

IMPA Tech

# Subespaços invariantes

*para graduandos*

Nicole Freire

Huann Vicente

Rio de Janeiro – RJ

2025

© 2026 Nicole Maria Ferreira Freire e Huann Vicente Vasconcelos Silva

Revisão técnica:  
Arthur Farias Zaneti  
Luana Aparecida Soares Costa

Este material foi elaborado no âmbito do Projeto de Extensão ‘Produção de Recursos Educacionais Abertos (REA) de Álgebra Linear’, desenvolvido entre setembro de 2025 e maio de 2026, por estudantes de graduação do IMPA Tech, sob a orientação da Profa.

Nara Bobko e está licenciado sob a licença  
Creative Commons Atribuição 4.0 Internacional (CC BY 4.0).

<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Todos os direitos relativos ao texto original pertencem aos autores.

É permitida a reprodução, distribuição e adaptação desta obra,  
desde que atribuídos os devidos créditos.

# Prefácio

A Matemática é uma área encantadora, tanto por suas aplicações práticas quanto por seus desdobramentos teóricos. Inspirados por esse encanto, iniciamos a escrita deste material. A Álgebra Linear, em especial, está presente nos fundamentos de muitos recursos do nosso dia a dia — desde a criptografia usada em aplicativos de mensagens, até o monitoramento do crescimento de epidemias. Por essa ampla variedade de aplicações, ela desperta o interesse de inúmeros estudantes, assim como o nosso. Motivados pelo projeto de extensão orientado por nossa querida professora Nara Bobko, preparamos este material com o objetivo de oferecer aos graduandos um aprofundamento em Álgebra Linear.

Aqui, apresentamos um tema pouco explorado, mas de grande beleza e importância: os subespaços invariantes. Esperamos que este estudo desperte em você o mesmo entusiasmo que sentimos ao produzi-lo e que ele contribua para fortalecer seu amor pela Matemática. Agradecemos, em especial, aos colegas Yasmin de Barros, Josiete Morais e Lucas da Silva, pela colaboração na elaboração de parte do conteúdo aqui apresentado.

Para que você aproveite o máximo esse livro saiba que ele é estruturado em 4 capítulos. O capítulo 1 é indicado caso o leitor deseje relembrar os conceitos de **espaços vetoriais**, **subespaços vetoriais**, **bases**, **transformações lineares**, **autovalores** e **autovetores**. O real estudo dos *subespaços invariantes* se inicia no capítulo 2. Além disso, a prática é essencial, então no final do livro oferecemos exercícios de fixação, os quais se encontram a partir da página 13. Iniciemos, portanto, o estudo dos subespaços invariantes. Qualquer sugestão ou falha encontrada neste material, pedimos amigavelmente ao leitor que nos comunique pelo canais [al.nicole.freire@impatech.edu.br](mailto:al.nicole.freire@impatech.edu.br) e [al.huann.silva@impatech.edu.br](mailto:al.huann.silva@impatech.edu.br).

# Sumário

|   |                                  |    |
|---|----------------------------------|----|
| 1 | Seção de recapitulação           | 5  |
| 2 | Subespaços invariantes: Conceito | 8  |
| 3 | Teoremas                         | 10 |
| 4 | Exercícios Propostos             | 15 |

# Capítulo 1

## Seção de recapitulação

Nesta seção, faremos uma breve revisão dos conceitos fundamentais que serão utilizados nas próximas partes deste material. É importante salientar que utilizaremos o símbolo  $+$  para soma de escalares e para soma de vetores, para multiplicação a mesma lógica:  $\cdot$  para multiplicação de escalares e para multiplicação de vetores por escalares.

