华中科技大学 2024～2025 学年第一学期

“ 复变函数与积分变换 ”考试试卷(A 卷)

考试方式：闭 卷　考试日期：2024-11-30　考试时长：150 分钟

院（系）：＿＿＿＿＿＿＿＿　专业班级：＿＿＿＿＿＿＿＿

学　　号：＿＿＿＿＿＿＿＿　姓　　名：＿＿＿＿＿＿＿＿

一、单项选择题（每题 2 分，共 24 分）.

1. 方程 $(iz)^2=|iz|^2\ (z\neq 0)$ 的解为（D）

A. $z=\pm i$，　B. 实数，　C. $z=1$，　D. 纯虚数.

2. 设函数 $f(z)=\mathrm{Re}(z^2)\cdot\mathrm{Re}(z-1)$，则 $f'(1+i)$ 的值为（A）

A．0，　B．1，　C．2，　D．不存在.

3. 已知 $\arg(z+2i)=\dfrac{\pi}{6}$，$\arg(z-2i)=-\dfrac{\pi}{3}$，则 z 的主辐角 $\arg z$ 为（B）

A．$\dfrac{\pi}{4}$，　B．$-\dfrac{\pi}{6}$，　C．$\dfrac{\pi}{4}$，　D．$\dfrac{\pi}{3}$.

4. 设函数 $f(z)=z+\dfrac{1}{z}$，C 为单位圆周曲线 $\{z:|z|=1\}$，则积分 $\int_C (f(z)+2f'(z))dz$ 的值为（　）

A．$2\pi i$，　B．$-2\pi i$，　C．0，　D．不确定.

5. 复积分 $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{z\cos z}{(1-\sin z)^{1037}}dz$ 的值为（C）

A．$-2\pi i$，　B．1，　C．0，　$2\pi i$。

6 下列说法不正确的是（C）

A. 设 $f(z)$ 在全平面解析，且 $|f(z)|$ 恒大于一正常数，则 $f(z)$ 为常值.

B. 设 $f(z)$ 在全平面解析，且对某一常数 M 恒有 $\mathrm{Re}\, f(z)<M$，则 $f(z)$ 为常值.

C. 设 $f(z)$ 在在闭圆域 $\{z:|z|\le 1\}$ 上解析，若存在 $a>0$ 使得当 $|z|=1$ 时 $|f(z)|>a$，则

必有 $|f(0)| > a$.

D．若 $f(z)$ 在单连通区域内 D 解析，则 $\oint_C \overline{f(z)}dz = 0$，其中 C 为 D 内任一简单闭曲线.

7. 幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{\sin(in)}$ 的收敛性为 (B)

A．发散，　B．绝对收敛，　C．条件收敛，　D．无法判断

8. 设 $e^{\frac{z}{z-1}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-1)^n$，则 a_{-2} = (D)

A. $-\frac{e}{2}$，　B. $-\frac{1}{2}$，　C. $\frac{1}{2}$，　D. $\frac{e}{2}$

9. $z=\infty$ 是函数 $f(z)=\frac{1}{\sin z}$ 的（ ）

A. 可去奇点，　B. 本性奇点，　C. 极点，　D. 非孤立奇点

10 下列命题中，正确的是 (D)

A. $w=z^n$（n 为自然数）在复平面上处处保角.

B. 映射 $w=z^3+4z$ 在 $z=0$ 处的伸缩率为 0.

C. 若 $w=f_1(z)$ 与 $w=f_2(z)$ 都是把单位圆 $\{z:|z|<1\}$ 映射到下半平面 $\{z:\operatorname{Im} z<0\}$ 的分式线性映射，那么 $f_1(z)=f_2(z)$.

D. 函数 $w=\bar{z}$ 构成的映射属于第二类保角映射.

11. 若 $f(t)$ 的 Fourier 变换为 $F(\omega)$，则 $F(t)$ 的 Fourier 变换为 (C)

