华中科技大学2024～2025学年第一学期
“ 复变函数与积分变换 ”考试试卷(A卷)

考试方式： 闭 卷 **考试日期：** 2024-11-30 **考试时长：** 150 分钟

院（系）：________________ 专业班级：________________

学　　号：________________ 姓　　名：________________

一、单项选择题（*每题2分，共24分*）.

1\. 方程 $(iz)^2=|iz|^2\,(z\neq 0)$ 的解为（ ）

A．$z=\pm i$，　B．实数，　C．$z=1$，　D. 纯虚数.

2\. 设函数 $f(z)=\mathrm{Re}(z^2)\cdot\mathrm{Re}(z-1)$，则 $f'(1+i)$ 的值为（ ）

A . 0，　B . 1，　C . 2，　D．不存在.

3\. 已知 $\arg(z+2i)=\frac{\pi}{6}$， $\arg(z-2i)=-\frac{\pi}{3}$，则 z 的主辐角 $\arg z$ 为（ ）

A．$-\frac{\pi}{4}$，　B．$-\frac{\pi}{6}$，　C．$\frac{\pi}{4}$，　D．$\frac{\pi}{3}$.

4\. 设函数 $f(z)=z+\frac{1}{z}$， C 为单位圆周曲线 $\{z:|z|=1\}$,则积分 $\int_C (f(z)+2f'(z))dz$ 的值为（ ）

A．$2\pi i$，　B．$-2\pi i$，　C . 0 ，　D . 不确定.

5\. 复积分 $\int_{|z|=1}\frac{z\cos z}{(1-\sin z)^{1037}}dz$ 的值为（ ）

A．$-2\pi i$，　B．1，　C．0，　$2\pi i$ 。

6 下列说法不正确的是（ ）

A．设 $f(z)$ 在全平面解析，且 $|f(z)|$ 恒大于一正常数，则 $f(z)$ 为常值.

B．设 $f(z)$ 在全平面解析，且对某一常数 M 恒有 $\mathrm{Re}\,f(z)<M$，则 $f(z)$ 为常值.

C. 设 $f(z)$ 在在闭圆域 $\{z:|z|\le 1\}$ 上解析，若存在 $a>0$ 使得当 $|z|=1$ 时 $|f(z)|>a$，则

必有$\left|f(0)\right|>a$.

D．若 $f(z)$ 在单连通区域内 D 解析，则 $\oint_C \overline{f(\bar{z})}dz=0$，其中 C 为 D 内任一简单闭曲线.

7. 幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2^n}{\sin(in)}$ 的收敛性为（ ）

A．发散， B．绝对收敛， C．条件收敛， D．无法判断

8. 设 $e^{\frac{z}{z-1}}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-1)^n$，则 $a_{-2}=$（ ）

A. $-\dfrac{e}{2}$， B. $-\dfrac{1}{2}$， C. $\dfrac{1}{2}$， D. $\dfrac{e}{2}$

9. $z=\infty$ 是函数 $f(z)=\dfrac{1}{\sin z}$ 的（ ）

A. 可去奇点, B. 本性奇点, C. 极点, D. 非孤立奇点

10 下列命题中，正确的是（ ）

A. $w=z^n$（n 为自然数）在复平面上处处保角.

B. 映射 $w=z^3+4z$ 在 $z=0$ 处的伸缩率为 0.

C. 若 $w=f_1(z)$ 与 $w=f_2(z)$ 都是把单位圆 $\{z:|z|<1\}$ 映射到下半平面 $\{z:\operatorname{Im} z<0\}$ 的分式线性映射，那么 $f_1(z)=f_2(z)$.

D. 函数 $w=\bar{z}$ 构成的映射属于第二类保角映射.

11. 若 $f(t)$ 的 Fourier 变换为 $F(\omega)$，则 $F(t)$ 的 Fourier 变换为（ ）

A. $-\dfrac{1}{2\pi}f(\omega)$ B. $-2\pi f(\omega)$ C. $2\pi f(-\omega)$ D. $\dfrac{1}{2\pi}f(-\omega)$.

12. 设 $f_1(t)$ 的 Fourier 变换为 $F_1(\omega)$，则 $f_1(t)*e^{jt}$ 的 Fourier 变换为（ ）

A. $2\pi F_1(\omega)\delta(\omega-1)$， B．$2\pi F_1(\omega)\delta(\omega+1)$，

C．$F_1(\omega)\delta(\omega-1)$， D. $F_1(\omega)\delta(\omega+1)$.

二、(12 分) 设 $u(x,y)=e^y\cos ax+y$，求常数 a 及函数 $v(x,y)$，使得 $f(z)=u+iv$ 为解析函数且满足 $f(0)=1$.

三、(12 分) 将函数 $f(z)=\dfrac{z+2}{z^2(z-2)}$ 在下列环域内展开为 Laurent 级数：

（1）$2<|z|<+\infty$；　　　　（2）$0<|z-2|<2$.

四、计算下列积分(每题 5 分，共 10 分).

1. $\oint_{|z|=2}\dfrac{1+\cos\pi z}{(z-1)\sin z}dz$.　　　　2. $\oint_{|z|=2}(1+z^4)\sin\dfrac{1}{z}dz$.

五、计算下列积分(每题 5 分，共 10 分).

1. $\int_0^{\pi}\dfrac{\cos\theta}{5+3\cos\theta}d\theta$.　　　　2. $\oint_{|z|=2}\dfrac{z^{13}}{(3z^2-1)(z^{12}+1)}dz$.

六、(6 分) 求区域 $D=\{z:\ \operatorname{Im}z<0,\dfrac{\pi}{2}<\operatorname{Re}z<\pi\}$ 在映射 $f(z)=e^{iz+1}$ 下的像.

（答题过程需用图形表示）

七、(10 分) 求一共形映射 $w=f(z)$，将 z 平面上的区域 $D=\{z:|z-1|<2,|z+1|<2\}$ 映射到 w 平面的圆域 $\{w:|w-1|<1\}$.（答题过程需用图形表示）

八、(10 分) 利用 Laplace 变换求解下面常微分方程初值问题:

$$f''(t)+2f'(t)=-te^{-t},\qquad f(0)=0,\quad f'(0)=1.$$

九、(6 分) 若 $f(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$ 为一个次数大于零的复系数多项式, 证明

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}z^{n-1}|f(z)|^2dz=a_0\bar{a}_n.$$