华中科技大学 2019～2020 学年第一学期

“ 复变函数与积分变换 ”考试试卷(A 卷)

考试方式：<u> 闭 卷 </u> 考试日期：<u> 2019-12-8 </u> 考试时长：<u> 150 </u>分钟

院（系）：____________________ 专业班级：____________________

学 号：____________________ 姓 名：____________________

一、单项选择题 (每题 2 分，共 24 分).

1. $(1+i)^{i}=($　　$)$ （下列 k 均为任意整数）

A． $e^{-\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)}e^{i\ln 2}$，　B． $e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi}e^{i\ln 2}$，　C． $e^{-\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)}e^{i\frac{1}{2}\ln 2}$，　D． $e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi}e^{i\frac{1}{2}\ln 2}$。

2. $z=2\left(\sin\frac{2}{3}\pi-i\cos\frac{2}{3}\pi\right)$的指数表示为(　　)

A．$2e^{-\frac{2}{3}\pi i}$，　B．$2e^{-\frac{1}{6}\pi i}$，　C．$2e^{\frac{2}{3}\pi i}$，　D． $2e^{\frac{1}{6}\pi i}$。

3. 下列命题中正确的是（　　）

A．如果 $f'(z_0)$ 存在，那么 $f(z)$ 在 z_0 解析。

B. 如果 z_0 为 $f(z)$ 的奇点，那么 $f(z)$ 在 z_0 不可导。

C .如果 z_0 为 $f(z)$ 和 $g(z)$ 的解析点，那么 z_0 也是 $f(z)+g(z)$ 和 $\frac{f(z)}{g(z)}$ 的解析点。

D .如果 $f(z)$ 在点 z_0 解析，那么 $f'(z)$ 在点 z_0 也解析。

4. 设函数 $f(z)=u+iv$ 在区域 D 内解析，下列等式中错误的是(　　)

A. $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$，　B. $f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}$，

C. $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y}$，　D. $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}$。

5. 设 $f(z)$ 在闭路 C 上及其内部解析，z_0 在 C 的内部，则 $\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz=$（　　）

A．$f'(z_0)\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^2}dz$，　　B．$\oint_C \frac{f'(z)}{z-z_0}dz$，

C．$\frac{f'(z_0)}{2!}\oint_C \frac{1}{z-z_0}dz$，　　D．$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz$。

6. 设 C 为正向圆周：$|z|=r>1$，则 $\oint_C \frac{\sin \pi z}{(z-1)^4}dz=$(　　)

A．$\frac{\pi^4 i}{6}$，　　B．$\frac{\pi^4 i}{3}$，　　C．$-3\pi^2 i$，　　D．0　。

7. 幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n!}{n^n}z^n$ 的收敛半径是（　　）

A．1，　　B．$+\infty$，　　C．$\frac{1}{e}$，　　D．e。

8. 函数 $f(z)=e^{\frac{1}{z+2}}\cdot\ln\left(1+i+z^2\right)$ 在点 $z=0$ 展开成 Taylor 级数的收敛半径为(　　)

A．2，　　B．$\sqrt{2}$，　　C．$\sqrt[4]{2}$，　　D．以上都不对。

9. 如果 $z=a$ 分别为 $f(z)$ 和 $g(z)$ 的本性奇点和 n 阶极点，那么 $z=a$ 为 $f(z)g(z)$ 的(　　)

A．可去奇点，　　B．本性奇点，　　C．n 阶极点，　　D．非孤立奇点。

10. 映射 $w=e^{iz^2}$ 在点 $z=i$ 处的伸缩率为（　　）

A．1，　　B．2，　　C．$\frac{1}{e}$，　　D．e。

11. 设 $f(t)=\sin t\cos t$，则 $f(t)$ 的 Fourier 变换 $F\left(f(t)\right)$ 为(　　)

A．$\frac{j}{4}\left[\delta(2+\omega)+\delta(2-\omega)\right]$，　　B．$\frac{j}{4}\left[\delta(2+\omega)-\delta(2-\omega)\right]$，

C．$\frac{j\pi}{2}\left[\delta(2+\omega)+\delta(2-\omega)\right]$，　　D．$\frac{j\pi}{2}\left[\delta(2+\omega)-\delta(2-\omega)\right]$。