### DEFINIÇÃO 1.1: ESPAÇO VETORIAL

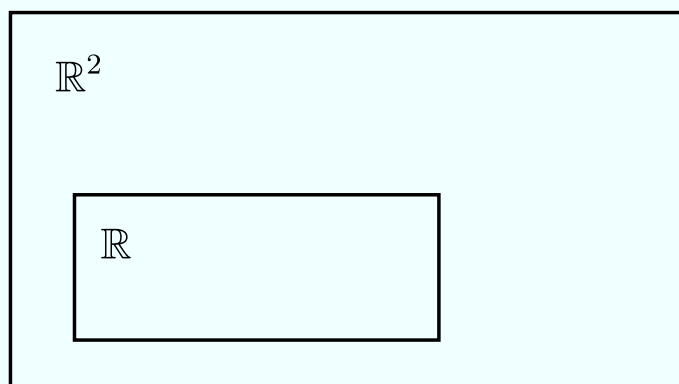
Um espaço vetorial é um conjunto  $\mathbb{V} \neq \emptyset$ , cujos elementos são denominados *vetores*, em que estão definidas duas operações: *adição* e *multiplicação por escalar*. Todo resultado destas duas operações também devem ser vetores pertencentes ao espaço. Além disso, para um conjunto de vetores ser considerado um espaço vetorial, ele deve possuir as seguintes propriedades  $\forall u, v, w \in \mathbb{V}$  e  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ :

- |      |                                                                                                              |                  |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|
| i    | $u + v = v + u$                                                                                              | Comutatividade   |
| ii   | $(u + v) + w = u + (v + w)$                                                                                  | Associatividade  |
| iii  | $\forall u \in \mathbb{V}, \exists z \in \mathbb{V}, u + z = u$ ( $z$ será denotado por nós como $\bar{0}$ ) |                  |
| iv   | $\forall u \in \mathbb{V}, \exists z \in \mathbb{V}$ tal que $u + z = \bar{0}$                               | Elemento inverso |
| v    | $\alpha \cdot (\beta \cdot u) = (\alpha \cdot \beta) \cdot u$                                                | Associatividade  |
| vi   | $(\alpha + \beta) \cdot u = (\alpha \cdot u) + (\beta \cdot u)$                                              | Distributividade |
| vii  | $\alpha \cdot (u + v) = (\alpha \cdot u) + (\alpha \cdot v)$                                                 | Distributividade |
| viii | $1 \cdot v = v$                                                                                              | Elemento neutro  |

### DEFINIÇÃO 1.2: SUBESPAÇO VETORIAL

Sejam  $\mathbb{V}$  e  $\mathbb{W}$  espaços vetoriais. Se  $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}$  e  $\mathbb{W}$  é fechado por *adição* e por *multiplicação por escalar*, então  $\mathbb{W}$  é um **subespaço vetorial** de  $\mathbb{V}$ .

**EXEMPLO 1.1** O conjunto  $\mathbb{R}$  é um subespaço vetorial de  $\mathbb{R}^2$ , podemos ver que  $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ , isto é:



**Figura 1.1:** Exemplo de um subespaço vetorial  $\mathbb{R}$  de  $\mathbb{R}^2$

### DEFINIÇÃO 1.3: INDEPENDÊNCIA LINEAR

Um conjunto de vetores  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  é dito **linearmente independente (LI)** quando a única combinação linear que resulta no vetor nulo é a combinação trivial, isto é,

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0$$

implica

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$$

Equivalentemente, nenhum vetor do conjunto pode ser escrito como combinação linear dos demais.

### DEFINIÇÃO 1.4: DEPENDÊNCIA LINEAR

Um conjunto de vetores  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  é dito **linearmente dependente (LD)** quando existem escalares  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , não todos nulos, tais que

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0.$$

Isto é, existe uma combinação linear não trivial dos vetores que resulta no vetor nulo.

Equivalentemente, pelo menos um dos vetores do conjunto pode ser escrito como combinação linear dos demais.

### DEFINIÇÃO 1.5: BASE

A base de um espaço vetorial é um conjunto de elementos linearmente independentes cujo  $\text{span}^*$  é o espaço vetorial todo.

