A．$\dfrac{a}{\sqrt{2}}(\pm1+i)$, $\dfrac{a}{\sqrt{2}}(\pm1-i)$，　　B．$\dfrac{a}{\sqrt{2}}(1\pm i)$, $\dfrac{a}{\sqrt{2}}(\pm1+i)$，

   C．$a(\pm1+i)$, $a(\pm1-i)$，　　D．$a(1\pm i)$, $a(\pm1+i)$.

2. $\mathrm{Ln}(-3+4i)$ 的值为：(　B　)

   A．$\ln5+i(\pi-\arctan\dfrac{3}{4}+2k\pi)$，　B．$\ln5+i(\pi-\arctan\dfrac{4}{3}+2k\pi)$，

   C．$\ln5+i(\pi+\arctan\dfrac{3}{4}+2k\pi)$，　D．$\ln5+i(\pi+\arctan\dfrac{4}{3}+2k\pi)$.

3. $(1+i)^6$ 的值为：(　C　)

   A．$8i$，　B．8，　C．$-8i$，　D．-8.

4. 下列关系式正确的是：(　B　)

   A．$|\mathrm{e}^z|=\mathrm{e}^{|z|}$，　B．$\overline{\cos z}=\cos\overline{z}$，　C．$\mathrm{Ln}\,a^b=b\,\mathrm{Ln}\,a$，　D．$(a^b)^c=a^{bc}$.

5. 函数 $f(z)=x^2+2y^3i$，则 $f'(3+i)$ 的值为：(　B　)

   A．不存在，　B．6，　C．3，　D．2.

6. 积分 $\oint_{|z|=a}(|z|-e^z\sin z)dz\ (a>0)$ 的值为：(　C　)

   A．$2\pi i$，　B．$2\pi ai$，　C．0，　D．不存在.

7. 函数 $f(z)=\dfrac{e^{z^2}}{\cos z}$ 在 $z=0$ 点展开为 Taylor 级数的收敛半径为：(　B　)

   A．π，　B．$\dfrac{\pi}{2}$，　C．1，　D．$+\infty$.

8. $z=0$ 是函数 $f(z)=z^2(e^{z^2}-1)$ 的 (　C　) 阶零点.

   A．2，　B．3，　C．4，　D．5.

9. $z=\infty$ 是函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2}+\sin\dfrac{1}{z}$ 的 (　A　).

   A．可去奇点，　B．本性奇点，　C．非孤立奇点，　D．极点.

10. 映射 $f(z)=z^3$ 在 $z=i$ 处的伸缩率与旋转角分别为：(　B　)

A. 3 和 $\pi/2$，　　B. 3 和 π，　　C. -3 和 π，　　D. -3 和 $-\pi$.

11. 函数 $f(t)=\begin{cases} e^t, & t\le 0 \\ 0, & t>0 \end{cases}$ 的 Fourier 变换 $F(\omega)$ 为：(　C　)

A. $\dfrac{1}{1+j\omega}$，　　B. $\dfrac{1}{-1+j\omega}$，　　C. $\dfrac{1}{1-j\omega}$，　　D. $\dfrac{1}{-1-j\omega}$.

12. 单位冲激函数 $\delta(t)$ 和 $\cos t$ 的卷积为 $f(t)=\delta(t)*\cos t$，则 $f'(t)=$(　D　).

A. $\cos t$，　　B. $-\cos t$，　　C. $\sin t$，　　D. $-\sin t$.

二、(10 分) 验证 $u(x, y)=e^y\cos x+y$ 为调和函数，并求二元函数 $v(x, y)$，使得函数 $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ 为解析函数，且满足 $f(0)=1$.

解： $u(x, y)=e^y\cos x+y$

$$\left.\begin{aligned} &u_x=(-\sin x)e^y \qquad u_y=(\cos x)e^y+1 \\ &u_{xx}=(-\cos x)e^y \qquad u_{yy}=(\cos x)e^y \end{aligned}\right\} \quad 2分$$