12. 函数 $F(\omega)=1+\delta(\omega+a)\quad (a\in\mathbf{R})$ 的 Fourier 逆变换 $f(t)=F^{-1}(F(\omega))$ 为(　　)

A．$\delta(t)+e^{-jta}$，　　　　B．$\delta(t)+e^{jta}$，

C．$\delta(t)+\dfrac{1}{2\pi}e^{-jta}$，　　　　D．$\delta(t)+\dfrac{1}{2\pi}e^{jta}$ 。

二、(12 分) 已知 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 为复平面上的解析函数，且满足

$u(x,y)-v(x,y)=e^{-y}(\sin x+\cos x)$，求函数 $f(z)$。

三、(12 分) 把函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)(z-1)^2}$ 在下列圆环域内展开为 Laurent 级数：

（1）$0<|z+1|<2$；（2）$2<|z-1|<+\infty$。

四、计算下列积分(每题 5 分，共 10 分).

1． $\oint_{|z|=2}\dfrac{e^z}{z(1-z)^2}dz$ ，　　2． $\oint_{|z|=2}\dfrac{z^3}{1+z}e^{\frac{1}{z}}dz$ 。

五、计算下列积分(每题 5 分，共 10 分).

1． $\oint_{|z|=2}\dfrac{dz}{z^3(z^{10}-2)}$，　　2． $\int_0^{+\infty}\dfrac{x\sin x}{x^2+1}dx$ 。

六、(6 分) 求区域 $D=\left\{z:|z|>1,0<\arg z<\frac{5}{4}\pi\right\}$ 在映射 $w=\frac{\left(\frac{1}{\left(\sqrt[5]{z}\right)^2}\right)^2+1}{\left(\frac{1}{\left(\sqrt[5]{z}\right)^2}\right)^2-1}$ 下的像。(**答题过程需用图形表示**)

七、(10 分) 求一共形映射 $w=f(z)$，将 z 平面上的区域 $D=\{z:|z-i|>1,\operatorname{Re}z>0,\operatorname{Im}z>0\}$ 映射到 w 平面的上半平面。(**答题过程需用图形表示**)

八、(10 分) 利用 Laplace 变换求解下面常微分方程：

$x''(t)-2x'(t)+2x(t)=2-2t$，且 $x(0)=1$， $x'(0)=0$。

九、(6 分) 证明：若函数 $f(z)$ 在 $|z|>1$ 内解析，且满足 $\lim\limits_{z\to\infty}zf(z)=a$，则对于任何正数 $r>1$，积分 $\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r}f(z)dz=a$，其中 C_r 为正向圆周：$|z|=r$。

2019《复变函数与积分变换》试题 A

答案

一、选择题答案

CDDCB BDCBB DC

二、解答

$\because\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\boldsymbol{i}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 解析 $\therefore\ \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}}=\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{y}}\ \ \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{y}}=-\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{x}}$ --2 分

$\because \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})-\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{y}}(\sin\boldsymbol{x}+\cos\boldsymbol{x})$

两边对 x 取偏导数 $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}}-\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{x}}=\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{y}}(\cos\boldsymbol{x}-\sin\boldsymbol{x})$ (1)--1 分

两边对 y 取偏导数 $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{y}}-\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{y}}=-\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{y}}(\cos\boldsymbol{x}+\sin\boldsymbol{x})$ (2)--1 分

由(1)、(2)及 C-R 方程得: $\frac{\partial v}{\partial x}=\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{y}}\sin\boldsymbol{x}\quad \frac{\partial u}{\partial x}=\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{y}}\cos\boldsymbol{x}$ --2 分

$\therefore \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\int \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{y}}\sin\boldsymbol{x}\boldsymbol{d}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y})=-\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{y}}\cos\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y})$ --2 分

$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{y}}=\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{y}}\cos\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\varphi}^{'}(\boldsymbol{y})\therefore \boldsymbol{\varphi}^{'}(\boldsymbol{y})=0\ \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{C}$

$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=-\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{y}}\cos\boldsymbol{x}+\boldsymbol{C}$ --2 分

$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{y}}(\sin\boldsymbol{x}+\cos\boldsymbol{x})+\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{y}}\sin\boldsymbol{x}+\boldsymbol{C}$ --1 分

$\therefore \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})=\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{y}}\sin\boldsymbol{x}+\boldsymbol{C}+\boldsymbol{i}(-\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{y}}\cos\boldsymbol{x}+\boldsymbol{C})$

