

Revisão de Álgebra Linear

Anizio Silva Correia Júnior
Mariana Tiemi Yoshioka

21 de maio de 2026

Revisão de Álgebra Linear

© 2025 por Anizio Silva Correia Júnior e Mariana Tiemi Yoshioka.

Material revisado por Luana Aparecida Soares Costa, Maria Eduarda Martins Fernandes e Marina Sayuri Yoshidome Vieira.



Este trabalho está licenciado sob uma Licença **Creative Commons Atribuição-NãoComercial-CompartilhaIgual 4.0 Internacional** (CC BY-NC-SA 4.0).

Para visualizar uma cópia desta licença, visite:

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Projeto de Extensão – IMPA Tech

Orientação: Prof.^a Nara Bobko

Sumário

1	Introdução	5
1.1	Álgebra Vetorial	5
1.2	Geometria Analítica	17
2	Matrizes e Sistemas Lineares	23
2.1	Matrizes	23
2.1.1	Matriz Inversa	27
2.1.2	Determinante	28
2.2	Sistemas Lineares	32
2.2.1	Matrizes como Sistemas Lineares	34
2.3	Combinação Linear e Dependência Linear	41
3	Espaços Vetoriais	45
3.1	Espaços Vetoriais	46
3.1.1	Subespaços Vetoriais	48
3.2	Base, Dimensão e Coordenadas	48

Prefácio

Este documento aborda os conteúdos do curso de Álgebra Linear, ministrado no período 2025.1 do curso Bacharelado em Matemática da Tecnologia e Inovação, do Instituto de Matemática Pura e Aplicada e Tecnologia – IMPA Tech. O objetivo deste material é auxiliar os discentes do IMPA Tech que estão no primeiro ano da graduação nos estudos da presente matéria, bem como servir de revisão para as demais turmas. Sua construção foi feita com a orientação da professora Nara Bobko, em seu projeto de extensão para elaboração de materiais de estudo para Álgebra Linear.

Assim como o curso de Álgebra Linear do IMPA Tech, este material não apresenta pré-requisitos, a não ser o conhecimento da nossa língua materna e um nivelamento de matemática em conceitos básicos, que podem ser facilmente resgatados durante a leitura.

No capítulo 1, o foco será, principalmente, resgatar e abordar assuntos básicos, necessários ao discente para o aproveitamento completo do curso de Álgebra Linear, e que possivelmente não foram apresentados no Ensino Médio. Isso inclui noções básicas de vetores, bem como de objetos geométricos como retas e planos.

O segundo capítulo inicia com o conceito de matrizes, que são relacionadas fortemente com sistemas lineares, bem como transformações lineares, coordenadas e diversos outros objetos da Álgebra Linear. Ao final do capítulo, é dada uma noção inicial de combinação e dependência linear.

Em seguida, o capítulo 3 apresenta o coração da Álgebra Linear, que são os espaços vetoriais, a partir de ideias como base de um espaço vetorial e ortogonalidade.

Espera-se um bom aproveitamento deste material, que apresenta tópicos de Álgebra Linear de forma direta e clara, com algumas motivações geométricas e no espaço real.

Feito por:
Anizio & Mariana

A minha colaboração neste material foi motivada, majoritariamente, pelas dificuldades pessoais que enfrentei ao cursar Álgebra Linear. Maior parte do que abordei aqui foi no capítulo 3 (Espaços vetoriais). Busquei um viés que facilite o acompanhamento do curso, servindo tanto para o aprendizado inicial quanto para revisão. Os exercícios aqui presentes foram selecionados de listas anteriores e de referências clássicas da bibliografia.

É notável que esta disciplina é fundamental. Nas quatro ênfases do IMPA Tech, a Álgebra Linear é totalmente necessária, assim como o Cálculo. As matérias do primeiro ano são as mais importantes em um contexto geral, o domínio desses conceitos é a base para um estudante em qualquer uma das ênfases. Então, dê o gás.

Para o aprofundamento teórico, recomendo as obras de Sheldon Axler e a do Halmos. Ambos são textos que focam na estrutura de operadores lineares, mais voltados à aplicações diretas em matemática **pura**, como análise funcional.

Grande parte dos exemplos e observações nesse texto são baseados no espaço real ($\mathbb{R}^n$), mas o leitor não deve se limitar a esse espaço. A Álgebra Linear é muito mais abrangente do que isso. Se tiver interesse em estruturas mais abstratas pesquise sobre espaços duais, de polinômios e de funções. Um exercício valioso durante a leitura é tentar transpor as definições e teoremas apresentados aqui para esses contextos mais abstratos.

Esse texto ainda está em produção, você consegue acessar a versão mais recente através [desse link aqui](#).

Feito por:
Anizio

A ideia principal desse material é de revisão. Por isso, optei por omitir grande parte das demonstrações e incentivar o leitor a tentar provar os teoremas mais intuitivos ou importantes. Ainda assim, tentei dar alguma motivação, para que o resumo ficasse mais instigante.

Embora esse material não tenha pré-requisitos, é interessante acompanhar com um livro e com as devidas aulas, caso esteja fazendo o curso de Álgebra Linear pela primeira vez. Além disso, recomendo que o aluno que estiver no início dessa “fase acadêmica” busque se acostumar com o linguajar matemático. Incentivamos isso com o próprio material, utilizando símbolos como “ $\exists$ ”, “ $\forall$ ”, e tantos outros que acompanharão o leitor durante o curso, e talvez nos próximos anos, especialmente se estiver fazendo um curso de Matemática.

Com relação ao material principal de fato, livros rigorosos são muito bons e densos, a exemplo do Hoffman e do Lang. Isso é fortemente recomendado para quem já está acostumado com abstração, ou para quem quer se acostumar para entrar numa matemática mais pura. No entanto, caso o leitor prefira algo mais didático, queira melhorar a base matemática e ver aplicações, recomendo os livros do Reginaldo Santos (GAAL [3]), do Anton (Álgebra linear com aplicações [4]) e de Lay/McDonald (Álgebra Linear e Suas Aplicações [5]). Estes foram inclusive alguns dos livros que utilizamos para a construção desse material.

Por fim, desejo bons estudos. Apesar de ser muito conteúdo, é uma disciplina básica e essencial tanto para os puristas, quanto para os que buscam aplicação. Aos que estão iniciando, aproveitem essa parte inicial; aos que estão revisando, espero que tirem bom proveito para rever (quase) tudo concisamente.

Feito por:
Mariana

Capítulo 1

Introdução

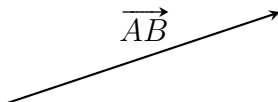
Para iniciar os estudos de Álgebra Linear, é interessante apresentar, inicialmente, conceitos básicos para visualização e estruturação do conhecimento. Nesse sentido, entender vetores na perspectiva geométrica, ou seja, no plano ($\mathbb{R}^2$) ou no espaço ($\mathbb{R}^3$), é mais intuitivo em um primeiro contato. Nos próximos capítulos, em especial no capítulo 3, a definição de vetores será ampliada para outros espaços vetoriais, com um maior nível de abstração.

1.1 Álgebra Vetorial

Embora iniciemos com Álgebra Vetorial e não Geometria Analítica, é interessante começar com um ponto de vista mais geométrico.

De modo geral, **vetores (geometricamente)** são objetos matemáticos que possuem módulo, direção e sentido.

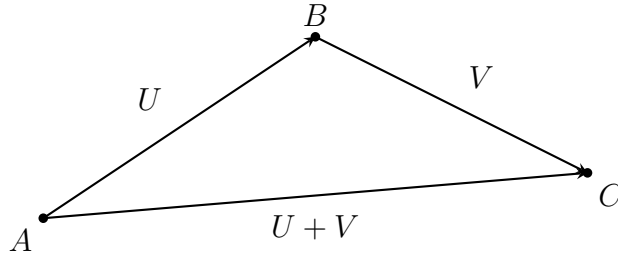
Usualmente, um vetor é representado por segmentos de retas orientados equipolentes, ou seja, que apresentam mesmo tamanho, direção e sentido.



Note que, por essa definição, um vetor não possui “origem fixa” e pode ser representado por diferentes segmentos de reta orientados.

Definição 1.1.1. *Sejam U e V vetores representados por $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$, respectivamente. A*

soma de vetores $U+V$ é definida como o vetor representado pelo segmento de reta orientado $\overrightarrow{AC}$.



Proposição 1.1.2. *Sejam V , W e U vetores. A soma de vetores satisfaz as seguintes propriedades:*

- i) $V + W = W + V$ (comutatividade)*
- ii) $V + (W + U) = (V + W) + U$ (associatividade)*
- iii) $\exists$ vetor $\bar{0}$, tal que $V + \bar{0} = V$ (existência da identidade aditiva)*

Abaixo seguem ilustrações das propriedades i) e ii).

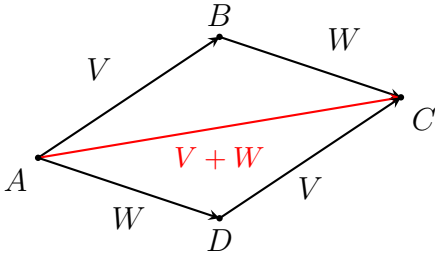


Figura 1.1: Representação da comutatividade.

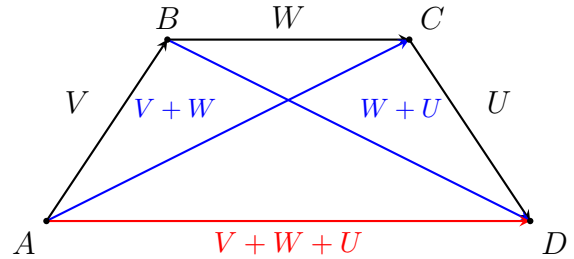


Figura 1.2: Representação da associatividade.

Definição 1.1.3. *Seja V um vetor. O vetor **simétrico**, denotado por $-V$, é o vetor tal que*

$$V + (-V) = \bar{0}$$

Definição 1.1.4. *Sejam V e W vetores. A **diferença W menos V** é definida como*

$$W - V = W + (-V)$$

Definição 1.1.5. *Sejam $V \neq \bar{0}$ um vetor e $\alpha \neq 0$ um escalar real. A **multiplicação do vetor V por um escalar α** , denotada por αV , é definida pelo vetor tal que:*

- i) seu módulo é $|\alpha||V|$, onde $|V|$ é o módulo de V ;
- ii) a sua direção é a mesma de V ;
- iii) tem sentido de V se $\alpha > 0$, e sentido de $-V$ se $\alpha < 0$;
- iv) Caso $V = \bar{0}$ ou $\alpha = 0$, $\alpha V = \bar{0}$.

Definição 1.1.6. Sejam V e W vetores. W é **paralelo** a V se ambos têm a mesma direção.

Note, portanto, que, para um vetor qualquer W ser paralelo a outro vetor V , basta que exista um $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $W = \alpha V$.

Definição 1.1.7. Seja V um vetor. As **componentes de V** são cada elemento das coordenadas que representam o ponto final com relação à origem do sistema de coordenadas escolhido.

Se V está no plano ($\mathbb{R}^2$ ou **espaço euclidiano¹ bidimensional**), então suas coordenadas são uma dupla de dois números reais, denotadas usualmente por (v_1, v_2) .

Se V está no espaço ($\mathbb{R}^3$ ou **espaço euclidiano tridimensional**), então suas coordenadas são uma tripla de três números reais, denotadas usualmente por (v_1, v_2, v_3) .

Se V está em “dimensões maiores” ($\mathbb{R}^n$ ou **espaço euclidiano n -dimensional**), então suas coordenadas são uma n -upla de n números reais, denotadas usualmente por $(v_1, \dots, v_n)$.

Na Figura 1.3, seguem ilustrações de como coordenadas funcionam no plano e no espaço.

Perceba que, para verificar as componentes de um vetor qualquer W representado por um segmento $\overrightarrow{AB}$, basta subtrair as suas coordenadas, de modo que:

$$W = \overrightarrow{AB} \Rightarrow \begin{cases} w_1 = x_B - x_A \\ w_2 = y_B - y_A \end{cases} \Rightarrow W = (x_B - x_A, y_B - y_A)$$

Para o $\mathbb{R}^3$, a subtração ocorre da mesma forma.

Com isso, note que as operações ficam muito mais fáceis, sem depender sempre do apelo geométrico. Assim, podemos buscar uma nova forma de fazer as operações básicas entre vetores (soma e multiplicação por escalar):

¹Por ora, não se preocupe em entender exatamente o que é um espaço euclidiano, e considere essa uma definição mais simplificada.