A. $-\frac{1}{2\pi}f(\omega)$　B. $-2\pi f(\omega)$　C. $2\pi f(-\omega)$　D. $\frac{1}{2\pi}f(-\omega)$.

12. 设 $f_1(t)$ 的 Fourier 变换为 $F_1(\omega)$，则 $f_1(t)*e^{jt}$ 的 Fourier 变换为 (A)

A. $2\pi F_1(\omega)\delta(\omega-1)$，　B. $2\pi F_1(\omega)\delta(\omega+1)$，

C. $F_1(\omega)\delta(\omega-1)$，　D. $F_1(\omega)\delta(\omega+1)$.

二、(12 分) 设 $u(x,y)=e^y\cos ax+y$，求常数 a 及函数 $v(x,y)$，使得 $f(z)=u+iv$ 为解析函数且满足 $f(0)=1$.

$= e^y\sin(-x)-x+C$

$v=-e^y\sin x-x$

$f(z)=u+iv$

三、(12分) 将函数 $f(z)=\dfrac{z+2}{z^2(z-2)}$ 在下列环域内展开为 Laurent 级数：

$f(z)=-\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z-2}$

（1）$2<|z|<+\infty$；　　　（2）$0<|z-2|<2$.

四、计算下列积分(每题5分，共10分).

1. $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{1+\cos\pi z}{(z-1)\sin z}dz$.　$-4\pi i$　　　2. $\displaystyle\oint_{|z|=2}(1+z^4)\sin\frac{1}{z}dz$.　$\frac{121\pi i}{60}$

五、计算下列积分(每题5分，共10分).

1. $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\cos\theta}{5+3\cos\theta}d\theta$.　$-\frac{11}{12}\pi$　　　2. $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{z^{13}}{(3z^2-1)(z^{12}+1)}dz$.　$\frac{2\pi i}{3}$

六、(6分) 求区域 $D=\{z:\ \operatorname{Im}z<0,\frac{\pi}{2}<\operatorname{Re}z<\pi\}$ 在映射 $f(z)=e^{iz+1}$ 下的像.

（答题过程需用图形表示）

七、(10分) 求一共形映射 $w=f(z)$，将 z 平面上的区域 $D=\{z:|z-1|<2,|z+1|<2\}$ 映射到 w 平面的圆域 $\{w:|w-1|<1\}$.（答题过程需用图形表示）