三、解答: $0<|\boldsymbol{z}+1|<2$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})=\frac{1}{(\boldsymbol{z}+1)(\boldsymbol{z}-1)^2}=\frac{-1}{\boldsymbol{z}+1}\cdot\left(\frac{1}{\boldsymbol{z}-1}\right)^{'}$$

$$=\frac{-1}{\boldsymbol{z}+1}\cdot-\left(\frac{1}{2-(\boldsymbol{z}+1)}\right)^{'}\qquad --3\text{ 分}$$

$$=\frac{-1}{\boldsymbol{z}+1}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{\boldsymbol{z}+1}{2}}\right)^{'}\qquad --1\text{ 分}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\boldsymbol{z}+1}\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\boldsymbol{z}+1}{2}\right)^{n}\right)^{'}\qquad --1\text{ 分}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z+1}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot n(z+1)^{n-1}$$ −− 1 分

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\cdot n(z+1)^{n-2}$$ −− 1 分

(1) $2<|z-1|<\infty$

$$f(z)=\frac{1}{(z+1)(z-1)^2}=\frac{1}{(z-1)^2}\cdot\frac{1}{2+z-1}$$ −− 1 分

$$=\frac{1}{(z-1)^2}\cdot\frac{1}{z-1}\left(\frac{1}{1+\frac{2}{z-1}}\right)$$ −− 1 分

$$=\frac{1}{(z-1)^3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{z-1}\right)^n$$ −− 1 分

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n\left(\frac{1}{z-1}\right)^{n+3}$$ −− 1 分

四、解答:

(1) $\oint_{|z|=2}\frac{e^z}{z(1-z)^2}dz=2\pi i\left[\mathrm{Res}\left(\frac{e^z}{z(1-z)^2},0\right)+\mathrm{Res}\left(\frac{e^z}{z(1-z)^2},1\right)\right]$ --2 分

$z=0$ 为$\frac{e^z}{z(1-z)^2}$的简单极点 $\therefore \mathrm{Res}\left(\frac{e^z}{z(1-z)^2},0\right)=\frac{e^z}{(1-z)^2}|_{z=0}=1$ --1 分

$z=1$ 为$\frac{e^z}{z(1-z)^2}$的二阶极点 $\therefore \mathrm{Res}\left(\frac{e^z}{z(1-z)^2},1\right)=\lim_{z\to1}\left(\frac{e^z}{z}\right)'=0$ --1 分

$\oint_{|z|=2}\frac{e^z}{z(1-z)^2}dz=2\pi i[1+0]=2\pi i$ --1 分

(2) $\oint_{|z|=2}\frac{z^3}{z+1}e^{\frac{1}{z}}dz=2\pi i\left[\mathrm{Res}\left(\frac{z^3}{z+1}e^{\frac{1}{z}},-1\right)+\mathrm{Res}\left(\frac{z^3}{z+1}e^{\frac{1}{z}},0\right)\right]$ --1 分

$z=-1$ 为函数的一阶极点 $z=0$ 为函数的本性奇点

$\mathrm{Res}\left(\frac{z^3}{z+1}e^{\frac{1}{z}},-1\right)=z^3e^{\frac{1}{z}}|_{z=-1}=-e^{-1}$ --1 分

考虑$\frac{z^3}{z+1}e^{\frac{1}{z}}$在 $0<|z|<1$ 内的 Laurent 展开

$$\frac{z^3}{z+1}e^{\frac{1}{z}}=z^3(1-z+z^2-z^3+z^4\cdots)\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}\cdots\right)$$

$$\therefore Res\left(\frac{z^3}{z+1}e^{\frac{1}{z}},0\right)=e^{-1}-\frac{1}{3}$$

从而$\oint_{|z|=2}\frac{z^3}{z+1}e^{\frac{1}{z}}dz=2\pi i\left(-e^{-1}+e^{-1}-\frac{1}{3}\right)=-\frac{2\pi i}{3}$ --3 分

另外也可以考虑在∞的留数

$\oint_{|z|=2}\frac{z^3}{z+1}e^{\frac{1}{z}}dz=-2\pi i\left[\mathrm{Res}(\frac{z^3}{z+1}e^{\frac{1}{z}},\infty)\right]$ --1 分