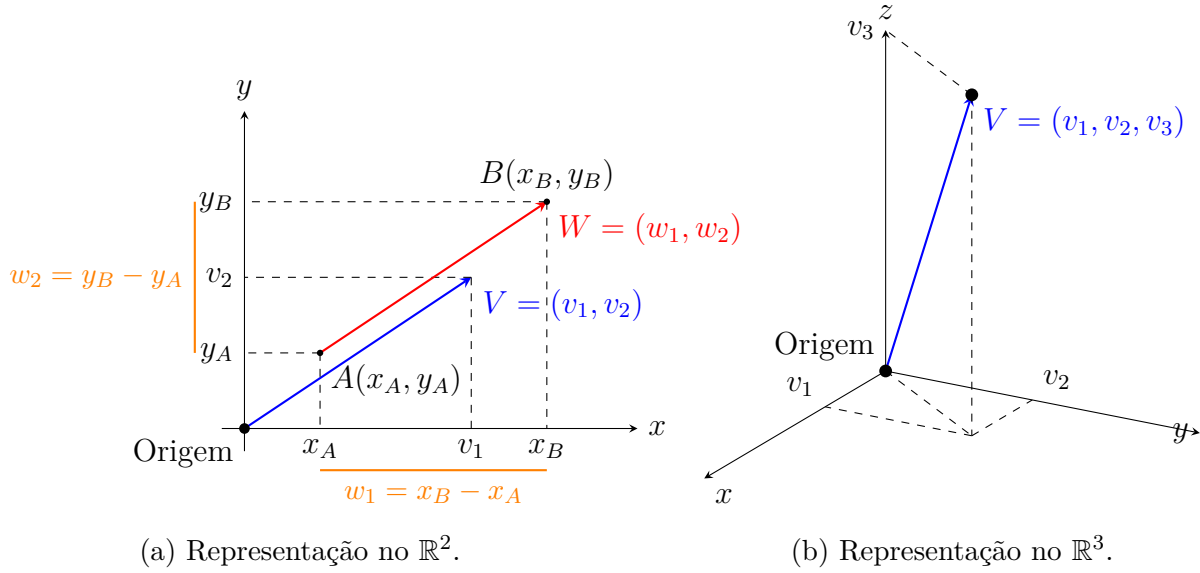


Figura 1.3: Componentes de vetores em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

Proposição 1.1.8. *Sejam $V, W \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então,*

i) $V + W = (v_1 + w_1, v_2 + w_2)$

ii) $\alpha V = (\alpha v_1, \alpha v_2)$

Abaixo temos uma ilustração da proposição.

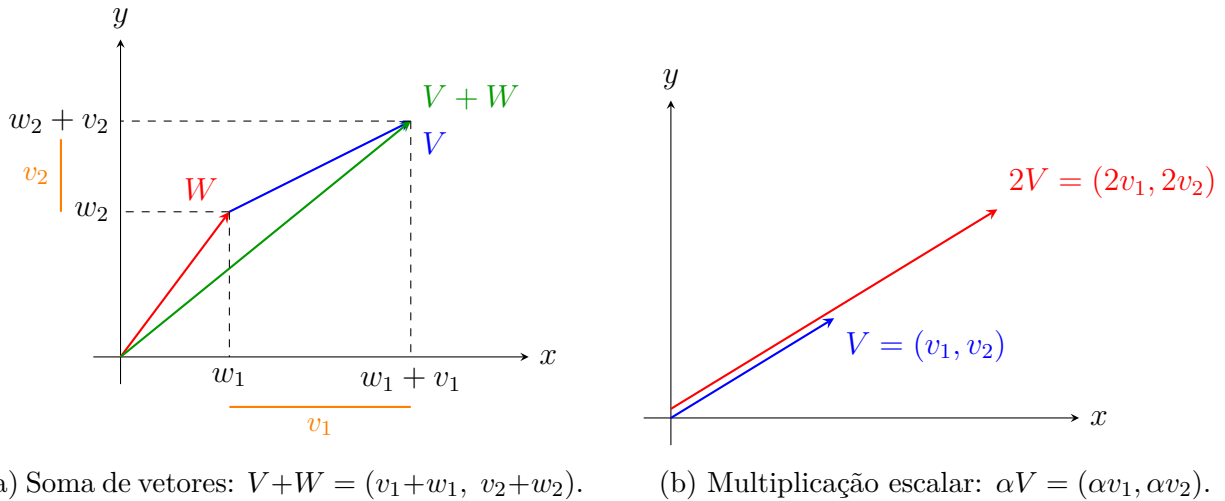


Figura 1.4: Ilustração da soma de vetores e multiplicação escalar em $\mathbb{R}^2$.

Para o $\mathbb{R}^3$, essas operações ocorrem da mesma forma. Generalizando para qualquer dimensão

n , temos:

Proposição 1.1.9. *Sejam $V = (v_1, \dots, v_n), W = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então,*

$$i) \ V + W = (v_1 + w_1, \dots, v_n + w_n)$$

$$ii) \ \alpha V = (\alpha v_1, \dots, \alpha v_n)$$

Agora, e se fizermos ambas as operações ao mesmo tempo? Então teremos uma combinação linear!

Definição 1.1.10. *Sejam $V_1, \dots, V_k \in \mathbb{R}^n$ vetores e $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ escalares. Seja W um vetor tal que*

$$W = \alpha_1 V_1 + \dots + \alpha_k V_k.$$

*Então, W é **combinação linear** de $V_1, \dots, V_k$.*

Abordaremos melhor esse conceito posteriormente, na Seção 2.3.

A partir da definição de coordenadas e da soma/multiplicação de vetores por meio delas, podemos provar as seguintes propriedades:

Teorema 1.1.11. *Sejam U, V e W vetores e α e β escalares. Então,*

- | | |
|--|---|
| <i>i) $U + V = V + U$ (comutatividade);</i> | <i>v) $\alpha(\beta U) = (\alpha\beta)U$
(associatividade para multiplicação por escalar);</i> |
| <i>ii) $(U + V) + W = U + (V + W)$
(associatividade para soma);</i> | <i>vi) $\alpha(U + V) = \alpha U + \alpha V$ (distributividade);</i> |
| <i>iii) $U + \bar{0} = U$ (identidade aditiva);</i> | <i>vii) $(\alpha + \beta)U = \alpha U + \beta U$ (distributividade);</i> |
| <i>iv) $U + (-U) = \bar{0}$ (inverso aditivo);</i> | <i>viii) $1 \cdot U = U$ (identidade multiplicativa).</i> |

Outra ideia muito importante é saber o módulo do vetor a partir de seus componentes. Para isso, vamos definir o que chamamos de norma euclidiana.

Definição 1.1.12. *Seja $V = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$. O seu comprimento, também chamado de **norma euclidiana de V** e denotado por $\|V\|$, é dado por*

$$\|V\| = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}.$$

Exemplo 1.1.13. Para um vetor $V \in \mathbb{R}^2$, temos que

$$\|V\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}.$$

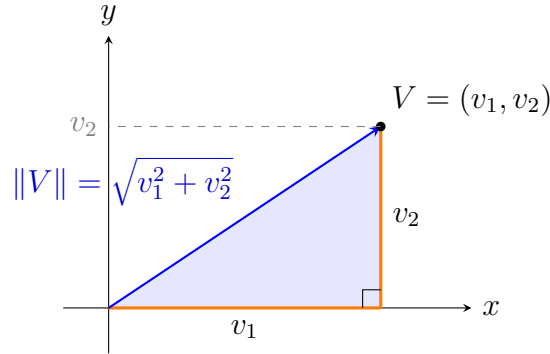


Figura 1.5: Representação da norma euclidiana de um vetor V em $\mathbb{R}^2$.

O cálculo da norma acima está ligada ao cálculo do tamanho de vetores no $\mathbb{R}^2$ e no $\mathbb{R}^3$, utilizando o Teorema de Pitágoras.

A partir dessa definição de norma, podemos definir outro conceito fundamental: o produto escalar. Este produto associa dois vetores e resulta em um escalar (número real), que vai indicar o “nível de alinhamento entre eles”.

Definição 1.1.14. *Sejam $V, W \in \mathbb{R}^n$. O **produto escalar** (também conhecido como **produto interno**) entre esses vetores, denotado por $V \cdot W$, é dado por*

$$V \cdot W = \begin{cases} 0, & \text{se } V = \bar{0} \text{ ou } W = \bar{0} \\ \|V\| \|W\| \cos(\theta), & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde θ é o ângulo no intervalo $[0, \pi]$ entre os vetores.

Vale ressaltar que, por convenção, o ângulo θ entre dois vetores é sempre o menor ângulo formado por eles. Geometricamente, ao girarmos um vetor em direção ao outro, o menor deslocamento possível sempre estará entre 0 e π radianos. Logo, a ideia de pegar θ no intervalo $[0, \pi]$ garante que o valor de θ seja único para qualquer par de vetores não nulos.

Note, no entanto, que essa intuição de ângulo entre dois vetores só é facilmente visualizada para os casos em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Para resolver esse problema, podemos encontrar uma definição equivalente para o produto escalar e generalizá-la para dimensões maiores de forma mais acessível.

Proposição 1.1.15. *Sejam V e W vetores. Então, seu produto escalar é dado por*

$$V \cdot W = \begin{cases} v_1 w_1 + v_2 w_2, & \text{se } V = (v_1, v_2), W = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2 \\ v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3, & \text{se } V = (v_1, v_2, v_3), W = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

A partir disso, podemos definir o produto escalar da seguinte forma generalizada.

Definição 1.1.16. *Sejam $V, W \in \mathbb{R}^n$. O produto escalar entre esses vetores, denotado por $V \cdot W$, é dado por*

$$V \cdot W = v_1 w_1 + \cdots + v_n w_n$$

Com essa definição, podemos facilmente provar as seguintes propriedades (que futuramente definirão de forma ainda mais abrangente o produto interno).

Proposição 1.1.17. *Sejam $U, V, W \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então:*

- i) $U \cdot V = V \cdot U$ (comutatividade);*
- ii) $U \cdot (V + W) = U \cdot V + U \cdot W$ (distributividade);*
- iii) $\alpha(U \cdot V) = (\alpha U) \cdot V = U \cdot (\alpha V)$ (associatividade);*
- iv) $V \cdot V = \|V\|^2 \geq 0$*

$$V \cdot V = \|V\|^2 = 0 \Leftrightarrow V = \bar{0}.$$

As ideias de norma e produto escalar são essenciais e possuem interpretação geométrica. O produto escalar, por exemplo, mostra a relação entre os tamanhos e “alinhamento” (ângulo) entre dois vetores. Isso é muito bem visualizado ao tentarmos entender projeções de um vetor sobre outro: a projeção ortogonal.

Definição 1.1.18. *Sejam V e W vetores. V é **perpendicular** a W se o ângulo θ entre eles é $\frac{\pi}{2}$.*

Definição 1.1.19. *Sejam V e W vetores. A **projeção ortogonal de V sobre W** , denotada por $\text{proj}_W V$ é o vetor tal que*

- $\text{proj}_W V \parallel W$ (a projeção e W têm a mesma direção);*
- $V - \text{proj}_W V \perp W$ (a diferença de V com a projeção é perpendicular a W).*

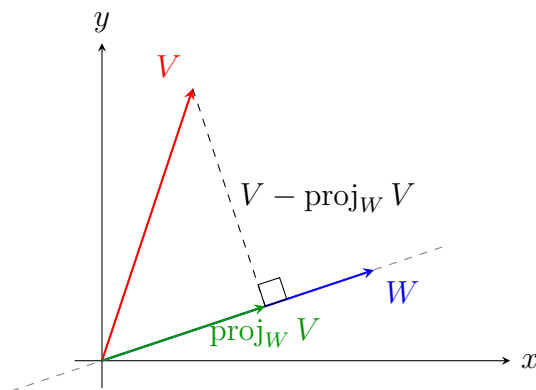


Figura 1.6: Projeção ortogonal de V sobre W .

Abaixo segue uma ilustração da projeção ortogonal.

A partir dessa definição, obtemos o seguinte teorema.

Teorema 1.1.20. *Seja W um vetor não nulo. Então,*

$$\text{proj}_W V = \left(\frac{V \cdot W}{\|W\|^2} \right) W$$

Além do produto escalar, existem outras duas operações essenciais da Álgebra Vetorial. Enquanto o produto escalar trabalha com “alinhamentos” e projeções, o produto vetorial e misto representam, respectivamente, área e volume.