$\therefore\ u_{xx}+u_{yy}=0$　　$u(x,y)$ 为调和函数。

由C-R方程可得：
$$\left.\begin{aligned} v_y&=u_x=(-\sin x)e^y \\ v_x&=-u_y=-[(\cos x)e^y+1] \end{aligned}\right\} \quad 1分$$

$$\begin{aligned} v(x,y)&=\int v_y dy+\varphi(x) \\ &=\int(-\sin x)e^y dy+\varphi(x) \\ &=(-\sin x)e^y+\varphi(x) \end{aligned} \qquad 2分$$

$$\left.\begin{aligned} &\therefore\ v_x=(-\cos x)e^y+\varphi'(x)=-[(\cos x)e^y+1] \\ &即\quad \varphi'(x)=-1 \qquad \therefore \varphi(x)=-x+C \\ &\therefore v(x,y)=(-\sin x)e^y-x+C \end{aligned}\right\} \quad 3分$$

$$\left.\begin{aligned} &\therefore\ f(z)=u(x,y)+iv(x,y)=(\cos)e^y+y+i[(-\sin x)e^y-x+C] \\ &\quad 由\quad f(0)=1\ \Rightarrow\ f(0)=1+iC=1\ \ \therefore\ C=0 \\ &\qquad\qquad \therefore\ f(z)=(\cos x)e^y+y+i[(-\sin)e^y-x] \end{aligned}\right\} 2分$$

三、(12分) 将函数 $f(z)=\dfrac{z+1}{z(z-1)^2}$ 在下列指定的环域内展开为 Laurent 级数：

(1) $0<|z|<1$；　　(2) $1<|z-1|<+\infty$.

解： $f(z)=\dfrac{z+1}{z(z-1)^2}$

（1） 当 $0<|z|<1$时

$$f(z)=\frac{z+1}{z}\frac{1}{(z-1)^2}=\left(1+\frac{1}{z}\right)\frac{1}{(1-z)^2} \qquad 2分$$

$$\because \frac{1}{(1-z)^2}=\left(\frac{1}{1-z}\right)'=(\sum_{n=0}^{+\infty}z^n)'=\sum_{n=1}^{+\infty}nz^{n-1} \qquad 3分$$

$$\therefore f(z)=\left(1+\frac{1}{z}\right)(\sum_{n=1}^{+\infty}nz^{n-1})=\sum_{n=1}^{+\infty}nz^{n-1}+\sum_{n=1}^{+\infty}nz^{n-2} \qquad 1分$$

（2） 当 $1<|z-1|<+\infty$ 时

$$f(z)=\frac{z+1}{z(z-1)^2}=\frac{z-1+2}{(z-1)^2}\cdot\frac{1}{1+z-1}=\left[\frac{1}{z-1}+\frac{2}{(z-1)^2}\right]\cdot\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z-1}} \qquad 3分$$

$$\left.\begin{aligned}&由\ 1<|z-1|<+\infty\ \ 可知\ 0<\left|\frac{1}{z-1}\right|<1\\ &\therefore \frac{1}{1+\frac{1}{z-1}}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(z-1)^{-n}\end{aligned}\right\}\ 3分$$

$$\left.\begin{aligned}\therefore f(z)&=\left(\frac{1}{z-1}+\frac{2}{(z-1)^2}\right)\cdot\frac{1}{z-1}\cdot\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(z-1)^{-n}\right)\\ &=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(z-1)^{-n-2}+2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(z-1)^{-n-3}\end{aligned}\right\}\ \begin{matrix}1分\\2分\end{matrix}$$

四、计算下列积分(**共 10 分**).(每小题 5 分)

1. $\oint_{|z|=\pi} \dfrac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}dz$. 2. $\oint_{|z|=2} \dfrac{z}{z+1}\mathrm{e}^{\frac{z}{z+1}}dz$.

解:1. $\oint_{|z|=\pi} \dfrac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}dz$

由留数定理可知:$\oint_{|z|=\pi} \dfrac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}dz$

$=2\pi i\left[\mathrm{Res}\left(\dfrac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}\ ,1\right)+\mathrm{Res}\left(\dfrac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}\ ,-3\right)\right]$ 2分

$z=1$是$\dfrac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}$的一阶极点

$\mathrm{Res}\left(\dfrac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}\ ,1\right)=\left.\dfrac{e^z}{(z+3)^2}\right|_{z=1}=\dfrac{e}{16}$ 1分

$z=$-3是$\dfrac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}$的二阶极点

$\mathrm{Res}\left(\dfrac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}\ ,-3\right)=\left.\left(\dfrac{e^z}{(z-1)}\right)'\right|_{z=-3}=-\dfrac{5}{16}e^{-3}$ 1分

