华中科技大学 2022～2023 学年第一学期

“ 复变函数与积分变换 ”考试试卷(A 卷)

考试方式： 闭 卷 考试日期： 2022-11-13 考试时长： 150 分钟

院（系）：______________ 专业班级：______________

学 号：______________ 姓 名：______________

一、单项选择题（*每题 2 分，共 24 分*）.

1. 复数 $\sqrt{-\frac{1}{2}i}$ 的值为（ ）.

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{(k\pi+\frac{\pi}{4})i}\ (k=0,1)$，　　B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{(k\pi+\frac{\pi}{4})i}\ (k=0,1)$,

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{(k\pi-\frac{\pi}{4})i}\ (k=0,1)$，　　D. $-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{(k\pi-\frac{3\pi}{4})i}\ (k=0,1)$.

2. 复数 $\ln\left(-\sin\frac{\pi}{8}+i\cos\frac{\pi}{8}\right)$ 的值为（ ）.

A. $\frac{7}{8}\pi i$，　B. $\frac{5}{8}\pi i$，　C. $\frac{3}{8}\pi i$，　D. $\frac{1}{8}\pi i$.

3. 下列关系不正确的是（ ）.

A. $\overline{e^{z}}=e^{\overline{z}}$,　B. $\overline{\cos z}=\cos\overline{z}$,　C. $\overline{\ln z}=\ln\overline{z}$,　D. $\overline{\sin z}=\sin\overline{z}$.

4. 函数 $f(z)=x^2-iy$ 在下面哪个点可导？（ ）.

A. $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$，　B. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$，　C. $\frac{1}{2}i$，　D. $-\frac{1}{2}i$.

5. 设 C 为单位圆周，则积分 $\oint_C \frac{1}{z^2\sin(1/z)}dz$ 的值为( ).

A. 0，　B. $2\pi i$，　C. $-2\pi i$，　D. $4\pi i$..

6. 若 C 为单位圆周，则积分 $\oint_C \frac{e^z}{\cos z}dz$ 的值为( ).

A. 0，　B. $-2\pi i$，　C. $2\pi i$，　D. $4\pi i$.

7. 级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{e^{n-in}}$ 的收敛半径为 ( ).

A. 1， B. $1/e$， C. e^{1-i}， D. e .

8. 函数 $\frac{z-\sin z}{1-\cos z}+1$ 在 $0<|z|<2\pi$ 上展开成洛朗级数 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n z^n$ 时，系数 a_{-1} 为 ( ).

A. 0， B. 1/3， C. 1/2， D. 1.

9. $z=0$ 是函数 $\frac{1}{1-\cos z}-\frac{2}{z^2}$ 何种类型的孤立奇点？ ( ).

A 本性奇点， B. 二阶极点， C. 三阶极点， D. 可去奇点.

10. 下列哪种映射在扩充复平面上不是分式线性映射? ( )

A. $w=6z+1$， B. $w=1+1/z$ ， C. $w=z+1/z$， D. $w=z/3$.

11. 设 $f(t)=e^{jt}+\delta(t-1)$，则 $f(t)$ 的 Fourier 变换 $F(\omega)$ 为( ).

A. $e^{-j\omega}+\delta(\omega-1)$， B. $e^{-j\omega}+2\pi\delta(\omega-1)$，

C. $e^{-j\omega}-\delta(\omega-1)$， D. $e^{-j\omega}-2\pi\delta(\omega-1)$.

12. $\delta(1-t)$ 与 $\sin(t-1)$ 的卷积为( ).

A. $\sin(t-1)$， B. $-\sin(t-1)$， C. 0， D. $\sin(t-2)$.

二、(12 分) 已知解析函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 的实部 $u=e^{-x}(x\cos y+y\sin y)$，求解析函数 $f(z)$.

三、(12 分) 把函数 $f(z)=\frac{z+1}{(z-1)(z-2)}$ 在下列环域内展开为洛朗级数：

(1) $0<|z-1|<1$, (2) $1<|z|<2$.

四、计算下列积分(**每题 5 分，共 10 分**).

1. $\int_C(-2y+2xi)dz$, 其中 C 为从原点到 $3+i$ 的直线段.

2. $\oint_{|z|=0.5}\frac{1-\cos z}{z^5(1-z)}dz$.

五、计算下列积分(每题 5 分，共 10 分).

1. $\oint\limits_{|z|=3} \dfrac{z^{30}}{(z-4)(z^6+1)^5}\mathrm{d}z$，　　　　2. $\int_0^{+\infty} \dfrac{\cos x + x\sin x}{x^2+1}\mathrm{d}x$.

六、(6 分) 求区域 $D=\{z:|z|<1, \operatorname{Im} z>0\}$在映射 $w=\left(\dfrac{z-1}{z+1}e^{-\frac{\pi}{3}i}\right)^2$ 下的像.

（答题过程需用图形表示）

七、(10 分) 求一共形映射 $w=f(z)$，将区域 $D=\{z:1<\operatorname{Re} z<2, \operatorname{Im} z<0\}$映射到上半平面.**（答题过程需用图形表示）**

八、(10 分) 利用 Laplace 变换求解下面常微分方程：

$$f''(t)-2f'(t)+f(t)=-2\sin t,\quad f(0)=0,\ f'(0)=1.$$

九、 (6 分) 若函数 $f(z)$在全平面解析，且有$\lim\limits_{z\to\infty} f(z)/z=0$. 证明对复平面上任意一点$z_0$，都有 $f(z_0)=f(0)$.