Definição 1.1.21. *Sejam $V, W \in \mathbb{R}^3$. O **produto vetorial** (também conhecido como **produto externo**) entre esses vetores, denotado por $V \times W$, é dado por*

$$V \times W = \begin{cases} \bar{0}, & \text{se } V = \bar{0} \text{ ou } W = \bar{0} \\ U, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

onde U é definido como o vetor tal que:

- i) $\|U\| = \|V\| \|W\| \sin(\theta)$;
- ii) $U \perp V$ e $U \perp W$;
- iii) o sentido é dado pela regra da mão direita.

A regra da mão direita estabelece que os dedos giram de V para W e o polegar aponta na direção de U (movimento representado na Figura 1.7). Perceba que, caso invertamos a ordem de W para V , a direção também é alterada.

Utilizando as componentes dos vetores, podemos obter as coordenadas do seu produto vetorial de uma forma mais simples.

Proposição 1.1.22. *Sejam $V = (v_1, v_2, v_3)$, $W = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$. Então,*

$$V \times W = \left(\det \begin{bmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{bmatrix}, -\det \begin{bmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{bmatrix} \right)$$

Ou, utilizando um abuso de notação, temos

$$V \times W = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

onde $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ e $\vec{k} = (0, 0, 1)$ são os chamados **vetores canônicos**.

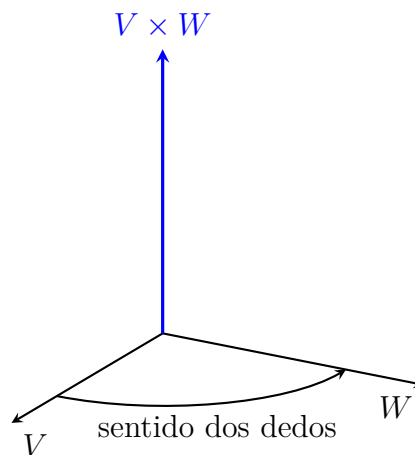


Figura 1.7: Regra da mão direita

Se você não estiver habituado às ideias de matrizes e determinante, não se preocupe. No capítulo 2, apresentaremos formalmente cada um.

Note que, no abuso de notação para representar o produto vetorial, temos que os componentes da matriz são ora vetores, ora números reais, o que indica uma matriz inválida. A ideia dessa representação é de que, se considerássemos $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ números reais e fizéssemos a conta de tal determinante, teríamos o equivalente à primeira forma do produto vetorial, apresentada imediatamente antes. Em suma, essa segunda representação é, na verdade, um “truque” para decorar o produto vetorial.

A partir dessas definições equivalentes do produto vetorial, podemos demonstrar as seguintes propriedades.

Proposição 1.1.23. *Sejam $U, V, W \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então:*

- i) $V \times W = -(W \times V)$ (anticomutatividade);*
- ii) $V \times W = \bar{0} \Leftrightarrow V = \alpha W$ ou $W = \alpha V$ (ou seja, caso sejam paralelos);*
- iii) $(V \times W) \cdot V = (V \times W) \cdot W = 0$;*
- iv) $\alpha(V \times W) = (\alpha V) \times W = V \times (\alpha W)$;*
- v) $V \times (W + U) = V \times W + V \times U$ e $(V + W) \times U = V \times U + W \times U$.*

Já o produto misto é dado pela “mistura” dos dois conceitos apresentados anteriormente.

Definição 1.1.24. *Sejam $V, W, U \in \mathbb{R}^3$. Então, o **produto misto**, denotado por $[V, W, U]$, é dado por*

$$[V, W, U] = (V \times W) \cdot U$$

A partir dos conceitos de produto vetorial e escalar, podemos descrever o misto de uma forma facilitada, bem como ressaltar algumas propriedades interessantes.

Proposição 1.1.25. *Sejam $V, W, U \in \mathbb{R}^3$. Então,*

$$[V, W, U] = \det \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}$$

Proposição 1.1.26. *Sejam $V, W, U \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então,*

- i) $[U + Z, V, W] = [U, V, W] + [Z, V, W]$
 $[U, V + Z, W] = [U, V, W] + [U, Z, W]$
 $[U, V, W + Z] = [U, V, W] + [U, V, Z]$;*
- ii) $[U, V, W] = -[U, W, V] = -[W, V, U] = -[V, U, W]$;*
- iii) $[U, V, W] = U \cdot (V \times W)$;*
- iv) $\alpha[U, V, W] = [\alpha U, V, W] = [U, \alpha V, W] = [U, V, \alpha W]$.*

Como dito, anteriormente, os produtos vetorial e misto possuem uma interpretação geométrica interessante. Isso se deve ao fato de que, quando os vetores V, W e U são não nulos, temos $\|V \times W\| = \|V\|\|W\|\sin(\theta_1)$ e $|[V, W, U]| = \|V \times W\|\|U\|\cos(\theta_2)$.

Essas definições permitem o entendimento de que a norma do produto vetorial é a área do paralelogramo formado pelos vetores V e W , e o módulo do produto misto é o volume do paralelepípedo. Na Figura 1.8, temos uma ilustração de como isso ocorre.

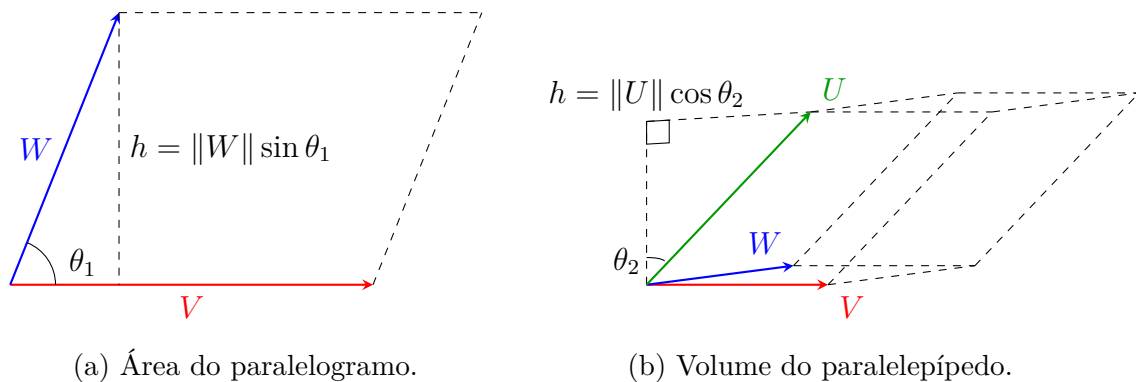


Figura 1.8: Produto vetorial e produto misto.

Como sabemos, a área do paralelogramo é dada pelo produto da base com a altura, enquanto o volume do paralelepípedo é dado pelo produto da área da base com a altura. Assim seguem as relações abaixo.

$$A_{VW} = bh = \|V\|h = \|V\|\|W\|\sin(\theta_1) = \|V \times W\|$$

$$V_{WU} = A_{VW}h = A_{VW}\|U\|\cos(\theta_2) = \|V \times W\|\|U\|\cos(\theta_2) = |[V, W, U]|$$

Além das suas normas representarem áreas e volumes, os produtos vetorial e misto, assim como o escalar, são indicadores de “alinhamento” entre vetores. A essas características damos o nome de colinearidade e coplanaridade.

Definição 1.1.27. *Dois ou mais vetores são **colineares** se pertencem a uma mesma reta (ou seja, se são paralelos).*

Definição 1.1.28. *Dois ou mais vetores são **coplanares** se pertencem a um mesmo plano.*

Na próxima seção de Geometria Analítica, ficará mais claro o que significa um vetor pertencer a uma reta ou a um plano. De forma intuitiva, isso significa que o segmento de reta orientado que representa um vetor é paralelo à reta ou ao plano em questão.

Como dito anteriormente, ao definir a multiplicação por escalar, implicitamente entendemos as condições de colinearidade no plano.

Proposição 1.1.29. *Sejam $V, W \in \mathbb{R}^2$.*

- V e W são colineares $\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}$, tal que $V = \alpha W$ ou $W = \alpha V$, ou seja, se um for múltiplo escalar do outro;
- V e W são sempre coplanares (pertencem ao $\mathbb{R}^2$).

Já para o espaço, é possível utilizar as ideias de senos e cossenos que os produtos vetorial e misto trazem, garantindo as propriedades abaixo.

Proposição 1.1.30. *Sejam $V, W, U \in \mathbb{R}^3$.*

- V e W são colineares $\Leftrightarrow V \times W = \vec{0}$;
- Dois vetores V e W são sempre coplanares;
- V, W e U são coplanares $\Leftrightarrow [V, W, U] = 0$.

Outra forma de verificar colinearidade ou coplanaridade, é utilizando a ideia de combinação linear.

Corolário 1.1.31. *Sejam $U, V, W \in \mathbb{R}^3$ coplanares não nulos. Então,*

- i) um dos vetores é combinação linear dos outros dois;*
- ii) V e W não paralelos $\Rightarrow U$ combinação linear de V e W .*

Um fato interessante é que, a partir do item *i)* do corolário acima, obtemos que a equação $xV + yW + zU = \vec{0}$ tem solução onde $x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$, ou seja, em que pelo menos um dos valores é diferente de zero. Isso porque, se existem reais α, β tais que $\alpha V + \beta W = U$, então basta tomar $x = \alpha$, $y = \beta$ e $z = -1$.

A observação acima será mais esclarecedora depois de uma boa leitura da seção 2.3.

Com isso, finalizamos a parte de Álgebra Vetorial. Seguem abaixo os exercícios da seção.

Exercícios

- (SANTOS, R; 2014; p. 154) Verifique se o vetor U é combinação linear de V e W :
 - $V = (9, -12, -6)$, $W = (-1, 7, 1)$, $U = (-4, -6, 2)$;
 - $V = (5, 4, -3)$, $W = (2, 1, 1)$, $U = (-3, -4, 1)$.

2. (SANTOS, R; 2014; p. 177) Demonstre que, se V e W são vetores quaisquer, então:

a) $|V \cdot W| \leq \|V\| \|W\|$;

b) $\|V + W\| \leq \|V\| + \|W\|$; (Sugestão: mostre que $\|V + W\|^2 = (V + W) \cdot (V + W) \leq (\|V\| + \|W\|)^2$, usando o item anterior)

c) $|\|V\| - \|W\|| \leq \|V - W\|$. (Sugestão: defina $U = V - W$ e aplique o item anterior a U e W)

3. (SANTOS, R; 2014; p. 199) Calcule o volume do paralelepípedo que tem um dos vértices no ponto $A = (2, 1, 6)$ e os três vértices adjacentes nos pontos $B = (4, 1, 3)$, $C = (1, 3, 2)$ e $D = (1, 2, 1)$.

4. (SANTOS, R; 2014; p.201) Prove a identidade de Lagrange

$$\|V \times W\|^2 = \|V\|^2 \|W\|^2 - (V \cdot W)^2$$

1.2 Geometria Analítica

Na Geometria Analítica, estudamos objetos geométricos, como retas e planos, a partir de um sistema de coordenadas. Nesse capítulo, vamos focar nossa atenção principalmente em retas e planos, ampliando a abordagem anterior de vetores. Primeiramente, podemos tentar definir esses objetos do ponto de vista da geometria analítica.

Equações da reta e do plano

Definição 1.2.1. Uma **reta** $r \subset \mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$) é o conjunto dos pontos P dados por

$$P = P_0 + tV, \quad t \in \mathbb{R}$$

onde P_0 é um ponto fixo e $V \in \mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$) é o vetor diretor.

Definição 1.2.2. Um **plano** $\pi \subset \mathbb{R}^3$ é o conjunto dos pontos P dados por

$$P = P_0 + tV + sW, \quad t, s \in \mathbb{R},$$

onde P_0 é um ponto fixo e $V, W \in \mathbb{R}^3$ são vetores diretores não nulos e não colineares.