$\oint_{|z|=\pi} \dfrac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}dz=2\pi i\left(\dfrac{e}{16}-\dfrac{5}{16}e^{-3}\right)$ 1分

2. 令 $f(z)=\dfrac{z}{z+1}\mathrm{e}^{\frac{z}{z+1}}$

则$z=-1$为 $f(z)$ 的本性奇点 1分

$f(z)=\left(1-\dfrac{1}{z+1}\right)\mathrm{e}^{1-\frac{1}{z+1}}$

$=e\left(1-\dfrac{1}{z+1}\right)\left(1-\dfrac{1}{z+1}+\dfrac{1}{2!(z+1)^2}+\cdots\right)$

$=\cdots+e(-1-1)\dfrac{1}{z+1}+\cdots,$ 2分

原式$=2\pi i\cdot\mathrm{Res}[f(z),-1]$

$=2\pi i\cdot(-2e)=-4\pi ie$ 2分

五、计算下列积分(**共 10 分**). (每小题 5 分)

1. $\int_0^{\pi} \dfrac{\cos\theta}{5-4\cos\theta}\,d\theta$.　　2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{x\sin x}{x^2+4x+13}\,dx$.

1. 解:
$$\left.\begin{aligned}&\int_0^{\pi} \frac{\cos\theta}{5-4\cos\theta}\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos\theta}{5-4\cos\theta}\,d\theta \\ &\text{令} z = e^{i\theta} \quad \therefore \cos\theta = \frac{z+z^{-1}}{2} = \frac{z^2+1}{2z} \qquad d\theta = \frac{dz}{iz}\end{aligned}\right\}$$ 1分

$$\therefore \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos\theta}{5-4\cos\theta}\,d\theta = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{z^2+1}{2z}}{5-4\cdot\frac{z^2+1}{2z}}\cdot\frac{1}{iz}\,dz$$

$$= \frac{i}{4}\oint_{|z|=1} \frac{1+z^2}{z\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-2)}\,dz$$

$$= \frac{i}{4}\cdot 2\pi i\left[\operatorname{Res}\left(\frac{1+z^2}{z\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-2)}\,,\ 0\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{1+z^2}{z\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-2)}\,,\ \frac{1}{2}\right)\right]$$ 1分

$z = 0, \dfrac{1}{2}$　均为 $\dfrac{1+z^2}{z\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-2)}$ 的一阶极点

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1+z^2}{z\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-2)}\,,\ 0\right) = \left.\frac{1+z^2}{\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-2)}\right|_{z=0} = 1$$ 1分

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1+z^2}{z\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-2)}\,,\ \frac{1}{2}\right) = \left.\frac{1+z^2}{z(z-2)}\right|_{z=\frac{1}{2}} = -\frac{5}{3}$$ 1分

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos\theta}{5-4\cos\theta}\,d\theta = \frac{1}{2}\cdot\frac{i}{4}\cdot 2\pi i\cdot\left(1-\frac{5}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$$ 1分

2. 解：$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2+4x+13}\,dx = \mathrm{Im}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,e^{ix}}{x^2+4x+13}\,dx\right)$ 1分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,e^{ix}}{x^2+4x+13}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,e^{ix}}{(x+2+3i)(x+2-3i)}\,dx$$

$$= 2\pi i\cdot \mathrm{Res}\left(\frac{z\,e^{iz}}{(z+2+3i)(z+2-3i)}\ ,\ -2+3i\right)$$