八、(10分) 利用 Laplace 变换求解下面常微分方程初值问题：

$$f''(t)+2f'(t)=-te^{-t},\qquad f(0)=0,\quad f'(0)=1.$$

$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)+2sF(s)-2f(0)=$

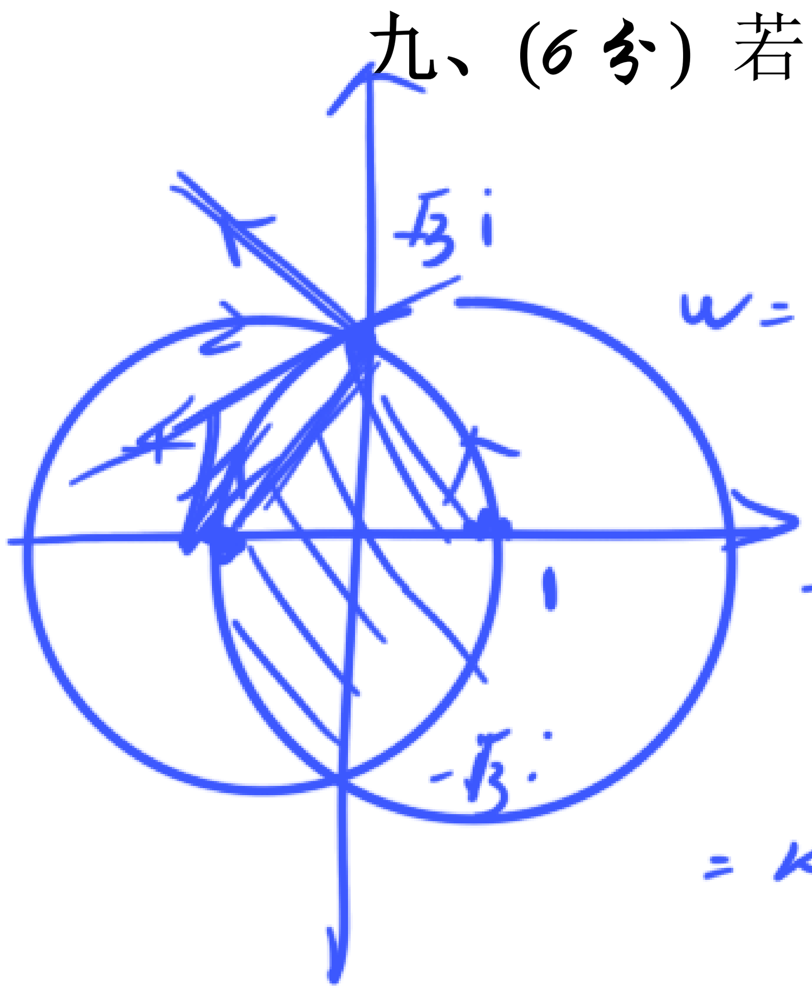
$(s^2+2s)F(s)-1=-\frac{1}{(s+1)^2}$

$F(s)=\frac{1}{(s+1)^2}$

$f(t)=te^{-t}$

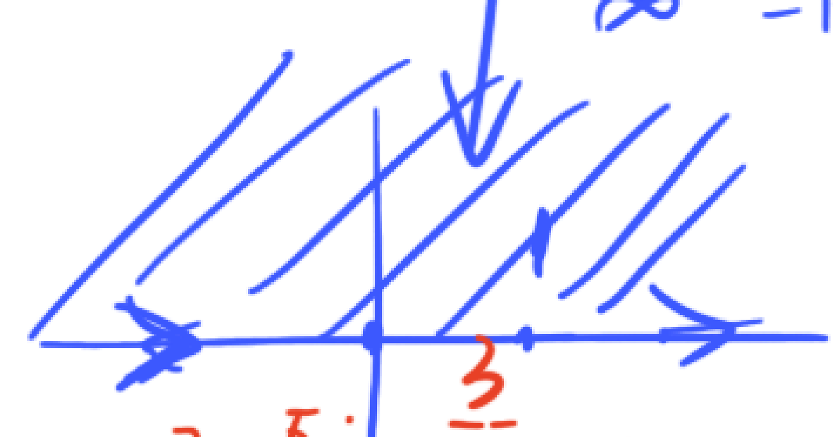
九、(6分) 若 $f(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$ 为一个次数大于零的复系数多项式, 证明

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}z^{n-1}|f(z)|^2dz=a_0\bar{a}_n.$$



$w=k\frac{z-\sqrt{3}i}{z+\sqrt{3}i}$

$z_3=z_2^2$



$w=\dfrac{\left(-\frac{2}{1+\sqrt{3}i}\cdot\frac{z-\sqrt{3}i}{z+\sqrt{3}i}\right)^{\frac{3}{2}}-i}{\left(-\frac{2}{1+\sqrt{3}i}\cdot\frac{z-\sqrt{3}i}{z+\sqrt{3}i}\right)^{\frac{3}{2}}+1}+1$

1. $\oint_{|z|=2} \frac{1+\cos \pi z}{(z-1)\sin z} dz$.

2. $\oint_{|z|=2} (1+z^4)\sin \frac{1}{z} dz$.

解: $(1+z^4)\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!}\frac{1}{z^3}+\frac{1}{5!}\frac{1}{z^5}\cdots\right)$

$\left(\frac{1}{5!}+1\right)\frac{1}{z}$

$I = 2\pi i \cdot \frac{5!+1}{5!}$

$= 2\pi i \frac{121}{120}$

$= \frac{121}{60}\pi i$

五、计算下列积分(每题 5 分，共 10 分).