Note que, de fato, para definir uma reta somente precisamos da sua direção, dada pelo vetor diretor, e de um ponto para “fixar a reta”. Igualmente, para definir um plano, basta

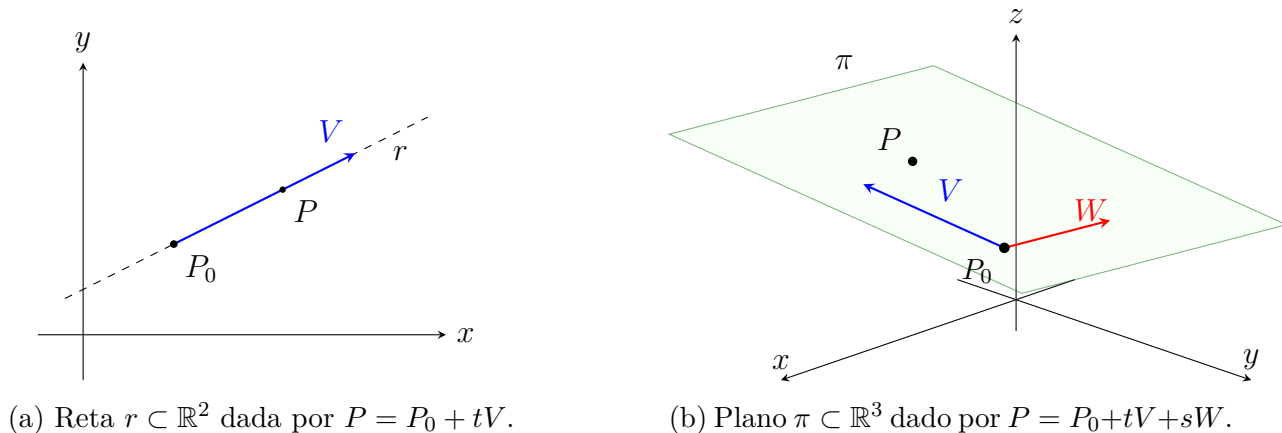


Figura 1.9: Representação de reta e plano por pontos e vetores diretores.

determinar sua “angulação”, dada por dois vetores diretores de direções distintas, e fixá-lo com um ponto.

As equações apresentadas nessas definições são o que chamamos de **equações vetoriais** desses objetos geométricos. Além delas, existem outras formas de representar retas e planos: as equações paramétricas e as equações gerais. As retas, em especial, possuem outras duas formas particulares, que são a reduzida (muito conhecida no Ensino Médio no formato de função) e a simétrica.

Inicialmente, das equações vetoriais podemos derivar facilmente as equações paramétricas, ou seja, as equações que dependem de parâmetros.

Seja $P = (x, y, z)$ as coordenadas de um ponto P qualquer, e seja $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ as coordenadas do ponto fixo P_0 . Então, para uma reta, temos

$$\begin{aligned}
 P = P_0 + tV &\Rightarrow (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(v_1, v_2, v_3) \\
 &\Rightarrow (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + (tv_1, tv_2, tv_3) \\
 &\Rightarrow (x, y, z) = (x_0 + tv_1, y_0 + tv_2, z_0 + tv_3) \\
 &\Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + tv_1 \\ y = y_0 + tv_2 \\ z = z_0 + tv_3 \end{cases} \quad (\text{equações paramétricas da reta no } \mathbb{R}^3)
 \end{aligned}$$

Note que, caso $v_1, v_2, v_3 \neq 0$, podemos isolar o parâmetro t e obter as **equações simétricas da reta**.

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}$$

De modo semelhante, podemos obter as equações da reta caso $r \subset \mathbb{R}^2$, apresentadas abaixo.

$$\begin{cases} x = x_0 + tv_1 \\ y = y_0 + tv_2 \end{cases} \quad (\text{equações paramétricas da reta no } \mathbb{R}^2)$$

Analogamente, para o plano, temos

$$\begin{aligned} P = P_0 + tV + sW &\Rightarrow (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(v_1, v_2, v_3) + s(w_1, w_2, w_3) \\ &\Rightarrow (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + (tv_1, tv_2, tv_3) + (sw_1, sw_2, sw_3) \\ &\Rightarrow (x, y, z) = (x_0 + tv_1 + sw_1, y_0 + tv_2 + sw_2, z_0 + tv_3 + sw_3) \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + tv_1 + sw_1 \\ y = y_0 + tv_2 + sw_2 \\ z = z_0 + tv_3 + sw_3 \end{cases} \quad (\text{equações paramétricas do plano}) \end{aligned}$$

Em outras palavras, obtemos equações onde o conjunto de pontos denominados reta e plano são determinados por parâmetros $(t, s \in \mathbb{R})$.

$$\begin{cases} r = \{P \in \mathbb{R}^3 \mid P = (x_0 + tv_1, y_0 + tv_2, z_0 + tv_3), t \in \mathbb{R}\}, \\ \pi = \{P \in \mathbb{R}^3 \mid P = (x_0 + tv_1 + sw_1, y_0 + tv_2 + sw_2, z_0 + tv_3 + sw_3), s, t \in \mathbb{R}\}, \end{cases}$$

No entanto, em ambos os tipos de representação, precisamos de um parâmetro, o que pode nem sempre ser útil. Nesse sentido, também vale a pena definir equações gerais, ou seja, equações que não necessitam de parâmetros e definem os pontos P de forma menos explícita. Para a reta, temos o seguinte.

Proposição 1.2.3. A *equação geral da reta no $\mathbb{R}^2$* que passa por um ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ é

$$ax + by + c = 0,$$

em que $a, b \neq 0$ e $c = -(ax_0 + by_0)$.

No entanto, esse formato da reta raramente é apresentado, devido a outros formatos mais convenientes de descrever uma reta. Por exemplo, uma definição equivalente de reta é dada por $y = mx + n$, com $m, n \in \mathbb{R}$ (*equação reduzida da reta no $\mathbb{R}^2$*).

Note que essa definição, para o $\mathbb{R}^3$, na verdade descreve um plano! Para o espaço, a descrição da reta é um pouco diferente.

$$\begin{cases} y = mx + n \\ z = px + q \end{cases}, \quad m, n, p, q \in \mathbb{R} \quad (\text{equações reduzidas da reta no } \mathbb{R}^3)$$

Já partindo para o caso do plano, é interessante apresentar antes a definição de vetor normal.

Definição 1.2.4. O **vetor normal ao plano** é o vetor não nulo perpendicular a ele.

Em outras palavras, o normal é o vetor paralelo ao produto vetorial dos vetores diretores, podendo ser ele próprio o produto vetorial em questão.

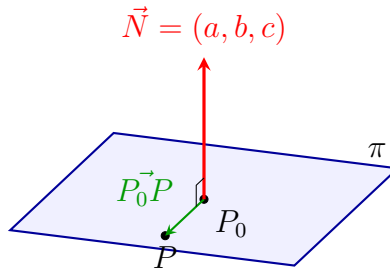


Figura 1.10: Representação do vetor normal N e de um ponto qualquer $P \in \pi$.

Assim, note que, fixado um ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e um vetor normal ao plano $N = (a, b, c)$, temos que o plano pode ser definido como $\pi = \{P \in \mathbb{R}^3 \mid N \perp \overrightarrow{PP_0}\}$, ou seja, como o conjunto de pontos cujo vetor com o ponto fixo P_0 é sempre perpendicular ao normal (construção ilustrada na Figura 1.10).

Lembre, no entanto, que

$$\begin{aligned} N \perp \overrightarrow{PP_0} &\Rightarrow N \cdot \overrightarrow{PP_0} = 0 \\ &\Rightarrow (a, b, c) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0 \\ &\Rightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \end{aligned}$$

Com isso, conseguimos a seguinte proposição.

Proposição 1.2.5. A **equação geral de um plano** π no $\mathbb{R}^3$ que passa por um ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e tem vetor normal $N = (a, b, c)$ é

$$ax + by + cz + d = 0$$

em que $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$.

Ângulos e distâncias

Temos vários casos em que podemos calcular ângulos e distâncias. Abaixo, listamos as formas de realizar esse cálculo entre duas retas, entre dois planos, entre reta e ponto, entre plano e ponto. Os demais casos são apenas derivações dos anteriores.

Proposição 1.2.6. *Sejam duas retas*

$$r_1 : \begin{cases} x = x_1 + ta_1 \\ y = y_1 + tb_1 \\ z = z_1 + tc_1 \end{cases} \quad r_2 : \begin{cases} x = x_2 + ta_2 \\ y = y_2 + tb_2 \\ z = z_2 + tc_2 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

O cosseno do ângulo entre r_1 e r_2 é

$$\cos(r_1, r_2) = |\cos(\theta)| = \frac{|V_1 \cdot V_2|}{\|V_1\| \|V_2\|}$$

em que $V_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e $V_2 = (a_2, b_2, c_2)$.

Proposição 1.2.7. *Sejam dois planos*

$$\begin{cases} \pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ \pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

O cosseno do ângulo entre π_1 e π_2 é

$$\cos(\pi_1, \pi_2) = \frac{|N_1 \cdot N_2|}{\|N_1\| \|N_2\|}$$

em que $N_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e $N_2 = (a_2, b_2, c_2)$ são os vetores normais de π_1 e π_2 , respectivamente.

Proposição 1.2.8. *Sejam $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto qualquer e $\pi : ax + by + cz + d = 0$ um plano. A distância de P_0 a π é dada por*

$$\text{dist}(P_0, \pi) = \|\text{proj}_N \overrightarrow{P_1 P_0}\| = \frac{|\overrightarrow{P_1 P_0} \cdot N|}{\|N\|}$$

em que $N = (a, b, c)$ e $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ é um ponto de π (isto é, um ponto que satisfaz a equação de π).

Proposição 1.2.9. *Sejam $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto qualquer e*

$$r : \begin{cases} x = x_1 + ta \\ y = y_1 + tb \\ z = z_1 + tc \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

uma reta. A distância de P_0 a r é dada por

$$\text{dist}(P_0, r) = \frac{\|\overrightarrow{P_1 P_0} \times V\|}{\|V\|}$$

em que $V = (a, b, c)$ é um vetor diretor e $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ é um ponto da reta r .

Para a distância entre dois planos π_1 e π_2 , temos dois casos.

- Planos paralelos: $\text{dist}(\pi_1, \pi_2) = \text{dist}(P_1, \pi_2) = \text{dist}(\pi_2, P_2)$, onde $P_1 \in \pi_1$ e $P_2 \in \pi_2$.
- Planos não paralelos: $\text{dist}(\pi_1, \pi_2) = 0$.

Para a distância entre duas retas r_1 e r_2 , temos três casos.

- Retas concorrentes: $\text{dist}(r_1, r_2) = 0$.
- Retas paralelas (mesmo caso dos planos): $\text{dist}(r_1, r_2) = \text{dist}(P_1, r_2) = \text{dist}(r_1, P_2)$, onde $P_1 \in r_1$ e $P_2 \in r_2$.
- Retas reversas: sejam $r_1 \subset \pi_1$ e $r_2 \subset \pi_2$ tal que π_1 é paralelo a r_2 e π_2 é paralelo a r_1 . Então, $\text{dist}(r_1, r_2) = \text{dist}(\pi_1, \pi_2)$.

Observe, nas figuras abaixo, exemplos geométricos de cada caso.

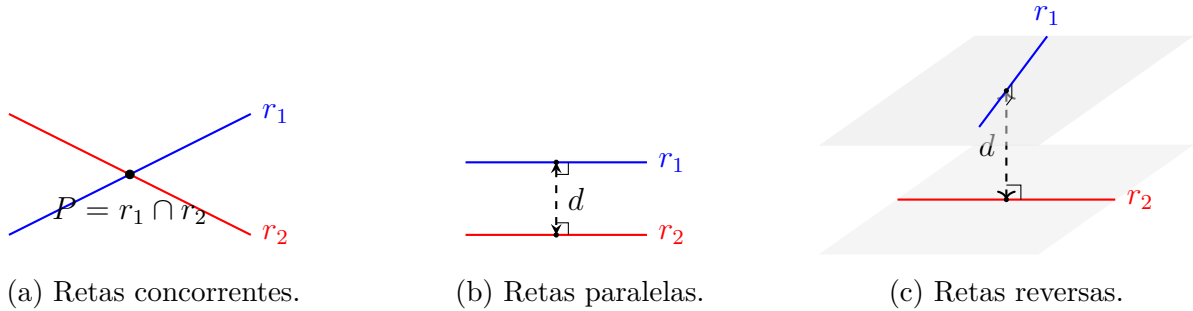


Figura 1.11: Representação visual da distância entre retas em diferentes configurações geométricas.

Perceba que o conceito de retas reversas são um “caso especial” introduzido no $\mathbb{R}^3$, que embora seja ligeiramente semelhante à ideia de retas paralelas, é diferente.

Capítulo 2

Matrizes e Sistemas Lineares

Além das ideias de vetores e da própria Geometria Analítica, compreender Sistemas Lineares fundamenta os principais problemas que a Álgebra Linear aborda. No entanto, antes de apresentar sistemas lineares, que representa a base da Álgebra Linear, vamos iniciar com matrizes.

2.1 Matrizes

As matrizes facilitam a manipulação dos sistemas lineares e o entendimento de diversos conceitos, o que é muito útil para a Álgebra Linear. Tanto é que muitos livros (e.g. [5]) abordam praticamente toda a Álgebra Linear através de matrizes.

