2020~2021复变函数与积分变换
(参考答案)

一. ADBC BCAC BDDA

二. 解: $\because u(x,y)+v(x,y)=y^2+2xy-x^2+2(x-y)$

两边对 x 求偏导可得: ······ 1'

$$u_x+v_x=2y-2x+2 \quad \cdots\cdots ①$$

两边对 y 求偏导得: ······ 2'

$$u_y+v_y=2y+2x-2 \quad \cdots\cdots ②$$

因为 $f(z)$ 解析, 所以 u, v 满足 C-R 方程 ······ 6'

$$u_x=v_y, \quad u_y=-v_x$$

代入②式可得:

$$u_x-v_x=2y+2x-2 \quad \cdots\cdots ③$$

由①③式 $u_x=2y \cdots (A)$, $v_x=-2x+2$ ·· ······ 8'

对A作偏积分 $u(x,y)=2xy+\varphi(y)$, $\varphi(y)$ 待定

又 $u_y=-v_x=2x-2$

$\therefore 2x+\varphi'(y)=2x-2$ 即 $\varphi'(y)=-2$

$\therefore \varphi(y)=-2y+C$

$\therefore u(x,y)=2xy-2y+C$ C为任意常数.

$v(x,y)=y^2-x^2+2x+C$ ······ 12'

三．解：∵函数 $f(z)$ 在复平面上有两个孤立奇点 $z=2$ 和 $z=3$

∴在 $z_0=4$ 展开时，可分解为如下解析环域

① $|z-4|<1$ ② $1<|z-4|<2$ ③ $|z-4|>2$ …3′

又 $f(z)=\dfrac{1}{z-3}-\dfrac{1}{z-2}$

∴① 当 $|z-4|<1$ 时

$$\frac{1}{z-3}=\frac{1}{z-4+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(z-4)^n$$

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z-4+2}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}(z-4)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-4)^n$$

$$\therefore f(z)=\frac{1}{z-3}-\frac{1}{z-2}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)(z-4)^n$$ …6′

② 当 $1<|z-4|<2$ 时

$$\frac{1}{z-3}=\frac{1}{z-4+1}=\frac{1}{z-4}\frac{1}{1+\frac{1}{z-4}}=\frac{1}{z-4}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-4)^n}$$

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z-4+2}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z-4}{2}}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{2^{n+1}}(z-4)^n$$

$$\therefore f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-4)^{n+1}}+\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{2^{n+1}}(z-4)^n$$ …9′

③ 当 $|z-4|>2$ 时

$$\frac{1}{z-3}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-4)^{n+1}}$$

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z-4+2}=\frac{1}{z-4}\frac{1}{1+\frac{2}{z-4}}=\frac{1}{z-4}\sum_{n=0}^{+\infty}(-2)^n\frac{1}{(z-4)^n}$$

$$\therefore f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n+(-2)^n\right]\cdot\frac{1}{(z-4)^{n+1}}$$ …12′

四. 1. 解法一. 由高阶导数公式

$$原式 = 2\pi i \cdot \frac{(1+z-e^z)^{(9)}}{9!}\Big|_{z=0} = -\frac{2\pi i}{9!}$$ ……5′

解法二. 由留数计算 $\because f(z)$ 在 $|z|=1$ 内只有一个孤立奇点 $z=0$

又 $f(z) = \frac{1+z-e^z}{z^{10}} = \frac{1}{z^{10}}\left(-\frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} \cdots - \frac{z^9}{9!} \cdots\right)$

$\therefore Res[f(z), 0] = -\frac{1}{9!}$

$\therefore 原式 = 2\pi i\left(-\frac{1}{9!}\right) = -\frac{2\pi i}{9!}$

2. 解: $\because$ 函数 $f(z) = \frac{1-\cos z}{\sin^3 z}$ 在 $|z|=1$ 内只有奇点 $z=0$.

又 $z=0$ 为 $1-\cos z$ 的二阶零点，是 $\sin^3 z$ 的三阶零点

$\therefore z=0$ 为 $f(z)$ 的一阶极点. ……2′

$$\therefore Res[f(z), 0] = \lim_{z\to 0} z \cdot \frac{1-\cos z}{\sin^3 z}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{1-\cos z}{\sin^2 z} = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{2\sin z\cos z} = \frac{1}{2}$$ ……4′

$\therefore 原式 = \frac{1}{2} \cdot 2\pi i = \pi i$ ……5′

五. 1. 解: 被积函数在 $|z|<2$ 内有三个孤立奇点 $z_1=0$, $z_{2,3}=\pm 1$.

