《复变函数与积分变换》
2024-2025学年第一学期期末补考试卷

一、单项选择题.

1. 设 $e^z+i=\sqrt{3}$ ，则 z 的值为（　　）$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots)$

A. $\ln 2+i\left(2k\pi-\frac{\pi}{6}\right)$

B. $\ln 2+i\left(2k\pi-\frac{\pi}{3}\right)$

C. $\ln 2+i\left(2k\pi+\frac{\pi}{6}\right)$

D. $\ln 2+i\left(2k\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

2. 复数 $(\sqrt{3}+i)^{-3}$ 的主辐角为（　　）

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. $-\frac{\pi}{2}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $-\frac{\pi}{3}$

3. 设函数 $f(z)=\left(x^2-y^2+x\right)+i\left(2xy+y^2\right)$ ，则 $f(z)$ 在（　　）上可导.

A. 直线 $x=\frac{1}{2}$　　B. 直线 $x=-\frac{1}{2}$

C. 直线 $y=\frac{1}{2}$　　D. 直线 $y=-\frac{1}{2}$

4. 设 C 为单位圆周，则积分 $\oint_C \frac{\bar{z}\sin z}{z}dz$ 的值为（　　）.

A. 0　　B. $2\pi i$　　C. $-2\pi i$　　D. $4\pi i$

5. 复积分 $\int_{|z|=1}\frac{\sin z}{(1+\cos z)^{2025}}dz$ 的值为（　　）

A. $-2\pi i$　　B. 1　　C. 0　　D. $2\pi i$

6. 函数 $f(z)=\frac{\cos z}{z}$ 在无穷远点处的留数为（　　）

A. 0　　B. 1　　C. -1　　D. $-\frac{1}{2}$

7. $a_n=\begin{cases}3^n, & n=0,1,2\ldots\\ 4^n, & n=-1,-2,\ldots\end{cases}$ ，则双边幂级数 $\sum_{m=-\infty}^{+\infty}a_n z^n$ 的收敛域为（　　）

A. $\frac{1}{4}<|z|<\frac{1}{3}$

B. $3<|z|<4$

C. $\frac{1}{4}<|z|<3$

D. $\frac{1}{3}<|z|<4$

8. 函数 $f(z)=\sin\frac{1}{2-z}$ 在 $z=i$ 处 Taylor 展式的收敛半径是（　　）

A. 2　　B. 1　　C. $\sqrt{5}$　　D. $\sqrt{3}$

9. $z=0$ 是函数 $f(z)=z^8\sin\frac{1}{z}$ 的（　　）

A. 可去奇点　　B. 本性奇点　　C. 极点　　D. 非孤立奇点

10. 函数 $w=z^2$ 将 z 平面上的直线 $y=x+1$ 映射为 $w(=u+vi)$ 平面上的（　　）

A. 曲线 $v=\frac{1}{2}\left(1-u^2\right)$

B. 曲线 $v=\frac{1}{2}\left(u^2-1\right)$

C. 曲线 $u=\frac{1}{2}\left(1-v^2\right)$

D. 曲线 $u=\frac{1}{2}\left(v^2-1\right)$

11. 设 $F(\omega)=1+\delta(\omega+1)$ ，则 $F(\omega)$ 的 Fourier 逆变换为（　　）

A. $\delta(t)+\frac{1}{2\pi}e^{-jt}$　　B. $\delta(t)+\frac{1}{2\pi}e^{jt}$

C. $\frac{1}{2\pi}\delta(t)+\frac{1}{2\pi}e^{-jt}$　　D. $\frac{1}{2\pi}\delta(t)+\frac{1}{2\pi}e^{jt}$

12. 函数 $e^{-|t|}$ 的 Fourier 变换为（　　）

A. $\frac{2}{1-w^2}$　　B. $-\frac{2}{1+w^2}$　　C. $\frac{2}{w^2-1}$　　D. $\frac{2}{1+w^2}$

二、(共 12 分).

设 $u(x,y)=\phi(x)+y^4-6x^2y^2-1$ ，$\phi(0)=\phi'(0)=0$ ，求函数 $\phi(x)$ 及 $v(x,y)$ ，使得 $f(z)=u+vi$ 为解析函数且满足 $f(1)=0$.

三、(共 12 分).

将函数 $f(z)=\frac{z}{z^2+1}$ 在下列环域内展开为Laurent级数:

（1） $1<|z|<+\infty$ ；

（2） $0<|z-i|<2$.

四、计算下列积分.

1. $\oint_{|z|=2}\frac{\cos z}{z^2-1}dz$

2. $\oint_{|z|=2}\frac{z^3\sin\frac{1}{z}}{1-z}dz$

五、计算下面积分.

1. $\oint_{|z|=2} \frac{z^{11}}{(4z^4-1)(z^8+1)}dz$

2. $\int_{-\infty}^{0} \frac{x\sin x}{x^2+64}dx$

六、(共 6 分).

求区域 $D=\{z:|z+i|>1,\operatorname{Im} z<0\}$ 在映射 $w=e^{\frac{2\pi}{z}}-i$ 下的像.（答题过程需用图形表示）

七、(共 10 分).

求一共形映射 $w=f(z)$ ，将 z 平面上的区域 $D=\left\{z:\operatorname{Re} z>0, 0<\operatorname{Im} z<\frac{3\pi}{2}\right\}$ 映射到 w 平面的上半平面。（答题过程需用图形表示）

八、(共 10 分).

利用 Laplace 变换求解下面常微分方程： $f''(t)-f'(t)-2f(t)=-3\sin t-\cos t, f(0)=1, f'(0)=3$.

九、(共6分).

若 $f(z),g(z)$ 为复平面上的两个解析函数，且存在一个实常数 k 使得对任意复数 z 都有 $\operatorname{Re} f(z) \le k \operatorname{Re} g(z)$

证明：存在常数 b 满足 $f(z)=kg(z)+b$.

2024-2025 学年第一学期期末补考试卷参考答案

【本套试题详细解析（实时更新）】