Fundamentalmente, elas são tabelas de números ou variáveis. Veremos que se assemelham a sistemas lineares, e também podem ser interpretadas como vetores ou até mesmo Transformações Lineares, entrelaçando todos os elementos de interesse dessa área.

Iniciando, vamos definir matrizes formalmente e nomear seus elementos, para facilitar o entendimento e a manipulação dessas tabelas.

Definição 2.1.1. *Seja $m, n \in \mathbb{N}^*$. Uma **matriz** $A_{m \times n}$, ou simplesmente A , é uma tabela de mn números dispostos em m linhas e n colunas.*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Definição 2.1.2. *Denotamos por a_{ij} o elemento na i -ésima linha e j -ésima coluna da matriz*

A.

Um ponto importante dessa definição são os números m e n , que são definidos como a **ordem** da matriz. Isso é importante para entender as operações entre matrizes e até mesmo separá-las em conjuntos ou classificações, apresentados abaixo.

Definição 2.1.3. Denotamos por $\mathbb{M}_{m \times n}$ ¹ o conjunto de todas as matrizes de ordem $m \times n$.

Definição 2.1.4. Seja $A_{m \times n}$ uma matriz. Seguem abaixo nomenclaturas:

- **Matriz Quadrada:** $m = n$, i.e., mesmo número de linhas e colunas.
- **Matriz Linha:** $m = 1$, i.e., uma linha.
- **Matriz Coluna:** $n = 1$, i.e., uma coluna.
- **Matriz Nula $\bar{0}$:** $a_{ij} = 0 \forall i, j$.

Comentário 2.1.5. Vale citar brevemente que matrizes coluna (ou, menos usualmente, matrizes linha) podem representar vetores também. Isso inclui, por exemplo, vetores no $\mathbb{R}^n$, abordados no capítulo 1, que, em vez de serem n-uplas, podem ser matrizes de ordem $n \times 1$.

Para matrizes quadradas, onde a ordem é do tipo $n \times n$, temos classificações específicas.

Definição 2.1.6. Seja A uma matriz quadrada $n \times n$. Então,

- **Matriz Diagonal:** $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$;
- **Matriz Triangular Superior:** $a_{ij} = 0, \forall i > j$;
- **Matriz Triangular Inferior:** $a_{ij} = 0, \forall i < j$.
- **Matriz Identidade I_n :** $a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$.

É um bom exercício para o leitor esboçar exemplos de cada matriz apresentada.

A seguir, finalmente definiremos as operações com matrizes.

¹Vale destacar que é possível utilizar a notação $\mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ como subconjunto de $\mathbb{M}_{m \times n}$ para restringir as entradas aos números reais. No entanto, nesse material, por simplicidade, vamos nos referir a $\mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ como $\mathbb{M}_{m \times n}$, pois iremos trabalhar apenas com $\mathbb{R}$.

Definição 2.1.7. A *soma de matrizes* $A_{m \times n}$ e $B_{m \times n}$ é definida pela matriz $C_{m \times n} = A + B$ tal que

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \forall i, j$$

Note que a operação da soma só é definida para matrizes de mesmo tamanho.

Definição 2.1.8. A *multiplicação de uma matriz $A_{m \times n}$ por um escalar α* é definida pela matriz $B_{m \times n} = \alpha A$ tal que

$$b_{ij} = \alpha a_{ij} \forall i, j$$

Dizemos que B é *múltiplo escalar* de A .

Perceba que ambas estas operações são basicamente fazer o “esperado”, elemento por elemento.

A grosso modo, podemos fazer um paralelo com os vetores do $\mathbb{R}^n$ apresentados no capítulo 1, em que as operações mais relevantes eram a soma de vetores e a multiplicação por escalar.

Com ambas as operações somente, podemos provar algumas propriedades interessantes. Primeiro, temos as 8 seguintes, que possuem grande semelhança com o Teorema 1.1.11 para vetores, do capítulo 1. Tudo isso se conectará no capítulo 3 de espaços vetoriais.

Teorema 2.1.9. *Sejam A e B matrizes com ordem apropriada para cada propriedade. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Então,*

- | | |
|---|--|
| i) $A + B = B + A$; | v) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$; |
| ii) $A + (B + C) = (A + B) + C$; | vi) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$; |
| iii) $\forall A_{m \times n}, \exists \bar{0}_{m \times n}$, tal que $A + \bar{0} = A$; | vii) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$; |
| iv) $\forall A, \exists -A$, tal que $A + (-A) = \bar{0}$; | viii) $\forall A_{m \times n}, \exists I_m, I_n$, tal que
$A = AI_n = I_m A$; |

Além dessas duas, também temos outras operações importantes.

Definição 2.1.10. A *multiplicação de matrizes* $A_{m \times p}$ e $B_{p \times n}$ é definida pela matriz $C_{m \times n} = AB$ tal que

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + \cdots + a_{ip} b_{pj} \forall i, j$$

Segue abaixo uma representação visual da multiplicação de matrizes, e depois um exemplo.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}.$$

Exemplo 2.1.11. Sejam $A_{2 \times 3}$ e $B_{3 \times 2}$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{bmatrix}$$

Note que a multiplicação desse exemplo só é possível porque a quantidade de colunas de A é a mesma que a quantidade de linhas de B . Além disso, perceba que, como resultado, temos uma matriz de ordem 2×2 (quantidade de linhas de A e de colunas de B).

Além da multiplicação de matrizes, também temos a ideia da transposta e do traço.

Definição 2.1.12. A **transposta** de uma matriz $A_{m \times n}$ é definida pela matriz $B_{n \times m} = A^T$, tal que

$$b_{ij} = a_{ji}, \forall i, j$$

Exemplo 2.1.13. Seja a matriz A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

A sua matriz transposta, denotada por A^T , é obtida trocando as linhas pelas colunas:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Definição 2.1.14. O **traço** de uma matriz quadrada $A_{m \times m}$ é dado pela soma dos elementos da diagonal:

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^m a_{ii}$$

Com todas as operações apresentadas, podemos provar as seguintes propriedades de matrizes.

Teorema 2.1.15. *Sejam A , B e C matrizes com ordem apropriada para cada propriedade. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Então,*

- | | |
|--|--|
| <i>i)</i> $A(BC) = (AB)C$; | <i>iv)</i> $(A^T)^T = A$; |
| <i>ii)</i> $A(B + C) = AB + AC$ | <i>v)</i> $(A + B)^T = A^T + B^T$; |
| $(B + C)A = BA + CA$; | <i>vi)</i> $(\alpha A)^T = \alpha A^T$; |
| <i>iii)</i> $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$; | <i>vii)</i> $(AB)^T = B^T A^T$. |

Perceba que um fato fundamental é de que nem sempre a comutatividade vale. Segue abaixo um exemplo disso.

Exemplo 2.1.16. Sejam A e B as matrizes definidas abaixo.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculando o produto AB :

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 \cdot 0 + 2 \cdot 2) & (1 \cdot 1 + 2 \cdot 0) \\ (3 \cdot 0 + 4 \cdot 2) & (3 \cdot 1 + 4 \cdot 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$$

Agora, calculando o produto BA :

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0 \cdot 1 + 1 \cdot 3) & (0 \cdot 2 + 1 \cdot 4) \\ (2 \cdot 1 + 0 \cdot 3) & (2 \cdot 2 + 0 \cdot 4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Portanto, como os resultados são diferentes, fica demonstrado que, nesse caso, $AB \neq BA$, ou seja, temos um exemplo de que a comutatividade nem sempre é válida para multiplicação de matrizes.

2.1.1 Matriz Inversa

Outro conceito fundamental para matrizes é de invertibilidade. Isso se dá pela relativa dificuldade de determinar a inversa, mas também pelas propriedades que são adquiridas com elas, relacionadas a Sistemas Lineares por exemplo.

Definição 2.1.17. Uma matriz quadrada $A_{n \times n}$ é *invertível* ou não singular, se existe uma matriz inversa, denotada por $A_{n \times n}^{-1}$, tal que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

Se A não tem inversa, então A é não invertível ou *singular*.

Além da definição, temos quatro propriedades interessantes de matrizes invertíveis, envolvendo unicidade, invertibilidade, multiplicação e a transposta.

Teorema 2.1.18. Sejam A e B matrizes invertíveis.

- i) $\exists!$ matriz inversa A^{-1} ;
- ii) A^{-1} invertível e $(A^{-1})^{-1} = A$;
- iii) AB invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
- iv) A^T invertível e $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Para a demonstração, basta utilizar a definição de inversa e as propriedades da multiplicação de matrizes (especialmente comutatividade e associatividade) apresentadas anteriormente. A prova completa fica de exercício para o leitor.

Outro teorema importante mostra que, se provarmos que duas matrizes A e B são tais que $AB = I$, então já está provado que uma é inversa da outra, sem a necessidade de demonstrar que $BA = I$.

Teorema 2.1.19. Sejam $A_{n \times n}$ e $B_{n \times n}$ matrizes. Então,

$$BA = I_n \Leftrightarrow AB = I_n$$

2.1.2 Determinante

Assim como a matriz inversa, o determinante é um objeto de estudo relevante, porém menos intuitivo que a noção de invertibilidade. Também só pode ser calculado para matrizes quadradas.

Existem as formas clássicas, geralmente vistas no Ensino Médio, de calcular o determinante de uma matriz de ordem 2 ou 3 (Regra de Sarrus), que seguem abaixo.

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

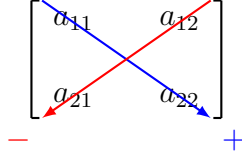


Figura 2.1: Regra de Sarrus na matriz de ordem 2

$$\det(A) = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$$

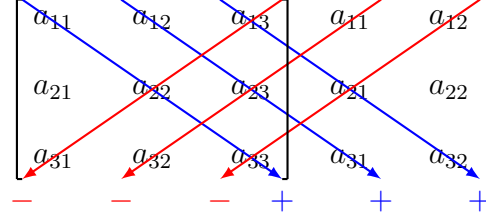


Figura 2.2: Regra de Sarrus na matriz de ordem 3

No entanto, para matrizes de ordem superior, precisamos utilizar a definição generalizada de determinante, que é calculado por meio da **expansão em cofatores do determinante de A**. Abaixo segue essa expansão em termos da primeira linha.

Definição 2.1.20. *Seja $A_{n \times n}$ uma matriz. O **determinante** de A , denotado por $\det(A)$, é definido por*

$$\det(A) = \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{1j} \tilde{a}_{1j}, & \text{se } n > 1 \\ a_{11}, & \text{se } n = 1 \end{cases}$$

onde

- $\tilde{a}_{ij} = (-1)^{1+j} \det(\tilde{A}_{ij})$ é o **cofator** de a_{ij} ;
- $\tilde{A}_{ij}$ é a submatriz de A de ordem $(n-1) \times (n-1)$ eliminando a i -ésima linha e a j -ésima coluna, denominada **matriz menor do elemento a_{ij}** .

Segue abaixo uma representação mais visual da matriz menor $\tilde{A}_{ij}$ da matriz original A .

$$\tilde{A}_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{(i-1)1} & & \ddots & & & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & & & \ddots & & a_{(i+1)n} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

O primeiro teorema que vamos apresentar é de extrema importância, no sentido de que facilita o cálculo do determinante.

Teorema 2.1.21 (Teorema de Laplace). *O determinante de uma matriz pode ser calculado com a expansão em cofatores em termos de qualquer linha i ou qualquer coluna j . Em outras palavras,*

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{j=1}^n a_{ij} \tilde{a}_{ij}, \text{ para } i \in \{1, \dots, n\} \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ij} \tilde{a}_{ij}, \text{ para } j \in \{1, \dots, n\}\end{aligned}$$

Note que, por consequência, conseguimos o seguinte corolário, o qual afirma que, caso duas linhas de uma matriz sejam iguais, o determinante da matriz é 0.

Corolário 2.1.22. *Seja $A_{n \times n}$ uma matriz e suas linhas denotadas por $A_i = [a_{i1} \dots a_{in}]$. Se existem linhas A_i, A_j , tais que $A_i = A_j$, então $\det(A) = 0$.*

Seguem abaixo outras propriedades importantes para o determinante. Vale destacar a última propriedade, que associa as noções de invertibilidade e de determinante, sendo de grande relevância, especialmente para a próxima seção.