\*conjunto de todas as combinações lineares que podem ser obtidas a partir dos elementos.

### DEFINIÇÃO 1.6: TRANSFORMAÇÃO LINEAR

Sejam  $\mathbb{V}$  e  $\mathbb{W}$  espaços vetoriais. Uma aplicação  $A : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$  que a cada vetor  $v \in \mathbb{V}$  associa um vetor  $A \cdot v \in \mathbb{W}$  é dita uma **transformação linear** se  $\forall u, v \in \mathbb{V}$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ , são válidas as seguintes propriedades:

- i  $A(v + u) = Av + Au$
- ii  $A(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot (Av)$

### DEFINIÇÃO 1.7: NÚCLEO DE UMA TRANSFORMAÇÃO LINEAR

Seja  $T : V \rightarrow W$  uma transformação linear entre espaços vetoriais sobre um corpo  $\mathbb{K}$ . O **núcleo** de  $T$ , denotado por  $N(T)$ , é o subconjunto de  $V$  definido por

$$N(T) = \{ v \in V ; T(v) = 0_W \},$$

onde  $0_W$  representa o vetor nulo de  $W$ .

Em outras palavras, o núcleo de  $T$  é o conjunto de todos os vetores do domínio que são enviados no vetor nulo pela transformação linear. Além disso,  $N(T)$  é um subespaço vetorial de  $V$ .

### DEFINIÇÃO 1.8: AUTOVETORES E AUTOVALORES

Um vetor  $v \neq \bar{0}$  é dito um **autovetor** do operador  $A$  se existe um  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que

$$A \cdot v = \lambda \cdot v$$

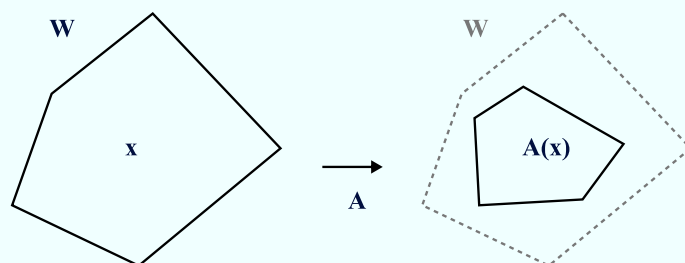
e  $\lambda$  é dito o **autovalor** associado a  $v$ .

## Capítulo 2

### Subespaços invariantes: Conceito

#### *DEFINIÇÃO 2.1: INVARIÂNCIA*

Seja  $\mathbb{W}$  um subespaço vetorial de  $\mathbb{V}$ . Dizemos que  $\mathbb{W}$  é um **subespaço vetorial invariante** sobre um operador linear  $A : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$  quando para qualquer  $w \in \mathbb{W}$ ,  $A(w) \in \mathbb{W}$ .



**Figura 2.1:** *Invariância aplicada a  $x \in \mathbb{W}$  pelo operador  $A$*

**EXEMPLO 2.1** Os principais exemplos de subespaços invariantes são o  $\{\bar{0}\}$  (subespaço que só contém o vetor nulo) e o espaço vetorial  $\mathbb{V}$ . Outros exemplos interessantes de subespaços invariantes são o núcleo e a imagem do operador  $A$ .

**MAS DE FATO O QUE ISSO SIGNIFICA?** Significa que estamos trabalhando com o operador num espaço de menor dimensão, facilitando seu estudo. Imagine que nosso espaço vetorial  $\mathbb{V}$  possua dimensão  $n$  e nosso subespaço  $\mathbb{W}$  possua dimensão 2. Sairíamos de um estudo  $n$ -dimensional para um estudo em 2 dimensões. Isso permite estudarmos inúmeras propriedades do operador com maior clareza e facilidade.