一阶极点, $z=0$

解: $Res[f(z),0] = \lim_{z\to 0} \frac{(1+\cos\pi z)z}{(z-1)\sin z} = \frac{2}{-1}\cdot 1 = -2$

$f' \quad -\pi\sin\pi z = 0$

二阶零点

$z=1$ 为可去奇点

$f'' \quad -\pi^2\cos\pi z = \pi^2 \neq 0$

$I = 2\pi i Res = 2\pi i(-2) = -4\pi i$

五、计算下列积分(每题 5 分，共 10 分).

1. $\int_0^{\pi} \frac{\cos\theta}{5+3\cos\theta} d\theta$. 令 $e^{i\theta} = z$

$i e^{i\theta} d\theta = dz$

$d\theta = \frac{dz}{iz}$

2. $\oint_{|z|=2} \frac{z^{13}}{(3z^2-1)(z^{12}+1)} dz$.

解:

六、(6 分) 求区域 $D=\{z: \ \operatorname{Im} z<0, \frac{\pi}{2}<\operatorname{Re} z<\pi\}$ 在映射 $f(z)=e^{iz+1}$ 下的像.

$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\frac{z+z^{-1}}{2}}{5+3\frac{z+z^{-1}}{2}} \frac{dz}{iz}$

$= \frac{1}{2i}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{z+z^{-1}}{(10+3(z+z^{-1}))z} dz$

$= \frac{1}{2i}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{z^2+1}{(10z+3z^2+3)z} dz$

$= \frac{1}{2i}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{z^2+1}{(3z+1)(z+3)z} dz$

0 和 $-\frac{1}{3}$

$= \frac{1}{2i}\left(Res[f(z),0] + Res[f(z),-\frac{1}{3}]\right) =$

$= \frac{1}{3\times 1} + \lim_{z\to-\frac{1}{3}} (z+\frac{1}{3})\frac{z^2+1}{(3z+1)(z+3)z}$.

$\frac{\frac{1}{9}+1}{3(\frac{8}{3})\cdot(-\frac{1}{3})} = \frac{\frac{10}{9}}{-\frac{8}{3}} = -\frac{10}{24} = -\frac{5}{12}$

$= \frac{1}{2i}\times(\frac{1}{3}-\frac{5}{12})\times 6\pi i$

$= -\frac{1}{12}\pi$

解: $Res\left(\frac{\frac{1}{z^{13}}}{(\frac{3}{z^2}-1)(\frac{1}{z^{12}}+1)}\frac{1}{z^2}, 0\right)$

$Res\left(\frac{1}{(3-z^2)(1+z^{12})z}, 0\right)$

$= \lim_{z\to 0} \frac{1}{(3-z^2)(1+z^{12})}$

$= \frac{1}{3\times 1} \times 2\pi i$

$= \frac{2\pi i}{3}$

九、（6 分）若 $f(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$ 为一个次数大于零的复系数多项式，证明

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1} z^{n-1}|f(z)|^2dz=a_0\bar{a}_n.$$

解：证

$$\frac{1}{2\pi i}\oint z^{n-1}f(z)\cdot\overline{f(z)}\,dz$$

$$\begin{cases}\overline{f(z)}=\bar{a}_0+\bar{a}_1\bar{z}+\bar{a}_2\bar{z}^2\cdots\bar{a}_n\bar{z}^n\\ f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2\cdots\cdots a_nz^n\end{cases}$$

$$\oint_{C=1} z^{n-1}(a_0+a_1z\cdots\cdots a_nz^n)(\bar{a}_0+\bar{a}_1\bar{z}+\bar{a}_2\bar{z}^2\cdots\bar{a}_n\bar{z}^n)$$

$$=a_0\bar{a}_n\cdot z^{n-1}\cdot\bar{z}^n$$

z 和 $\bar{z}$ 在单位圆上 $|z|^2=1$

$$\oint_{|C|=1} a_0\bar{a}_n\left(\frac{1}{z}\right)z^{n}\cdot{}^{2}$$

一阶极点

$$=\frac{2\pi i\;a_0\bar{a}_n}{2\pi i}$$

$$=a_0\bar{a}_n$$

, -3 $-(\frac{1}{z-1})^2+\frac{1}{z-1}$

解：$Res[f(z),1]=\lim_{z\to1}\frac{e^z}{(z+3)^2}=\frac{e}{16}$

$Res[f(z),-3]=\lim_{z\to-3}(\frac{e^z}{z-1})'=\frac{e^z(z-1)-e^z}{(z-1)^2}$

$\lim_{z\to-3}e^z\frac{z-2}{(z-1)^2}=e^{-3}\cdot\frac{-5}{16}$

$I=(-\frac{5}{16}e^{-3}+\frac{1}{16}e)2\pi i$

$=\frac{e-5e^{-3}}{8}\pi i$

四、计算下列积分(共 10 分)．(每小题 5 分)