Teorema 2.1.23. *Sejam $A_{n \times n}$ e $B_{n \times n}$ matrizes.*

i) Se existe uma linha A_k tal que $A_k = \alpha X + \beta Y$, para algum $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e algum $X = [x_1 \dots x_n]$ e $Y = [y_1 \dots y_n]$, então,

$$\det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{k-1} \\ \alpha X + \beta Y \\ A_{k+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = \alpha \det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{k-1} \\ X \\ A_{k+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} + \beta \det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{k-1} \\ Y \\ A_{k+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}$$

ii) Se B é obtida de A multiplicando-se uma linha por um escalar α , então

$$\det(B) = \alpha \det(A);$$

iii) Se B é obtida de A pela troca de duas linhas, então

$$\det(B) = -\det(A);$$

iv) Se B é obtida de A substituindo uma linha A_l por ela própria somada ao múltiplo escalar de outra linha $(A_l + \alpha A_k)$, então

$$\det(B) = \det(A).$$

v) $\det(AB) = \det(A) \det(B).$

vi) $\det(A) = \det(A^T).$

vii) A invertível $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0.$

viii) A invertível $\Rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$

Para fixar o conceito de determinante, é importante realizar exercícios de fixação. Seguem abaixo algumas recomendações.

Exercícios

1. (SANTOS, R; 2014; p. 119) Se A e B são matrizes $n \times n$ tais que $\det(A) = -2$ e $\det(B) = 3$, calcule $\det(A^T B^{-1})$.
2. (SANTOS, R; 2014; p. 119) Calcule o determinante de cada uma das matrizes seguintes usando operações elementares para transformá-las em matrizes triangulares superiores.

$$(a) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & -9 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & -6 & -2 \\ 2 & 8 & 6 & 1 \end{bmatrix} \qquad (b) \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

3. Calcule o determinante das matrizes abaixo utilizando o Teorema de Laplace. Procure a linha ou coluna que minimize o número de cálculos.

$$(a) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad (b) \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad (c) \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 9 & 11 \\ 0 & 2 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

2.2 Sistemas Lineares

Nesta seção, vamos apresentar os sistemas lineares e, depois, sua forma em matrizes, objetos que, embora pareçam distantes, estão bem ligados e permitem definições e resultados interessantes. Assim, inicialmente vamos apresentar o que são sistemas lineares.

Definição 2.2.1. *Sejam $b, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ fixos e $x_1, \dots, x_n$ variáveis. Então, uma **equação linear** é uma igualdade da forma*

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b.$$

Definição 2.2.2. *Um **sistema linear** é um conjunto de equações lineares.*

Em outras palavras, vamos ter variáveis arranjadas com números reais, em igualdades chamadas equações lineares. Essa linearidade é dada pelo fato das variáveis estarem sujeitas à potência de no máximo 1, ou seja, não existirem termos como x^2 ou x^{1000} .

Dessa forma, se tivermos um sistema de m equações e n variáveis, então temos algo no formato abaixo.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Isso já dá uma breve ideia de como associamos esses sistemas a matrizes.

Com os números associados e as igualdades bem estabelecidas, as variáveis podem ou não assumir valores específicos que mantêm as igualdades verdadeiras. Damos a isso o nome de solução.

Definição 2.2.3. *Uma **solução** de um sistema linear é uma n -upla $(s_1, \dots, s_n)$ que satisfaz todas as equações ao substituir cada variável ($x_1 = s_1, \dots, x_n = s_n$).*

Definição 2.2.4. *O **conjunto solução** ou a **solução geral** do sistema é o conjunto de todas as soluções do sistema linear.*

Para encontrar as soluções de um sistema linear, são utilizadas três operações fundamentais, chamadas de **operações elementares**:

1. Trocar a posição de duas equações;
2. Multiplicar uma equação por um escalar $\alpha \neq 0$;
3. Somar uma equação ao “múltiplo escalar” de outra.

Segue um exemplo de como isso é feito:

Exemplo 2.2.5. Considerando o seguinte sistema linear, podemos aplicar as operações acima.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + 2y = 4 \\ x - y = 1 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 4 \\ -x + y = -1 \end{cases} \quad (\text{operação 2 na equação 2}) \\ &\Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3y = 3 \end{cases} \quad (\text{operação 3 na equação 2}) \\ &\Rightarrow \begin{cases} x + 2 = 4 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Embora a primeira operação seja aparentemente “inútil”, em frente entenderemos sua utilidade.

Vale também apresentar um tipo especial de sistema linear, o homogêneo; bem como de solução, a trivial.

Definição 2.2.6. Um sistema tal que $b_1, \dots, b_m = 0$ é chamado **sistema linear homogêneo**.

Definição 2.2.7. Uma solução de um sistema linear homogêneo onde $x_1 = 0, \dots, x_n = 0$ é chamada de **solução trivial**.

Note que, de forma imediata, para um sistema tal que

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

a solução trivial faz parte do conjunto solução. Logo, temos abaixo uma conclusão consequente dessas definições.

Proposição 2.2.8. Se um sistema linear é homogêneo, então ele admite pelo menos solução trivial.

2.2.1 Matrizes como Sistemas Lineares

Relembrando novamente Sistemas Lineares, eles possuem o seguinte formato:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

No entanto, esse tipo de “multiplicação e soma ordenadas” lembra muito um dos conceitos apresentados anteriormente: a multiplicação entre matrizes. De fato, note que, definindo matrizes $A_{m \times n}$ e $B_{m \times 1}$ de constantes reais, e uma matriz $X_{n \times 1}$ de variáveis, podemos dizer que

$$AX = B \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Ou, mais explicitamente, que

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

O leitor pode facilmente verificar isso fazendo a multiplicação das matrizes A e X , depois igualando à B e verificar a igualdade entrada a entrada.

Além disso, podemos novamente definir as operações elementares para matrizes. Note que, agora, a primeira operação terá mais uso.

Definição 2.2.9. *Seguem abaixo as **operações elementares sobre as linhas de uma matriz**.*

1. Trocar a posição de duas linhas;
2. Multiplicar uma linha por um escalar $\alpha \neq 0$;
3. Somar uma linha ao “múltiplo escalar” de outra.

No entanto, embora as matrizes sejam “parecidas”, elas não são as mesmas. Ainda assim, representam sistemas lineares equivalentes. Portanto, vale a pena dar um nome a matrizes que são parecidas nesse sentido.

Definição 2.2.10. *Sejam A e B matrizes. A é **equivalente por linhas** a B , se B pode ser obtida aplicando operações elementares sobre A .*

Uma forma de representar os sistemas lineares com matrizes, omitindo as variáveis e obtendo algo mais conciso, é por meio da **matriz aumentada** abaixo.

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$$

Isso facilita as contas, considerando que as operações elementares devem ser executadas nas matrizes A e B simultaneamente.

Resumindo o que foi apresentado, temos esse teorema, que pode ser demonstrado e, de fato, apresentar a eficácia das operações elementares.

Teorema 2.2.11. *Sejam os sistemas $AX = B$ e $CX = D$. Se $[A \mid B]$ é equivalente por linhas a $[C \mid D]$, então o conjunto solução de ambos é o mesmo.*

Mesmo com as operações e matrizes apresentadas, ainda temos uma vasta gama de combinações de operações que podemos fazer, e chegar ao mesmo resultado. Para maior praticidade, faz sentido criar um “algoritmo” para solucionar esses sistemas lineares em formato de matrizes.

Assim, vamos primeiro definir o pivô, e depois uma forma de matriz que apresenta claramente a solução.

Definição 2.2.12. *Seja A uma matriz. O **pivô** da linha A_i é o seu primeiro elemento não nulo.*

Note que linhas nulas (i.e., no formato $A_i = [0 \dots 0]$) não possuem pivô.

Definição 2.2.13. *Seja $A_{m \times n}$ uma matriz. Ela está na forma **escalonada reduzida**, se satisfaz todas as condições abaixo.*

- i) Todas as linhas nulas estão abaixo das não nulas;
- ii) Todos os pivôs são 1;
- iii) Todo pivô está à direita do pivô da linha anterior;

iv) Se uma coluna contém pivô, então todos os outros elementos são 0.

Seguem exemplos de matrizes escalonadas reduzidas, para que esse conceito seja mais visual.

Exemplo 2.2.14. A seguir temos matrizes escalonadas reduzidas, com os pivôs em vermelho.

$$\begin{bmatrix} \textcolor{red}{1} & 0 & 0 \\ 0 & \textcolor{red}{1} & 0 \\ 0 & 0 & \textcolor{red}{1} \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} \textcolor{red}{1} & 0 & 2 & 9 \\ 0 & \textcolor{red}{1} & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

E o mais interessante: além de toda matriz possuir uma forma escalonada reduzida, ela é única!

Teorema 2.2.15. $\forall$ matriz $A_{m \times n}$, $\exists!$ matriz escalonada reduzida $R_{m \times n}$ equivalente.

Como, no entanto, isso auxilia na busca por soluções de um sistema?

Isso é útil, pois as operações elementares transformam uma matriz qualquer $[A \mid B]$ em sua forma escalonada reduzida $[R \mid S]$. Ao obter essa última matriz, obtemos a solução S . Esse é o **método de Gauss-Jordan**. Uma forma de fazer isso é seguindo o passo a passo abaixo, linha por linha:

1. Se a linha for nula, trocar de posição com uma linha abaixo que tiver pivô (operação 1, para cumprir a condição *i*). Caso não haja linhas abaixo da atual com pivô, acabamos.
2. Multiplicar a linha atual pelo inverso multiplicativo do pivô, para que ele seja 1 (operação 2, para cumprir a condição *ii*).
3. Somar um múltiplo da linha atual às demais, para anular os outros elementos da coluna (operação 3, para cumprir a condição *iii*) e *iv*).
4. Passar para a próxima linha.

Podemos voltar ao exemplo 2.2.5 e entender melhor como esse método funciona.

Exemplo 2.2.16. Temos o seguinte sistema linear.

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Na linguagem das matrizes, podemos escrever como:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Queremos colocar a matriz $[A \mid B]$ na forma escalonada reduzida. Para isso, vamos utilizar as operações elementares sobre as linhas da matriz.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \text{ (operação 3: } L_2 \rightarrow L_2 + (-1) \cdot L_1) \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ (operação 2: } L_2 \rightarrow -\frac{1}{3} \cdot L_2) \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ (operação 3: } L_1 \rightarrow L_1 + (-2) \cdot L_2) \end{aligned}$$

Perceba que a última matriz $[R \mid S] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ está na forma escalonada reduzida, tendo solução $S = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, ou, mais precisamente, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$.

De fato, para confirmar, podemos executar a multiplicação de matrizes e verificar que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Agora que sabemos encontrar a forma escalonada reduzida, precisamos entender de fato como interpretar essa matriz $[R \mid S]$. Embora no exemplo acima tenha dado um único resultado, nem sempre isso ocorre. Às vezes, podemos ter um sistema impossível, ou até mesmo possível, mas com infinitas soluções.

No entanto, é possível um sistema ter algo entre uma ou infinitas soluções? A resposta é: não!

Proposição 2.2.17. *Sejam $A_{m \times n}$ e $B_{m \times 1}$ matrizes. Se o sistema $AX = B$ possui duas soluções distintas $X_0 \neq X_1$, então ele tem infinitas soluções.*

Em outras palavras, se você encontrou duas soluções para um mesmo sistema, então ele tem uma infinidade de valores que você pode substituir. Com isso, temos o teorema abaixo.

Teorema 2.2.18. *Um sistema linear pode ter:*

- *Nenhuma solução (sistema impossível);*
- *Uma única solução (sistema possível e determinado);*
- *Infinitas soluções (sistema possível e indeterminado).*

Para identificar cada caso, é importante saber interpretar a matriz R e a $[R \mid S]$. Embora a matriz S sozinha pareça ser “mais importante” por apresentar a solução, de nada adianta se for um sistema impossível, por exemplo.

Note que, no exemplo 2.2.16, a matriz R é a identidade I_2 . Isso claramente indica um sistema possível e determinado, pois, ao multiplicar R pela matriz de variáveis temos $RX = IX = X$, obtendo, portanto, $X = S$ (uma única solução). De fato, temos a seguinte proposição:

Proposição 2.2.19. *Seja $R_{n \times n}$ uma matriz escalonada reduzida. $R \neq I_n \Rightarrow R$ tem uma linha nula.*

E se, ao obter a matriz escalonada reduzida, obtivermos uma igualdade falsa, independente das variáveis? Então temos um sistema impossível. Um caso é a matriz do exemplo 2.2.14, que representa um sistema de três equações e duas variáveis.

$$[R \mid S] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Note que temos o seguinte:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

Sabemos que $0 = 1$ é uma igualdade falsa e, portanto, não há solução para esse sistema. Perceba que o pivô da última linha da matriz $[R \mid S]$ se encontra na matriz S , enquanto a R não possui pivô na última linha.