$$= 2\pi i\cdot \left.\frac{z\,e^{iz}}{z+2+3i}\right|_{z=-2+3i}$$

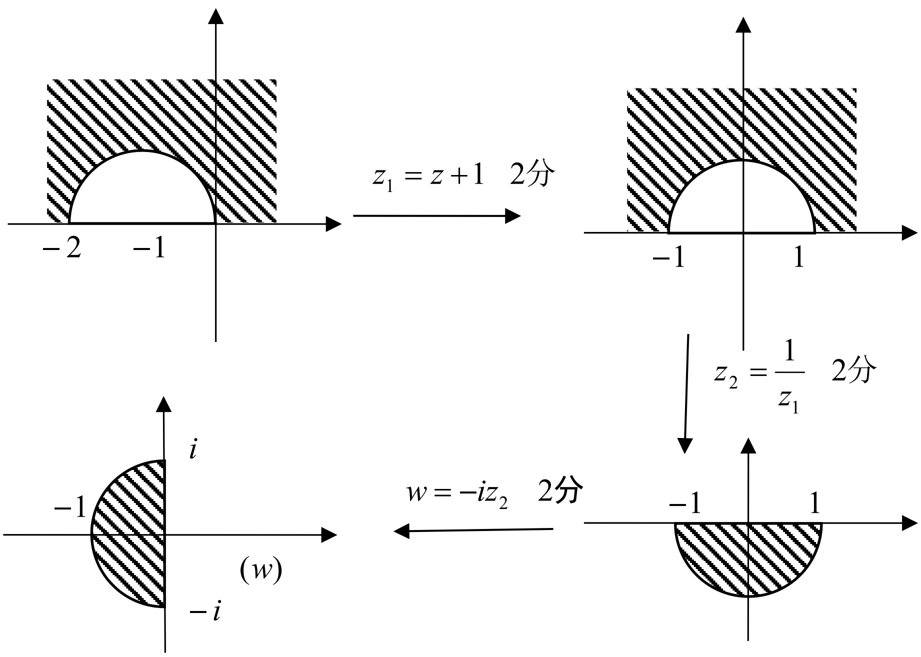
$$= \frac{\pi}{3}(-2+3i)e^{-3-2i}$$ 3分

$$\mathrm{Im}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,e^{ix}}{x^2+4x+13}\,dx\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{\pi}{3}(-2+3i)e^{-3-2i}\right)$$

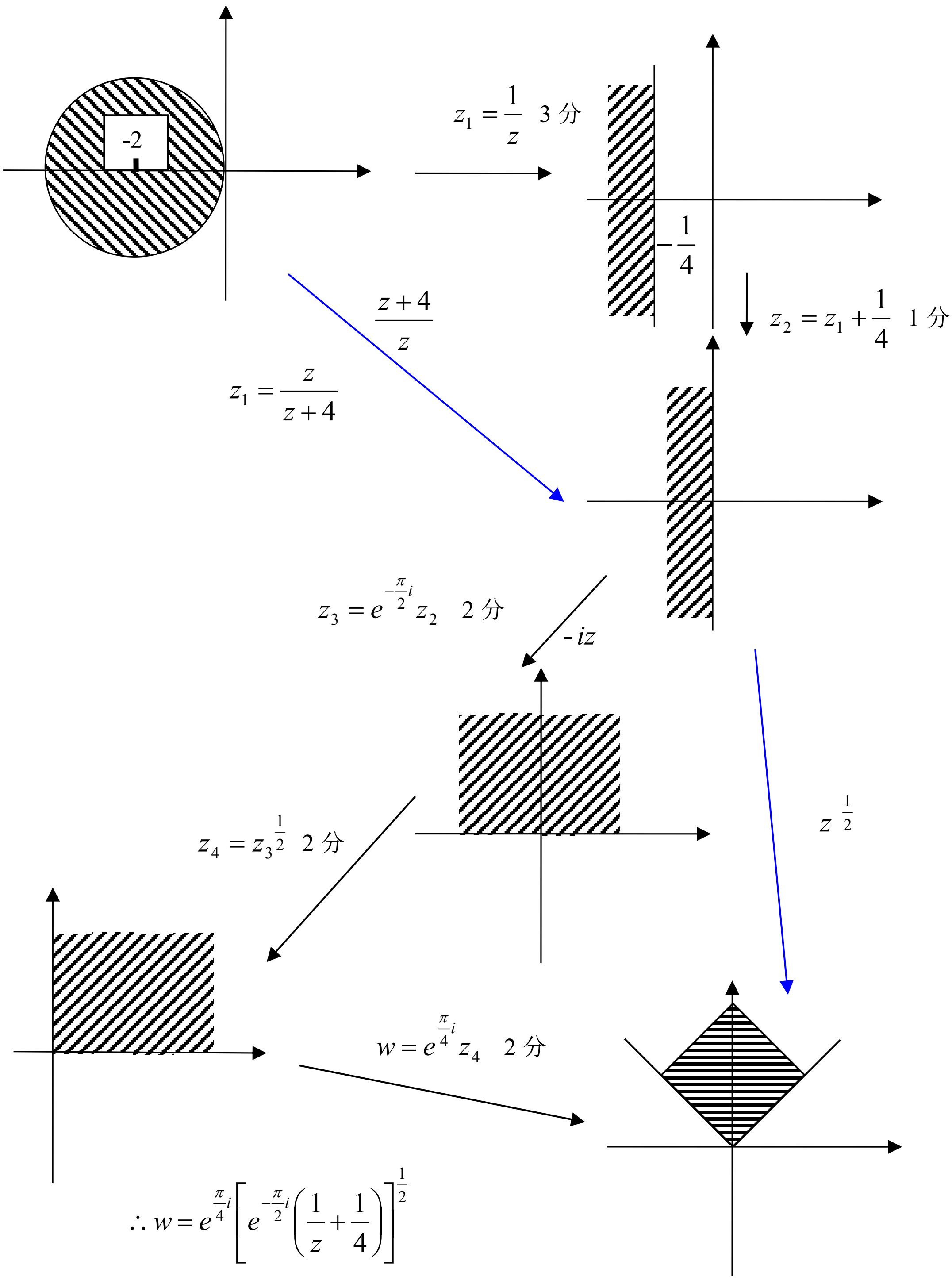
$$= e^{-3}\pi\left(\cos 2+\frac{2}{3}\sin 2\right)$$ 1分