**EXEMPLO 2.2:** Dado o operador linear  $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$  definido por

$$T = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{W} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

Para que  $\mathbb{W}$  seja invariante por  $T$ , é necessário que

$$T(\mathbb{W}) \subset \mathbb{W} \iff \forall w \in \mathbb{W}, T(w) \in \mathbb{W}$$

Pegaremos um exemplo prático. Seja  $w_1 = (5.25, 0)$  aplicando o operador linear  $T$ , temos que

$$Tw_1 = T \begin{bmatrix} 5.25 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5.25 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \times 5.25 + 1 \cdot 0 \\ 0 + 2 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15.75 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Tw_1 = \begin{bmatrix} 15.75 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{W}$$

**EXEMPLO 2.3:** Dado o operador linear  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definido por

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Considere  $\mathbb{W} = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ . Dado qualquer  $w$ , onde  $w \in \mathbb{W}$ . Se aplicarmos o operador  $T$  teremos

$$Tw = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{W}$$

Ou seja,  $\mathbb{W}$  é invariante pelo operador  $T$ .

# Capítulo 3

## Teoremas

Para iniciarmos esse capítulo, precisamos de duas definições:

### *DEFINIÇÃO 3.1: OPERADOR LINEAR*

Um **operador linear** é uma transformação linear que possui como domínio e contra-domínio o mesmo espaço vetorial.

### *DEFINIÇÃO 3.2: CONJUNTO DOS OPERADORES LINEARES*

Definimos  $\mathcal{L}(\mathbb{V})$ , como o espaço vetorial de todos os operadores lineares de  $\mathbb{V}$  em  $\mathbb{V}$ .

Agora que já sabemos os principais conceitos em relação aos subespaços invariantes, vamos ver alguns teoremas importantes. Iniciamos com o seguinte lema:

### *LEMA 3.1*

Seja  $\mathbb{V}$  um espaço vetorial não nulo e de dimensão finita. Para todo operador linear  $A : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$  existem um polinômio mônico<sup>1</sup> irredutível  $p$ , de grau 1 ou 2, e um vetor não nulo  $v \in \mathbb{V}$ , tais que  $p(A) \cdot v = 0$ .

**Demonstração:** Seja  $\dim \mathbb{V} = n$ . O espaço vetorial  $\mathcal{L}(\mathbb{V})$  tem dimensão  $n^2$ , pois cada operador pode ser representado por uma matriz  $n \times n$ . Sendo assim, os  $n^2 + 1$  operadores  $I, A, A^2, \dots, A^{n^2}$  são *linearmente dependentes*<sup>2</sup>. Logo, existem escalares  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n^2} \in \mathbb{R}$ , com *pelo menos um* deles sendo não nulo, tais que

$$\alpha_0 I + \alpha_1 A + \dots + \alpha_{n^2} A^{n^2} = 0.$$

Seja  $m \neq 0$  o maior índice com  $\alpha_m \neq 0$ . Se dividirmos a equação por  $\alpha_m$ , obteremos o seguinte polinômio mônico

$$p(x) = x^m + \beta_{m-1}x^{m-1} + \dots + \beta_1x + \beta_0,$$

tal que  $\beta_i = \frac{\alpha_i}{\alpha_m}$  e  $p(A) = 0$ . No corpo dos polinômios reais  $(\mathbb{R}[x])$ , todo polinômio mônico de grau maior ou igual a 1 se fatora como produto de polinômios mônicos irredutíveis de grau 1 ou 2 (Teorema Fundamental da Álgebra):

$$p(x) = p_1(x) \cdot p_2(x) \cdot \dots \cdot p_k(x),$$

$\deg p_i \in \{1, 2\}$ . Como  $p(A) = 0$ , temos

$$p_1(A) \cdot p_2(A) \cdot \dots \cdot p_k(A) = 0.$$

Se todos os  $p_i(A)$  fossem invertíveis, sua composta também o seria, contradizendo o fato de ser o operador nulo. Portanto, existe  $i$  tal que  $p_i(A)$  não é invertível. Em dimensão finita, como é o caso do nosso espaço  $\mathcal{L}(\mathbb{V})$ , isso significa que  $N(p(A)) \neq \{\bar{0}\}$ . Assim, existe  $v \neq \bar{0}$  tal que  $p(A) \cdot v = 0$

□

### TEOREMA 3.1

Todo operador linear em um espaço vetorial de dimensão finita possui um subespaço invariante de dimensão 1 ou 2.