设 $f(z)=\dfrac{z}{1-z^2}\cos\dfrac{1}{z}$. 则

$$原式 = 2\pi i \sum_{k=1}^{3} Res[f(z), z_k]$$

$$= -2\pi i\, Res[f(z), \infty]$$ …… 2′

$$= 2\pi i\, Res\left[f\left(\tfrac{1}{z}\right)\tfrac{1}{z^2}, 0\right]$$

$$\because f\left(\tfrac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2} = \frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z^2}}\cos z\cdot\frac{1}{z^2} = \frac{\cos z}{z(z^2-1)}$$

$$\therefore Res\left[f\left(\tfrac{1}{z}\right)\tfrac{1}{z^2}, 0\right] = \left.\frac{\cos z}{z^2-1}\right|_{z=0} = -1$$ …… 4′

…… 5′

$$\therefore 原式 = -2\pi i$$

注: 也可以用内部的留数计算:

$Res[f(z), -1] = -\frac{1}{2}\cos 1$, …… 1′

$Res[f(z), 1] = -\frac{1}{2}\cos 1$, …… 2′

$\because f(z) = z(1+z^2+z^4+\cdots)\left(1-\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{4!z^4}+\cdots\right)$ …… 4′

$\therefore Res[f(z), 0] = -\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{6!}\quad = \cos 1 - 1$

2. 解: 令 $z=e^{i\theta}$, 则 $d\theta=\dfrac{dz}{iz}$, $\sin\theta=\dfrac{z-z^{-1}}{2i}$ 则

$$I = 原式 = \oint_{|z|=1}\frac{2}{3z^2+10iz-3}dz = \oint_{|z|=1}\frac{2\,dz}{3(z+3i)(z+\frac{i}{3})}$$ …… 2′

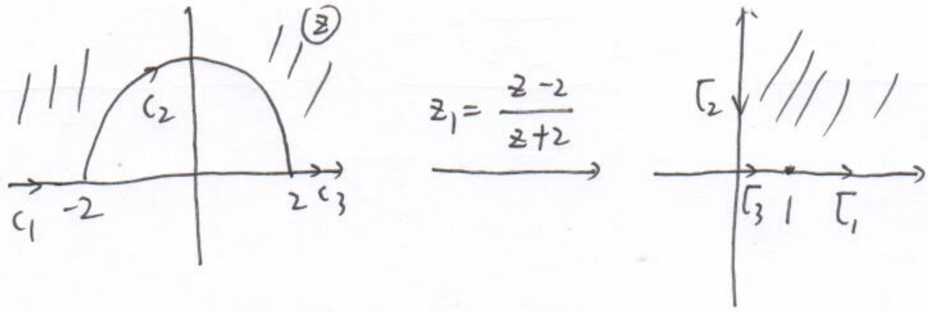
被积函数 $f(z)$ 在 $|z|=1$ 内只有一个一阶极点 $z=-i/3$, 而

$$Res\left[f(z), -\tfrac{i}{3}\right] = \left.\frac{2}{3(z+3i)}\right|_{z=-\frac{i}{3}} = -\frac{i}{4}$$ …… 4′

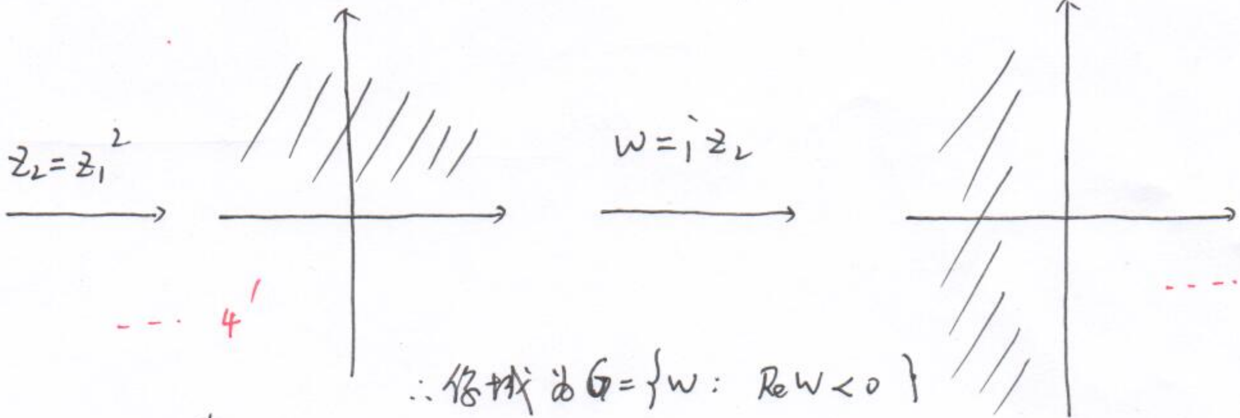
$$\therefore I = 2\pi i\cdot\left(-\frac{i}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$ …… 5′

六、解. 映射 $w=i\left(\frac{z-2}{z+2}\right)^2$ 可分解为如下映射的复合

$$z_1=\frac{z-2}{z+2},\quad z_2=z_1^2,\quad w=iz_2$$



…… 2'