$$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,e^{ix}}{x^2+4x+13}\,dx = e^{-3}\pi\left(\cos 2+\frac{2}{3}\sin 2\right)$$

六、(6分) 求区域 $D=\{z:|z+1|>1, \mathrm{Im}\,z>0\}$ 在映射 $w=\frac{-i}{z+1}$ 下的像.



七、(10 分) 求一共形映射 $w = f(z)$，将 z 平面上的区域 $D = \{z: |z+2| < 2\}$ 映射到 w 平面上的区域 $G = \{w: \frac{\pi}{4} < \arg w < \frac{3\pi}{4}\}$.



$$\therefore w = e^{\frac{\pi}{4}i}\left[e^{-\frac{\pi}{2}i}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{4}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

八、(12 分) 利用 Laplace 变换求解常微分方程组：

$$\begin{cases} x'(t)-x(t)-y''(t)-y(t)=0, & x(0)=0, \\ x'(t)+y'(t)=e^t+\sin t, & y(0)=y'(0)=0. \end{cases}$$

解： 方程组两边分别取 Laplace 变换得

$$sX(s)-x(0)-X(s)-s^2Y(s)+sy(0)+y'(0)-Y(s)=0 \qquad 3分$$

$$(s-1)X(s)=(s^2+1)Y(s) \quad (1) \qquad 1分$$

$$sX(s)-x(0)+sY(s)-y(0)=\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s^2+1} \qquad 3分$$

$$s(X(s)+Y(s))=\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s^2+1} \quad (2) \qquad 1分$$

由（1）与（2）可解得

$$\left.\begin{aligned} X(s)&=\frac{1}{s(s-1)}=\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s} \\ Y(s)&=\frac{1}{s(s^2+1)}=\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1} \end{aligned}\right\} \quad 2分$$

两边分别取 L^{-1} 可得

$$\begin{cases} x(t)=e^t-1 \\ y(t)=1-\cos t \end{cases} \qquad 2分$$

九、(6 分) 设函数 $f(z)$ 在圆域 $|z|<R$ 内解析且 $|f(z)|\le M<+\infty$， $f(0)=0$，

证明：在圆域 $|z|<R$ 内恒有 $|f(z)|\le \frac{M}{R}|z|$.

证明：由于 $f(z)$ 在 $|z|<R$ 内解析且 $f(0)=0$

$\therefore$ 存在$\varphi(z)$在$|z|<R$内解析，使得$f(z)=z\cdot\varphi(z)$ 2分

$$当z\ne 0时, |\varphi(z)|=\frac{|f(z)|}{|z|} \qquad 1分$$

考虑圆周 $|z|=r<R$，在该圆周曲线上$|\varphi(z)|=\frac{|f(z)|}{r}\le\frac{M}{r}$

由最大模原理，在圆盘 $|z|<r$内都有$|\varphi(z)|\le\frac{M}{r}$ 2分

令$r\to R$，即得$|\varphi(z)|\le\frac{M}{R}$

$\therefore |f(z)|=|z|\cdot|\varphi(z)|\le\frac{M}{R}|z|$ 1分