Por fim, temos o caso de “faltarem informações”. Considere a seguinte matriz (exemplo 2.2.14), que representa um sistema de três equações e três variáveis.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ao abri-la, temos o sistema abaixo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2z = 9 \\ y + 4z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Esse sistema linear é plenamente possível. No entanto, podemos, por exemplo, escolher qualquer valor para z e, assim, definir os de x e y também. Ainda assim, existem infinitas soluções, que estão explicitadas abaixo, em um conjunto S de matrizes.

$$\begin{cases} x = 9 - 2z \\ y = -4z \\ z = z \end{cases} \Rightarrow S = \left\{ \begin{bmatrix} 9 - 2z \\ -4z \\ z \end{bmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\}$$

Nessa matriz, a última linha era “inútil”, pois não tinha informações (nenhum pivô), fazendo com que tivéssemos na verdade duas equações e três variáveis.

De forma resumida, podemos interpretar da seguinte forma:

Teorema 2.2.20. *Seja $[A \mid B]$ uma matriz que representa um sistema linear e $[R \mid S]$ sua forma escalonada reduzida.*

Seja p_r a quantidade de pivôs da matriz R , p_t a quantidade de pivôs da matriz $[R \mid S]$, e v a quantidade de variáveis do sistema.

- i) $p_r = p_t = v \Rightarrow$ sistema possível e determinado.*
- ii) $p_r = p_t < v \Rightarrow$ sistema possível e indeterminado.*
- iii) $p_r < p_t \Rightarrow$ sistema impossível.*

Uma consequência desse teorema está nos sistemas lineares homogêneos.

Teorema 2.2.21. *$A_{m \times n}$ é uma matriz tal que $m < n \Rightarrow$ o sistema homogêneo $AX = \bar{0}$ tem infinitas soluções.*

Sabemos que n é o número de variáveis e m a quantidade de equações do sistema. Assim, outra forma equivalente de enunciá-lo segue abaixo.

Teorema 2.2.22. *Se um sistema linear homogêneo tem menos equações do que incógnitas, então ele tem infinitas soluções.*

Além disso, podemos extrair propriedades interessantes do seu conjunto solução.

Proposição 2.2.23. *Seja $A_{n \times n}$ uma matriz. Sejam X e Y soluções do sistema homogêneo $AX = \bar{0}$. Então,*

i) $X + Y$ também é solução.

ii) αX também é solução, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

A demonstração é bem simples e também é recomendada como exercício para o leitor. Basta verificar o resultado de $A(X + Y)$ e $A(\alpha X)$.

Agora, podemos voltar ao estudo das matrizes inversas, e depois entender sua relevância. Primeiro, uma questão que não ficou esclarecida foi como podemos calcular a inversa.

A grande pergunta é como encontrar $B_{n \times n}$, dada uma matriz $A_{n \times n}$ tal que $AB = I_n$. Podemos desenvolver um pouco a multiplicação e obter algo interessante, visualmente falando.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ \dots \\ b_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1n} \\ \dots \\ b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

De fato, estamos resolvendo n sistemas lineares para encontrar a inversa de A .

De forma mais prática, podemos simplesmente dizer que vamos aplicar o método de Gauss-Jordan na matriz $[A \mid I]$ e obter a matriz escalonada reduzida $[R \mid B]$ (isso quando a inversa existir), onde $B = A^{-1}$. Note que, por uma questão de simetria $((A^{-1})^{-1} = A)$, a matriz R também deve ser a identidade. Em outras palavras,

$$[A \mid I_n] \longleftrightarrow [I_n \mid A^{-1}] \text{ (escalonamento).}$$

Podemos formalizar essa condição de invertibilidade em um teorema.

Teorema 2.2.24. *Seja $A_{n \times n}$ uma matriz. A invertível $\Leftrightarrow A$ é equivalente por linhas a I_n .*

Além disso, temos o seguinte teorema, que liga muito bem as ideias de sistemas lineares, matrizes e invertibilidade.

Teorema 2.2.25. *Seja $A_{n \times n}$ uma matriz.*

i) O sistema $AX = B$ tem solução única $\Leftrightarrow A$ invertível (a solução é $X = A^{-1}B$).

ii) O sistema homogêneo $AX = \bar{0}$ tem solução não trivial $\Leftrightarrow A$ é singular.

Evidentemente, o item *ii)* advém do fato de que, ao ter solução não trivial, um sistema linear homogêneo possui pelo menos duas soluções e, conseqüentemente infinitas.

Como consequência, lembrando que A invertível $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$, podemos facilmente provar o teorema abaixo.

Teorema 2.2.26. *O sistema homogêneo $AX = \bar{0}$ tem solução não trivial $\Leftrightarrow \det(A) = 0$.*

E daí vem um dos motivos do determinante também ser um objeto importante de estudo.

2.3 Combinação Linear e Dependência Linear

Depois de discorrer sobre matrizes e sistemas lineares, vale a pena introduzir ideias de combinação e dependência linear, que dão uma boa base para o início de conceitos mais abstratos (como espaços e subespaços vetoriais), que seguem no próximo capítulo. Para iniciar, vamos retomar a definição de combinação linear, lá do capítulo 1, mas pensando em vetores de forma generalizada, sem ser somente do $\mathbb{R}^n$.

Definição 2.3.1. *Sejam $V_1, \dots, V_k$ vetores e $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ escalares. Seja W um vetor tal que*

$$W = \alpha_1 V_1 + \dots + \alpha_k V_k$$

*Então, W é **combinação linear** de $V_1, \dots, V_k$; ou W é **gerado** por $V_1, \dots, V_k$.*

A primeira definição interessante que podemos fazer com esse conceito segue abaixo.

Definição 2.3.2. *O **espaço gerado** pelos vetores $V_1, \dots, V_k$ é o conjunto de todas as suas combinações lineares, i.e.,*

$$\{W = \alpha_1 V_1 + \dots + \alpha_k V_k \mid \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}\}.$$

Aplicando a definição de combinação linear para matrizes, podemos fazer uma construção interessante. Lembre que matrizes coluna podem representar vetores do $\mathbb{R}^n$ (Comentário

2.1.5). Assim, podemos pegar n vetores de ordem $m \times 1$, nomeados $A_1, \dots, A_n$, tais que $A_i = [a_{1i} \ \dots \ a_{mi}]^T, \forall i \in \{1, \dots, n\}$, e definir sua combinação linear como um vetor $B_{m \times 1}$:

$$B = x_1 A_1 + \dots + x_n A_n$$

Note que isso também é equivalente a:

$$B = \begin{bmatrix} A_1 & \dots & A_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Ou seja, esse vetor B é combinação linear de $A_1, \dots, A_n$, se existirem valores $x_1, \dots, x_n$ que satisfaçam as igualdades acima. Estamos definindo um sistema linear.

Proposição 2.3.3. *Sejam $A_{m \times n}$ e $B_{n \times 1}$ matrizes.*

B é combinação linear das colunas de $A \Leftrightarrow$ o sistema $AX = B$ tem solução.

A esse tipo de construção, que considera as colunas de uma matriz A para fazer uma combinação linear, damos um nome específico.

Definição 2.3.4. *Seja $A_{m \times n}$ uma matriz.*

- i) O **espaço coluna de A** é o conjunto de combinações lineares possíveis das colunas de A ;
- ii) O **espaço linha de A** é o conjunto de combinações lineares possíveis das linhas de A .

No capítulo 3, será possível nomear esse “conjunto de combinações lineares possíveis” de maneira mais elegante.

A partir desses conceitos, apresentamos a seguinte definição, que será muito importante posteriormente.

Definição 2.3.5. *Seja $S = \{V_1, \dots, V_k\} \subset \mathbb{R}^n$. Seja $V_{n \times k} = [V_1 \ \dots \ V_k]$.*

*O conjunto S é **linearmente independente (LI)** se $VX = \bar{0}$ possui somente solução trivial.*

*Caso contrário, o conjunto S é **linearmente dependente (LD)**.*

Para ilustrar melhor esses conceitos, seguem abaixo dois exemplos, um de conjunto LI, e outro LD.

Exemplo 2.3.6. Considere o conjunto $S = \{V_1, V_2\} \subset \mathbb{R}^2$, onde:

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, V_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Montamos a matriz $V_{2 \times 2}$ e o sistema $VX = \bar{0}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema, obtemos diretamente:

$$\begin{cases} 1x_1 + 0x_2 = 0 \implies x_1 = 0 \\ 0x_1 + 1x_2 = 0 \implies x_2 = 0 \end{cases}$$

Como a única solução é a trivial ($x_1 = 0, x_2 = 0$), o conjunto S é LI.

Exemplo 2.3.7. Considere o conjunto $S = \{V_1, V_2\} \subset \mathbb{R}^2$, onde:

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, V_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Montamos a matriz $V_{2 \times 2}$ e o sistema $VX = \bar{0}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Escalonando a matriz ou resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases} \implies x_1 = -2x_2$$

Se escolhermos $x_2 = 1$, teremos $x_1 = -2$. Isso nos dá a solução não trivial $X = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Portanto, o conjunto S é LD.

Agora, abrindo um pouco as duas definições, dizemos que o conjunto S é LI, se

$$x_1V_1 + \cdots + x_kV_k = \bar{0}$$

só pode ser verdadeiro quando $x_1 = \cdots = x_k = 0$, i.e., não existe nenhuma outra combinação linear dos vetores de S que dê o nulo.

A grosso modo, isso significa que **nenhum vetor** $V_i \in S$ **pode ser escrito como combinação linear dos demais**. Isso porque, caso fosse possível, teríamos, para algum $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} V_i &= \alpha_1 V_1 + \dots + \alpha_k V_k \\ \Rightarrow \bar{0} &= \alpha_1 V_1 + \dots - V_i + \dots + \alpha_k V_k \end{aligned}$$

e poderíamos simplesmente tomar $x_1 = \alpha_1, \dots, x_i = -1, \dots, x_k = \alpha_k$ e teríamos nossa solução não trivial do sistema $VX = \bar{0}$.

Formalizando, temos o seguinte teorema:

Teorema 2.3.8. *Seja o conjunto $S = \{V_1, \dots, V_k\}$, com $k > 1$. Então, S é LD $\Leftrightarrow \exists V_j$ tal que V_j é combinação linear de $V_1, \dots, V_{j-1}, V_{j+1}, \dots, V_k$.*

Trazendo de volta a construção feita anteriormente, podemos também intuitivamente entender a seguinte proposição, resgatando alguns teoremas da seção anterior.

Proposição 2.3.9. *Seja $A_{m \times n}$ uma matriz.*

- i) As colunas de A são LI $\Leftrightarrow$ o sistema $AX = \bar{0}$ possui somente solução trivial.*
- ii) Seja $m = n$. Então as colunas de A são LI $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.*

Recomenda-se que o leitor tente provar essa proposição.

Além disso, como consequência, temos que, caso um conjunto tenha k vetores no $\mathbb{R}^n$, tal que $k > n$, o conjunto é LD. Isso ocorre porque, ao tentar resolver $V_{k \times n}X = \bar{0}$, teremos mais incógnitas (k linhas de V) que equações (n colunas de V), e, portanto, infinitas soluções (não somente a trivial).

Corolário 2.3.10. *Sejam $V_1, \dots, V_k \in \mathbb{R}^n$. Se $k > n$, então o conjunto S desses vetores é LD.*

Capítulo 3

Espaços Vetoriais

Videoaula 12 - Espaços Vetoriais

<https://www.youtube.com/watch?v=UkKQEYRdiks>

Videoaula 18 - Espaços Vetoriais Abstratos

<https://www.youtube.com/watch?v=dkaUQG1Ic3A>

Videoaula 13 - Subespaços Vetoriais

<https://www.youtube.com/watch?v=4D-q80IXa94>

Videoaula 16 - Base e Dimensão

<https://www.youtube.com/watch?v=wSXwQ3gM7Eo>

Videoaula 17 - Coordenadas

<https://www.youtube.com/watch?v=GPnZsHawg6A>

Videoaula 20 - Ortogonalidade

<https://www.youtube.com/watch?v=QxsxaQrCHww>

Videoaula 21 - Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt

<https://www.youtube.com/watch?v=GbQ-pjpsY9Q>

3.1 Espaços Vetoriais

Espaços vetoriais são, basicamente, a nossa bancada de trabalho, e os vetores, as ferramentas com as quais construímos muitas funcionalidades. Exemplos disso são as LLMs (ChatGPT, Gemini, DeepSeek) e os sites de busca (Google, DuckDuckGo). Eles utilizam vetores para executar suas tarefas: todas as entradas são convertidas para dentro de um espaço vetorial e, de acordo com a posição do seu vetor, o sistema aproxima os resultados mais relevantes para você.