1．$\oint_{|z|=\pi}\frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}dz$．　　2．$\oint_{|z|=2}\frac{z}{z+1}e^{\frac{z}{z+1}}dz$．

解：-1 一个极点，

$Res[\frac{\frac{1}{z}}{\frac{1}{z}+1}e^{\frac{\frac{1}{z}}{\frac{1}{z}+1}}\cdot\frac{1}{z^2}$

$Res[\frac{1}{z}\frac{1}{1+z}\cdot e^{\frac{1}{1+z}},0]$

$(\frac{1}{1+z}\cdot e^{\frac{1}{1+z}})'$

$(\frac{e^{\frac{1}{1+z}}}{z+1})'$

$\frac{e^{\frac{1}{1+z}}(-\frac{1}{(1+z)^2})(z+1)-e^{\frac{1}{1+z}}}{(z+1)^2}$

$\frac{e(-1)-e}{1}=-2e$

$=(-2e)2\pi i$

$=-4\pi e i$

五、计算下列积分(共 10 分)．(每小题 5 分)

1．$\int_0^{\pi}\frac{\cos\theta}{5-4\cos\theta}d\theta$．　　2．$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+4x+13}dx$．

解：$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\frac{z+z^{-1}}{2}}{5-4\frac{z+z^{-1}}{2}}\frac{dz}{iz}$

$\frac{z+z^{-1}}{10-4(z+z^{-1})}$

$\frac{1}{2i}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{z^2+1}{(10z-4z^2-4)}\frac{1}{z}dz$

$\frac{-1}{4i}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{z^2+1}{(2z^2-5z+2)z}dz$

$=\frac{i}{4}\int_{|z|=1}\frac{z^2+1}{(z-2)(2z-1)z}dz$

$=$ $\lim_{z\to\frac{1}{2}}\frac{z^2+1}{2(z-2)z}=\frac{\frac{1}{4}+1}{2(\frac{1}{2}-2)\frac{1}{2}}=\frac{\frac{5}{4}}{-\frac{3}{2}}=-\frac{5}{6}$

$\lim_{z\to0}\frac{z^2+1}{(z-2)(2z-1)}=\frac{1}{(-2)(-1)}=\frac{1}{2}$

$=\frac{i}{4}(\frac{1}{2}-\frac{5}{6})\times2\pi i$

$=\frac{6}{12}-\frac{10}{12}$

$=\frac{4}{12}\cdot2\pi i$

$=+\frac{1}{6}\pi$

解：$Im\int\frac{z\cdot e^{iz}}{z^2+4z+13}dz$

$16-4\times13$　52

$\frac{-4\pm\sqrt{-36}}{2}$

$\frac{-4\pm6i}{2}=-2\pm3i$　$-2+3i$

$\int\frac{z e^{iz}}{(z+2+3i)(z+2-3i)}dz$

$Res=\frac{(-2+3i)e^{i(-2+3i)}}{(-2+3i+2+3i)}$　$3i$ $-3-2i$

$=\frac{(-2+3i)e^{-3-2i}}{3}$ $2\pi i$

$2\pi i\frac{(-2+3i)e^{-3}\cdot e^{-2i}}{3}\pi$

$=\frac{\pi e^{-3}}{3}(-2+3i)(\cos(-2)+i\sin(-2))\pi$

$I=\frac{-2\sin(-2)+3\cos(-2)}{3}e^{-3}$

$=\frac{2\sin2+3\cos2}{3}e^{-3}\pi$