华中科技大学 2020～2021 学年第一学期

“ 复变函数与积分变换 ”考试试卷(A 卷)

考试方式：<u>闭 卷</u> 考试日期：<u>2020-12-3</u> 考试时长：<u>150</u> 分钟

院（系）：________________ 专业班级：________________

学 号：________________ 姓 名：________________

一、单项选择题 (每题 2 分，共 24 分).

1. 复数$(\sqrt{3}+\mathrm{i})^3$的值为 (   ).

   A. $8\mathrm{i}$， B． -8， C． $-8\mathrm{i}$， D． 8．

2. e^{-3-4i} 的主辐角为 (   ).

   A. $\arctan\dfrac{4}{3}-\pi$， B. $-4+\pi$， C. $\arctan\dfrac{3}{4}-\pi$， D． $-4+2\pi$.

3. 下列说法不正确的是 (   ).

   A． 指数函数 e^z 是周期函数, B. 幂函数 z^α 一定是多值函数,

   C． 正弦函数 $\sin z$ 是无界函数, D. $\mathrm{Ln}z+\mathrm{Ln}z=\mathrm{Ln}z^2$.

4. 函数 $f(z)=2xy+(y^2-x^2)i$ 在 $z=1$ 处的导数值为(   ).

   A. -2， B. $2i$， C. $-2i$， D. 2 .

5. 积分$\oint_{|z|=1}(1+\dfrac{1}{z}+\dfrac{z}{\sin z})\mathrm{d}z$ 的值为(   ).

   A. 0， B. $2\pi i$， C. $4\pi\mathrm{i}$， D. $6\pi i$.

6. 若有向曲线 C 为从$-i$到i的右半单位圆周，则积分$\int_C 3z^2\mathrm{d}z$ 的值为(   ).

   A． 0， B． **2**， C． $-2i$， D． $2i$.

7. 若幂级数$\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-i)^n$在点$z=1$发散，则该级数一定发散的点为 ( ).

   A． $-i$， B. 0， C． i， D． $2i$.

8. 函数$\dfrac{z}{\sin(z/2-\pi/8)}$在点$z=-\pi$展开成 Taylor 级数的收敛半径为(　　).

A．$\dfrac{\pi}{4}$ ，　　B．$\dfrac{\pi}{2}$，　　C．$\dfrac{3\pi}{4}$，　　D．$\dfrac{5\pi}{4}$.

9. 下列函数中，∞为可去奇点的是 (　　).

A．$\dfrac{1}{e^z-1}$，　　B．$z\sin\dfrac{1}{z}$，　　C．$\dfrac{1}{z}\sin z$，　　D．$ze^{\frac{1}{z}}$.

10. 下列哪个函数是区域$|z|<4$上的共形映射？　(　　)

A．$w=z^2$，　　B．$w=\ln z$，　　C．$w=e^z$，　　D．$w=\dfrac{1}{z}$.

11. 设$F(\omega)=2\pi\delta(\omega-1)\sin\omega$，则$F(\omega)$的 Fourier 逆变换为(　　).

A．$2\pi\sin 1$，　　B．$\sin 1$，　　C．$2\pi\ e^{jt}\sin 1$，　　D．$e^{jt}\sin 1$.

12. 连续函数$h(t-t_0)$与单位冲激函数$\delta(t-t_1)$的卷积$h(t-t_0)*\delta(t-t_1)$为(　　).

A．$h(t-t_0-t_1)$，　B．$h(t-t_0+t_1)$，　C．$h(t+t_0-t_1)$，　D．$h(t+t_0+t_1)$.

二、(12 分) 已知$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$为复平面上的解析函数，且满足

$$u(x,y)+v(x,y)=y^2+2xy-x^2+2(x-y)，求函数 f(z).$$

三、(12 分) 把函数$f(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z-3)}$在点$z_0=4$处展开为 Laurent 级数.

四、计算下列积分(每题 5 分，共 10 分).

1．$\displaystyle\oint_{|z|=1}\frac{1+z-e^z}{z^{10}}\mathrm{d}z$　　　　2．$\displaystyle\oint_{|z|=1}\frac{1-\cos z}{\sin^3 z}\mathrm{d}z$

五、计算下列积分(每题 5 分，共 10 分).

1．$\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{z}{1-z^2}\cos\frac{1}{z}\mathrm{d}z$　　　　2．$\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{5+3\sin\theta}\mathrm{d}\theta$

六、(*6分*) 求区域$D=\{z:|z|>2,\operatorname{Im}z>0\}$在映射$w=i\left(\dfrac{z-2}{z+2}\right)^2$下的像。**(答题过程需用图形表示)**

七、(*10分*) 求一共形映射$w=f(z)$，将z平面上的区域$D=\{z:|z-i|>1,|z-4i|>2\}$映射到w平面的上半平面。**(答题过程需用图形表示)**

八、(*10分*) 利用 Laplace 变换求解下面常微分方程：

$$f^{(4)}(t)-f(t)=1\text{，且 }f(0)=0,\ f'(0)=0,\quad f''(0)=1,\ f'''(0)=2.$$

九、(*6分*) 若函数$f(z)$在$|z|<2$内解析且只有一个零点$z=0$，$f'(z)\neq 0$，证明

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\frac{f(z)}{z^2f'(z)}\mathrm{d}z+\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\frac{zf'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z=1.$$