# 华中科技大学 2021～2022 学年第一学期

# “ 复变函数与积分变换 ”考试试卷(A 卷)

**考试方式：<u>  闭 卷  </u>　考试日期：<u> 2021-11-27 </u>　考试时长：<u> 150 </u>分钟**

院（系）：______________________　　专业班级：______________________

学　　号：______________________　　姓　　名：______________________

一、单项选择题 (**每题 2 分，共 24 分**).

1. 复数 $(-\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7})^{i}$ 的值为（　　）.

A. $e^{\frac{\pi}{7}-2k\pi}$，$(k\in Z)$，　　B. $e^{\frac{6\pi}{7}-2k\pi}$，$(k\in Z)$，

C. $e^{-\frac{\pi}{7}+2k\pi}$，$(k\in Z)$，　　D. $e^{-\frac{6\pi}{7}+2k\pi}$，$(k\in Z)$.

2. 复数 $i(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6})$ 的主辐角为（　　）.

A. $\frac{1}{6}\pi$，　B. $\frac{1}{3}\pi$，　C. $\frac{2}{3}\pi$，　D. $-\frac{1}{6}\pi$.

3. 设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在单位圆 $|z|<1$ 内解析，则下列说法不正确的是（　　）.

A. 二元函数 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在单位圆 $|z|<1$ 内可微；

B. 二元函数 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在单位圆 $|z|<1$ 内的偏导数连续；

C. 复变函数 $f(z)$ 在闭曲线 $|z|=1$ 上积分为 0；

D. 复变函数 $f(z)$ 单位圆 $|z|<1$ 内能够展开为泰勒级数.

4. 函数 $f(z)=x^2-y^2-2x+1+i(2xy-2y)$ 在点 $z=1+i$ 处的旋转角为(　　).

A. $\frac{\pi}{4}$，　B. $-\frac{\pi}{4}$，　C. $\frac{\pi}{2}$，　D. $-\frac{\pi}{2}$.

5. 设 $C$ 为椭圆曲线 $x^2+\frac{y^2}{2}=1$，则积分 $\oint_C(\cos z+\frac{1}{z-2}+\frac{1}{z-i})dz$ 的值为(　　).

A. 0，　B. $2\pi i$，　C. $4\pi i$，　D. $6\pi i$.

6. 若 C 为单位圆周，$f(z)=\oint_C \frac{\xi^2+1}{2(z-\xi)}d\xi$，则 $f'(2)$ 的值为(　　).

A． 0，　　B．$-2$，　　C． 2，　　D．4．

7. 级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2z)^n}$ 的收敛域为（　）.

A．$|z|<\frac{1}{2}$，　　B．$|z|>\frac{1}{2}$，　　C．$|z|<2$，　　D．$|z|>2$.

8. 函数 $\frac{\tan z}{z+\frac{\pi}{2}}$ 在点 $z=\frac{\pi}{4}$ 展开成 Taylor 级数的收敛半径为(　　).

A．$\frac{\pi}{4}$，　　B．$\frac{\pi}{2}$，　　C．$\frac{3\pi}{4}$，　　D．$\frac{5\pi}{4}$.

9. $z=0$ 是函数 $\frac{1+\sin z-e^z}{1-\cos^2 z}$ 何种类型的奇点？（　　）.

A 一阶极点，　　B．二阶极点，　　C．三阶极点，　　D．可去奇点.

10. 在区域 $\{z:-\pi<\mathrm{Imz}<\pi,\mathrm{Rez}>-1\}$ 上，下列哪个函数不为共形映射？（　　）

A． $w=z$，　　B．$w=\frac{1}{z}$，　　C．$w=1$，　　D．$w=e^z$.

11. 设 $f(t)=e^{-|t|}$，则 $f(t)$ 的 Fourier 变换为(　　).

A．$\frac{2}{1+\omega^2}$，　　B．$\frac{1}{1+\omega^2}$，　　C．$\frac{j\omega}{(1+\omega^2)}$，　　D．$\frac{2j\omega}{(1+\omega^2)}$.

12. 函数 $(2-t)^2\delta(t-1)$ 与函数 $\cos t$ 的卷积为(　　).

A．$4\cos t$，　　B．$\cos t$，　　C．$\cos(t-1)$，　　D．$\cos 1$.

二、(12 分) 设 $u(x,y)=x^3+ax^2y+bxy^2+y^3$，求 $a,b$ 的值使 $u(x,y)$ 为调和函数，并求出解析函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$.

三、(12 分) 把函数 $f(z)=\frac{1}{z^2(z-i)}$ 在下列环域内展开为 Laurent 级数：

(1) $0<|z|<1$,　　　　(2) $1<|z-i|<+\infty.$|

四、计算下列积分(每题5分，共10分).

1. $\int_C \left(\dfrac{3z}{\bar{z}}+\sin\dfrac{\pi z}{2}\right)dz$, 其中C为$|z|=1$上从$-1$到1的上半单位圆周,

2. $\oint\limits_{|z|=1} \dfrac{e^{iz}-e^{i2z}}{z^2}\mathrm{d}z$.

五、计算下列积分(每题5分，共10分).

1. $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{z^{13}}{(z^2-1)(z^8+1)}\mathrm{d}z$,

2. $\int_0^{+\infty} \dfrac{1}{(x^2+3)(x^2+5)}\mathrm{d}x$.

六、(6分) 求区域$D=\left\{z:|z-\dfrac{1}{2}|>\dfrac{1}{2},\operatorname{Re}z>0,\operatorname{Im}z>0\right\}$在映射 $w=e^{\frac{\pi}{3}i\left(\frac{z-1}{z}\right)}$ 下的像。

（答题过程需用图形表示）

七、(10分) 求一共形映射$w=f(z)$，将$z$平面上的区域$D=\left\{z:|z-\dfrac{1}{2}+\dfrac{i}{2}|>\dfrac{\sqrt{2}}{2},\operatorname{Im}z<0\right\}$

映射到$w$平面的单位圆。（答题过程需用图形表示）

八、(10分) 利用Laplace变换求解下面常微分方程组:

$$\begin{cases} x'(t)+y(t)=2e^t, & x(0)=1, \\ y'(t)-x(t)=-t, & y(0)=0. \end{cases}$$

九、(6分) 若函数$f(z)$在$|z|\le 2$上解析且满足$|f'(z)-1|\le|z|$，证明$|f''(1)|\le 3$.