Além das aplicações na vida real, espaços vetoriais são essenciais na matemática pura, por exemplo, cálculo em múltiplas variáveis e análise funcional.

Definição 3.1.1. ***Espaço vetorial** é um conjunto V não vazio no qual existe as operações de adição (entre vetores) e multiplicação por um número real (escalar), respeitando as seguintes propriedades com as operações citadas, sendo u , v e w vetores e α e β escalares:*

Adição:

- (A1) $u + v = v + u$ (Comutatividade);
- (A2) $(u + v) + w = u + (v + w)$ (Associatividade);
- (A3) $\exists v : v + u = u + v = u$ denotamos v por $\vec{0}$ (Vetor nulo);
- (A4) $\forall u \exists v : u + v = v + u = \vec{0}$ denotamos v por $-u$ (Inverso aditivo).

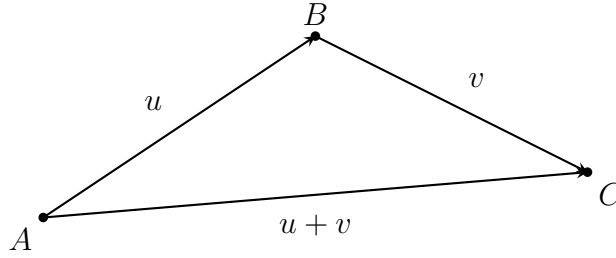
Multiplicação por Escalar:

- (M1) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$ (Distributividade de um escalar);
- (M2) $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$ (Distributividade de um vetor);
- (M3) $v \cdot 1 = v$ (Multiplicação por 1);
- (M4) $\alpha(\beta \cdot v) = (\alpha \cdot \beta)v$ (Associatividade).

Definição 3.1.2. *Elementos de um espaço vetorial V são denominados **vetores**.*

Exemplo 3.1.3 (Espaço real - $\mathbb{R}^n$). O plano euclidiano de dimensão n ($\mathbb{R}^n$) é um dos exemplos mais clássicos de espaço vetorial, sejam dois vetores $u = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ e $v = (\delta_1, \dots, \delta_n)$ e também α sendo escalar, com sua soma e multiplicação definidas por:

$$\begin{aligned} u + v &= (\eta_1 + \delta_1, \dots, \eta_n + \delta_n) \\ \alpha \cdot u &= (\alpha\eta_1, \dots, \alpha\eta_n) \end{aligned}$$

(Exemplo no $\mathbb{R}^2$)

Exemplo 3.1.4 (Espaço de matrizes $n \times m$). O conjunto das matrizes $n \times m$ com soma entre vetores e multiplicação por escalar definidas da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a+b)_{11} & (a+b)_{12} & \dots & (a+b)_{1m} \\ (a+b)_{21} & (a+b)_{22} & \dots & (a+b)_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a+b)_{n1} & (a+b)_{n2} & \dots & (a+b)_{nm} \end{bmatrix}$$

$$\alpha \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\alpha a)_{11} & (\alpha a)_{12} & \dots & (\alpha a)_{1m} \\ (\alpha a)_{21} & (\alpha a)_{22} & \dots & (\alpha a)_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\alpha a)_{n1} & (\alpha a)_{n2} & \dots & (\alpha a)_{nm} \end{bmatrix}$$

é um espaço vetorial, chamado de espaço vetorial das matrizes $n \times m$.

Exercícios

1. Descreva o vetor nulo dos seguintes espaços vetoriais, considerando as operações usuais:

a) $\mathbb{R}^5$

b) $\mathbb{M}_{3 \times 2}$

2. Mostre que o espaço $\mathbb{P}_n = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n : a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$ dos polinômios reais de grau menor ou igual a n é um espaço vetorial real, com as operações usuais de soma e multiplicação por escalar.
3. Verifique se $V = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ é um espaço vetorial com as operações de adição ($\oplus$) e a multiplicação por escalar ($\odot$) dadas abaixo. Em caso positivo, prove e indique o vetor nulo (neutro aditivo) e o inverso aditivo.

$$x \oplus y = xy \quad \text{e} \quad \alpha \odot x = x^\alpha$$

3.1.1 Subespaços Vetoriais

Subespaços vetoriais são subconjuntos de um espaço vetorial maior que ainda utilizam das mesmas operações e são “independentes” do espaço vetorial original, sendo mais exato:

Definição 3.1.5. *Seja E um espaço vetorial. Um **subespaço vetorial** (ou simplesmente **subespaço**) de E é um subconjunto $F \subset E$ com as seguintes propriedades:*

(P1) $\vec{0} \in F$;

(P2) Se $u, v \in F$ então $u + v \in F$;

(P3) Se $v \in F$ então, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha v \in F$.

Decorrendo da definição e das propriedades do espaço vetorial, percebemos que todo subespaço é um espaço vetorial em si mesmo. Também percebemos que em todo espaço vetorial existe o **subespaço trivial**, composto somente pelo vetor nulo.

Exercícios

1. Prove que um plano é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ se, e somente se, o plano passa pela origem.
2. Sejam $A_{m \times n}$ e $B_{n \times 1}$ matrizes. Prove que o conjunto solução de $AX = B$ é subespaço vetorial de $M_{n \times 1}$ se, e somente se, $B = 0$.

3.2 Base, Dimensão e Coordenadas

Os espaços vetoriais de dimensão finita (finitas coordenadas) são composto por uma estrutura algébrica simples, sendo principalmente evidenciados pelo conceito de base. Pense como a base sendo um gerador de espaços vetoriais, assim como um vetor (ou dois vetores) no $\mathbb{R}^n$ geram uma reta (ou um plano) é possível expandir isso para dimensões maiores ou outros conceitos utilizando bases.

Recapitulando os conceitos da seção 2.3, mas agora com uma noção vetorial ao invés de matricial, temos que:

Definição 3.2.1. *Seja E um espaço vetorial. Dizemos que $X \subset E$ é **linearmente independente** quando nenhum vetor $v \in X$ é combinação linear de outros elementos de X .*

Observação. Perceba que dessa definição temos que caso $\vec{0}$ esteja no subconjunto X teremos consequentemente que X é L.D., pois $\vec{0}$ pode ser gerado por quaisquer combinação linear que seus coeficientes sejam todos nulos.

$$\vec{0} = 0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_m$$

Definição 3.2.2. *Dizemos que X é **linearmente dependente** quando **não é linearmente independente**.*

Fazendo ainda conexão com a seção 2.3, temos o seguinte teorema que faz a ligação com matrizes:

Exemplo 3.2.3 (Vetores canônicos). Os vetores canônicos no $\mathbb{R}^n$ são L.I., basta observar que cada vetor difere um do outro em duas coordenadas, pegue $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1)$ no $\mathbb{R}^3$ por exemplo, teremos que é impossível formar uma combinação linear de um a partir do outro.

Definição 3.2.4. *Dizemos que o conjunto $\mathcal{B}$ é uma **base** do espaço vetorial E se:*

1. $\mathcal{B} \subset E$;
2. $\mathcal{B}$ é L.I.;
3. $\mathcal{B}$ gera o espaço vetorial E .

Observação. Isto significa que todos os vetores de E podem ser reescritos como combinação linear dos vetores da base $\mathcal{B}$ de E . Volto a trazer o que foi falado antes da reta e do plano, podemos representar todos os vetores de um plano como combinação linear de dois vetores não paralelos desse mesmo plano, o mesmo ocorre com o $\mathbb{R}^3$, mas com 3 vetores não coplanares.

Observação (Relativa ao curso da professora Nara). Uma coisa a se destacar, com a definição que fizemos de independência linear o espaço trivial possui sim uma base composta somente pelo vetor nulo, a professora Nara desconsidera isso no curso falando que o espaço trivial não admite base, isso é mais uma questão da convenção adotada, então fique atento!

Definição 3.2.5. *Se $\mathcal{B}$ é uma base de E e w é um vetor formado pela combinação linear $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m$ com $v_1, \dots, v_m \in \mathcal{B}$ então dizemos que $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ são as **coordenadas** de*

w em relação a base $\mathcal{B}$.

Observação. Também pode ser reinterpretado como os coeficientes dados aos vetores da base para se obter o vetor w .

Definição 3.2.6. A *dimensão* de um espaço vetorial é a cardinalidade de alguma base desse mesmo espaço, ou seja, a quantidade de elementos que uma base desse espaço tem.

Observação. Iremos considerar nesse texto que o espaço trivial tem dimensão 0, apesar de ter um vetor na base (o vetor nulo), para facilitar nossa vida futuramente!

Com o teorema 3.2.8. veremos que podemos sim escolher qualquer base para obtermos a dimensão de um espaço vetorial, por conta que todas as bases de um mesmo espaço vetorial obtêm de uma mesma quantidade de elementos. Também sendo um dos teoremas mais importante no conteúdo de bases, com ele decorre 3 corolários importantíssimos.

Lema. Todo sistema linear homogêneo que o número de incógnitas é maior do que o número de equações admite uma solução não trivial.

Prova: Use o teorema 2.2.18. □

Teorema 3.2.7. Se os vetores $v_1, \dots, v_m$ geram o espaço vetorial E então qualquer conjunto com mais de m vetores em E é L.D.

Prova: Dados os vetores $w_1, \dots, w_n$ em E , com $n > m$, para cada $j = 1, \dots, n$ temos $w_j = \alpha_{1j}v_1 + \dots + \alpha_{mj}v_m$ pois os vetores $v_1, \dots, v_m$ geram E . Para mostrar que os vetores w_j são L.D., devemos achar coeficientes $x_1, \dots, x_n$, não todos iguais a zero, tais que $x_1w_1 + \dots + x_nw_n = 0$. Substituindo os w_j por suas expressões em termos dos v_i , esta igualdade significa que

$$\left(\sum_{j=1}^n x_j \alpha_{1j} \right) v_1 + \dots + \left(\sum_{j=1}^n x_j \alpha_{mj} \right) v_m = 0$$

Certamente esta última condição será satisfeita desde que todos os somatórios dentro dos parênteses sejam nulos, ou seja, que $(x_1, \dots, x_n)$ seja uma solução não trivial do sistema homogêneo

$$\alpha_{11}x_1 + \dots + \alpha_{1n}x_n = 0$$

$$\alpha_{21}x_1 + \dots + \alpha_{2n}x_n = 0$$

$$\vdots$$

$$\alpha_{m1}x_1 + \dots + \alpha_{mn}x_n = 0$$

Uma tal solução existe pelo lema anterior a esse teorema, pois $n > m$. Logo $w_1, \dots, w_n$ são L.D. $\square$

Os próximos três corolários decorrem do teorema anterior:

Corolário. Se os vetores $v_1, \dots, v_m$ geram o espaço vetorial E e os vetores $u_1, \dots, u_n \in E$ são L.I., então $n \leq m$

Corolário. Se o espaço vetorial E admite uma base $\mathcal{B} = u_1, \dots, u_n$ com n elementos, qualquer outra base de E terá também n elementos.

Corolário. Se a dimensão de E é n , um conjunto com n vetores gera E se, e somente se, é L.I.

Com o próximo teorema teremos propriedades muito importantes para podermos trabalhar, tanto na parte quantitativa quanto qualitativa.

Teorema 3.2.8. *Seja E um espaço vetorial de dimensão finita n . Então:*

1. *Todo conjunto X de geradores de E contém uma base;*
2. *Todo conjunto L.I. $v_1, \dots, v_m \subset E$ está contido em uma base;*
3. *Todo subespaço vetorial $F \subset E$ tem dimensão finita, qual é menor ou igual a n ;*
4. *Se a dimensão do subespaço $F \subset E$ é igual a n , então $F = E$.*

Prova: A seguir, damos ideias das provas dos respectivos itens:

1. Mostre por absurdo que isso contradiria o teorema 3.2.4
2. Mostre por absurdo usando o teorema 3.2.4
3. Idem
4. Se a dimensão é a mesma, então toda base de F está contida em E é L.I., logo gera E .

Referências Bibliográficas

- [1] LIMA, Elon Lages. *Álgebra Linear*. 10a ed.
- [2] AXLER, Sheldon. *Linear Algebra Done Right*. 4a ed.
- [3] SANTOS, Reginaldo. *Um Curso de Geometria Analítica e Álgebra Linear*. Cópia digital.
- [4] ANTON, Howard. *Álgebra linear com aplicações*. 10a ed.
- [5] LAY, David; LAY, Steven; MCDONALD, Judi. *Álgebra Linear e Suas Aplicações*. 6a ed.