$\frac{z^3}{z+1}e^{\frac{1}{z}}$在 $1<|z|<\infty$内的 Laurent 展开为

$$z^3\cdot\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z}}\cdot e^{\frac{1}{z}}=z^2\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}\cdots\right)$$

$$=(z^2-z+1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots)(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}\cdots)$$

--2 分

$\mathrm{Res}\left(\frac{z^3}{z+1}e^{\frac{1}{z}},\infty\right)=\frac{1}{3}$ --1 分

$\therefore\oint_{|z|=2}\frac{z^3}{z+1}e^{\frac{1}{z}}dz=-2\pi i\cdot\frac{1}{3}=-\frac{2\pi i}{3}$ --1 分

五、

(1) 解答 1:

$\oint_{|z|=2}\frac{1}{z^3(z^{10}-2)}dz=2\pi i\sum_{k=1}^{11}\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^3(z^{10}-2)},z_k\right)=-2\pi i\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^3(z^{10}-2)},\infty\right)$

z_k为函数在$|z|=2$ 内的奇点 --2 分

在 $z=\infty$的去心邻域 $R<|z|<\infty$内($R>2$)

$\frac{1}{z^3(z^{10}-2)}=\frac{1}{z^3}\cdot\frac{1}{z^{10}}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{z^{10}}}\right)=\frac{1}{z^{13}}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{2}{z^{10}})^n$ --2 分

$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^3(z^{10}-2)},\infty\right)=0$

所以原积分等于 0

解答 2:

$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^3(z^{10}-2)},\infty\right)=\mathrm{Res}\left(\frac{1}{\frac{1}{\zeta^3}\left(\frac{1}{\zeta^{10}-2}\right)}\cdot\left(-\frac{1}{\zeta^2}\right),0\right)=\mathrm{Res}(-\frac{\zeta^{11}}{1-2\zeta^{10}},0)$ --3 分

由于$\zeta=0$为函数$-\frac{\zeta^{11}}{1-2\zeta^{10}}$的可去奇点 $\therefore \mathrm{Res}\left(-\frac{\zeta^{11}}{1-2\zeta^{10}},0\right)=0$ --2 分

所以原积分等于 0

(2)解答:

$\int_0^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+1}\boldsymbol{dx}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\mathrm{Im}(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{ix}}{x^2+1})\boldsymbol{dx}$ --2 分

令 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{ix}}{x^2+1}dx$ $\boldsymbol{R(z)}=\frac{z}{z^2+1}$ 则 $\boldsymbol{z=i}$ 为 $\boldsymbol{R(z)}$在上半平面内的奇点，且为一阶极点 --1 分

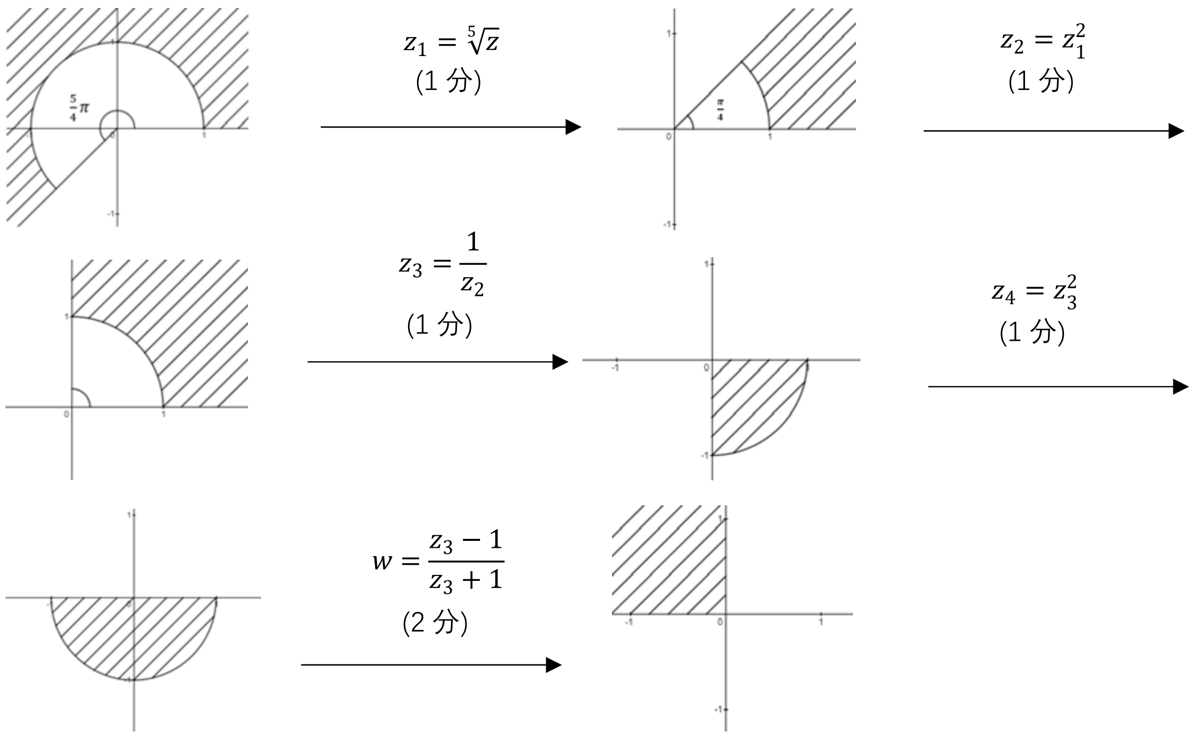
$$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{ix}}{x^2+1}\boldsymbol{dx}=2\pi i\cdot\mathrm{Res}(\boldsymbol{R(z)e^{iz}},\boldsymbol{i})$$