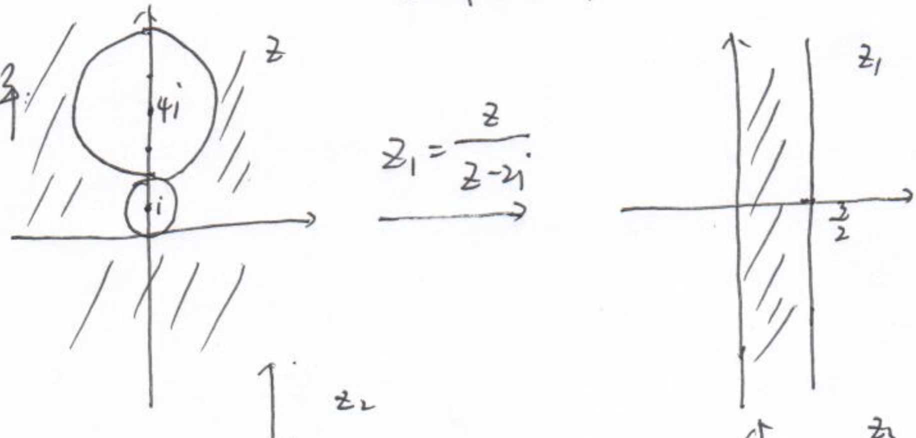


…… 4'

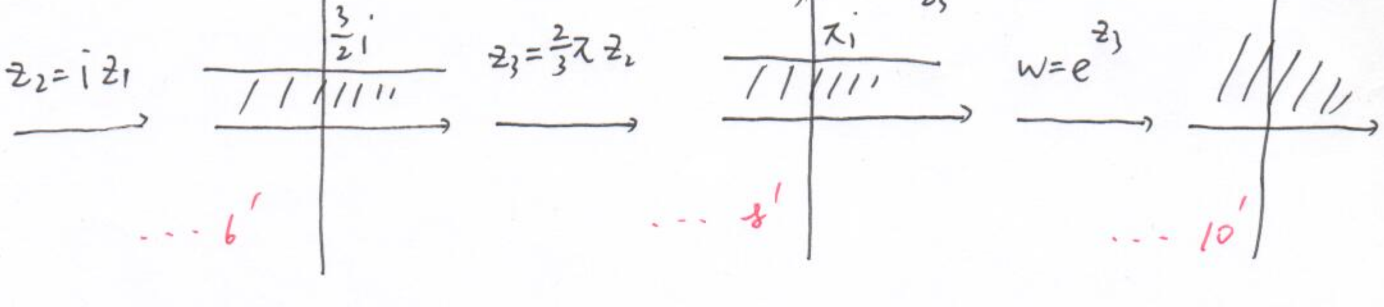
…… 6'

∴像域为 $G=\{w:\ \mathrm{Re}\,w<0\}$

七、解.



…… 4'



…… 6'

…… 8'

…… 10'

$$\therefore\ w=e^{\frac{2}{3}\pi\frac{iz}{z-2i}}$$

八. 记 $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$，对方程两边作拉氏变换得:

$$s^4F(s) - s^3f(0) - s^2f'(0) - sf''(0) - f'''(0) - F(s) = \frac{1}{s} \quad \cdots\ 4'$$

即 $$(s^4-1)F(s) = \frac{1}{s} + s + 2 = \frac{(1+s)^2}{s} \quad \cdots$$

$$\therefore F(s) = \frac{(s+1)^2}{(s^4-1)s} = \frac{s+1}{(s+1)s\cdot(s^2+1)}$$

$$= \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s} \quad \cdots\ 7'$$

$$\therefore f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = e^t - \sin t - 1 \quad \cdots\ 10'$$

九. 证明：∵ z 为 $f(z)$ 的零点，且 $f'(z)\neq 0$

∴ $z=0$ 为 $f(z)$ 的一阶零点，且不为 $f'(z)$ 的零点

对于积分 $I_1=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\frac{f(z)}{z^2f'(z)}\,dz$

$z=0$ 为 $\frac{f(z)}{z^2f'(z)}$ 的一阶极点

$$\therefore \operatorname{Res}\left[\frac{f(z)}{z^2f'(z)},0\right]=\lim_{z\to 0}\frac{f(z)}{zf'(z)}$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{f'(z)}{f'(z)+zf''(z)}=\frac{f'(0)}{f'(0)}=1 \quad \cdots 3'$$

（也可直接由Cauchy积分公式，高阶导公式

$$I_1=\left(\frac{f(z)}{f'(z)}\right)'\Bigg|_{z=0}=\frac{(f'(z))^2-f(z)f''(z)}{(f'(z))^2}\Bigg|_{z=0}=\frac{(f'(0))^2}{(f'(0))^2}=1$$）

对于积分 $I_2=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|}\frac{zf'(z)}{f(z)}\,dz$

∵ $z=0$ 为被积函数的可去奇点 $\cdots 6'$

∴ $I_2=0$

∴ $I_1+I_2=1$. 命题得证.