$$=2\pi i\cdot\lim_{z\to i}(z-i)\frac{ze^{iz}}{(z-i)(z+i)}$$

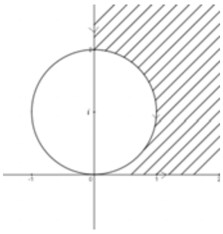
$$=2\pi i\cdot\frac{e^{-1}}{2}=\pi e^{-1}i$$ −− 1 分

所以原积分$=\frac{1}{2}\pi e^{-1}$ --1 分

六、解答

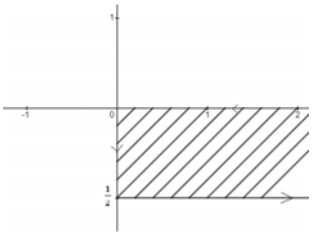


七、解答 1:



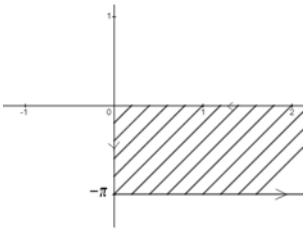
$$z_1=\frac{1}{z}$$

(1 分)



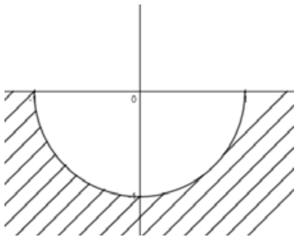
$$z_2=2\pi z_1$$

(1 分)



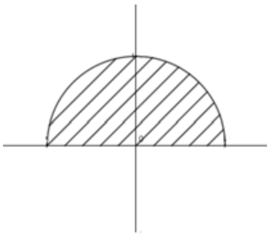
$$z_3=e^{z_2}$$

(1 分)



$$z_4=\frac{1}{z_3}$$

(1 分)

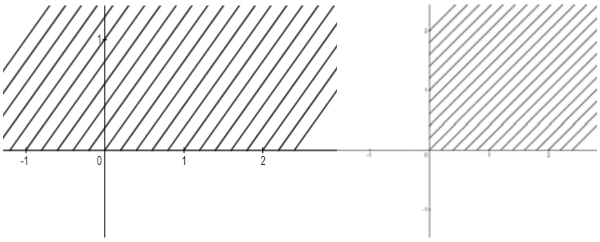


$$z_5=-\frac{z_4-1}{z_4+1}$$

(1 分)

$$w=z_5^2$$

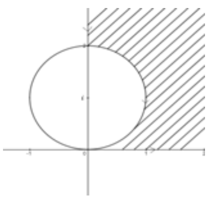
(1 分)



$$\therefore w=-\left(\frac{e^{-\frac{2\pi}{z}}+1}{e^{-\frac{2\pi}{z}}-1}\right)^2$$

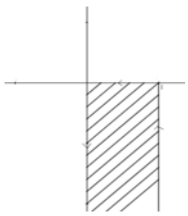
(1 分)

解答 2:



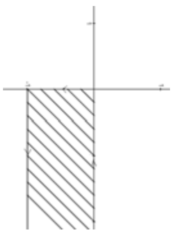
$$z_1=\frac{z-2i}{z}$$

(2 分)



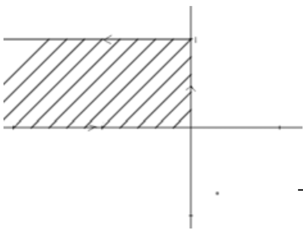
$$z_2=z_1-1$$

(1 分)



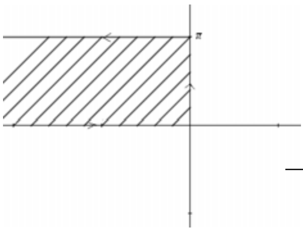
$$z_3=-iz_2$$

(1 分)

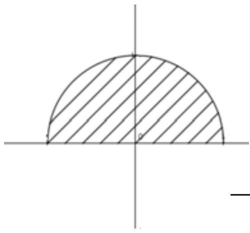


$$z_4=\pi z_3$$

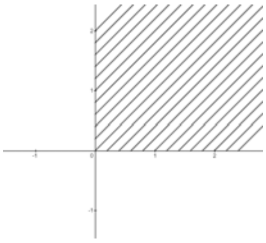
(1 分)



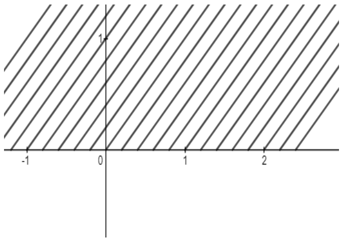
$z_5 = e^{z_4}$
(1 分)



$z_6 = -\dfrac{z_5 - 1}{z_5 + 1}$
(1 分)



$w = z_6^2$
(1 分)



$\therefore w = -\left(\frac{e^{-i\pi\left(\frac{z-2i}{z}-1\right)}+1}{e^{-i\pi\left(\frac{z-2i}{z}-1\right)}-1}\right)^2$　　（1 分）

八、解答:

$$x''(t) - 2x'(t) + 2x(t) = 2 - 2t \quad x(0) = 1 \;\; x'(0) = 0$$

两边取 Laplace 变换得

$$s^2 x(s) - s x(0) - x'(0) - 2(s x(s) - x(0)) + 2x(s) = \frac{2}{s} - \frac{2}{s^2} \qquad \text{--3 分}$$

代入初值得

$$(s^2 - 2s + 2)x(s) = \frac{2(s-1)}{s^2} + s - 2 \qquad \text{--1 分}$$

$$x(s) = \frac{2(s-1)}{s^2(s^2 - 2s + 2)} + \frac{s-2}{s^2 - 2s + 2} \qquad \text{-- 1 分}$$

$$= \frac{1}{(s-1)^2 + 1} - \frac{1}{s^2} + \frac{s-1}{(s-1)^2 + 1} - \frac{1}{(s-1)^2 + 1}$$

$$= \frac{s-1}{(s-1)^2 + 1} - \frac{1}{s^2} \qquad \text{-- 2 分}$$

两边取 Laplace 逆变换得

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}(x(s))$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s-1}{(s-1)^2 + 1}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) \qquad \text{-- 1 分}$$

$$= e^t \cos t - t \qquad \text{-- 2 分}$$

九、解答:

$\because \lim_{z\to\infty} zf(z)=a$

$\therefore \forall \varepsilon>0, \exists R>0$ 当$|z|>R$ 时，$|zf(z)-a|<\varepsilon$ --1 分

对任何$R^{'}>R$，由 Cauchy 基本定理

$r>1$，$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r} f(z)dz=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{R^{'}}} f(z)dz$ --1 分

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{R^{'}}} f(z)dz-a\right|=\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{R^{'}}}\frac{zf(z)-a}{z}dz\right| \quad --1\text{ 分}$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\oint_{C_{R^{'}}}\frac{|zf(z)-a|}{|z|}|dz| \quad --1\text{ 分}$$

$$<\frac{1}{2\pi}\cdot\varepsilon\cdot\frac{1}{R^{'}}\cdot 2\pi R^{'}=\varepsilon \quad --1\text{ 分}$$

由ε得任意性，$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r} f(z)dz=a$ --1 分