**Demonstração:** Usando o Lema 3.1, escolha então um vetor  $v \neq \bar{0}$  tal que  $p_i(A) \cdot v = 0$ . Se  $\deg p_i = 1$ , então  $p_i(x) = x - \lambda$  para algum  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Logo,  $Av = \lambda v$  e  $\langle v \rangle$  é um *subespaço invariante* de dimensão 1.

Se  $\deg p_i = 2$ , tome  $p_i(x) = x^2 + bx + c$ , o qual é irredutível, sem raízes reais. Teremos então  $A^2v + bAv + cv = p(A) \cdot v = 0$ . O subespaço  $\mathbb{W} = \text{span}\{v, Av\}$  tem dimensão 2 (pois  $v$  e  $Av$  são L.I. - já que se não fossem,  $v$  seria autovetor e  $p_i$  possuiria raiz real) e é invariante por  $A$ , pois  $A(Av) = A^2v = -bAv - cv$ , o que pertence a  $\mathbb{W}$ . Dessa forma,  $A$  possui um subespaço invariante de dimensão 1 ou 2.

□

**TEOREMA 3.2**

Autovetores de um mesmo operador linear associados a autovalores distintos são linearmente **independentes**.

**Demonstração:** Vamos provar o teorema por indução.

Primeiramente, tomemos a transformação linear  $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$  e os autovetores não nulos  $v_1, v_2, \dots, v_k$  associados a autovalores distintos  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ .

1) Caso base de indução:  $k = 1$

Para  $k = 1$ , ver isso é fácil, pois um único autovetor  $v_1$  é linearmente independente.

2) Hipótese de indução:

Vamos supor que tal teorema seja válido para  $k - 1$ . Sendo assim, tomemos a combinação linear

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k = \bar{0} \quad (I)$$

com  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ .

3) Passo indutivo:

Se aplicarmos a transformação  $T$  nesta combinação, obteremos o seguinte resultado (pela linearidade da transformação linear):

$$\alpha_1 \cdot T(v_1) + \alpha_2 \cdot T(v_2) + \dots + \alpha_{k-1} \cdot T(v_{k-1}) + \alpha_k \cdot T(v_k) = \bar{0}$$

Como  $v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k$  são autovetores, teremos

$$\alpha_1 \cdot \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \cdot \lambda_2 v_2 + \dots + \alpha_{k-1} \cdot \lambda_{k-1} v_{k-1} + \alpha_k \cdot \lambda_k v_k = \bar{0} \quad (II)$$

Multipliquemos a expressão anteriormente apresentada (I) por  $\lambda_k$ , obtendo assim:

$$\alpha_1 \lambda_k v_1 + \alpha_2 \lambda_k v_2 + \dots + \alpha_k \lambda_k v_k = \bar{0} \quad (III)$$

Se subtrairmos (II) de (III), teremos:

$$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_k) v_1 + \alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_k) v_2 + \dots + \alpha_{k-1} (\lambda_{k-1} - \lambda_k) v_{k-1} = \bar{0}$$

Pela hipótese de indução, os vetores são L.I., assim

$$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_k) = \alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_k) = \dots = \alpha_{k-1} (\lambda_{k-1} - \lambda_k) = 0$$

Como  $\lambda_k \neq \lambda_i \forall i \in \{1, \dots, k-1\}$ , então, concluímos que  $\alpha_i = 0 \forall i \in \{1, \dots, k-1\}$ . Voltando à expressão (I), chegaremos a seguinte expressão conforme o resultado

acima:

$$\alpha_k v_k = \bar{0}$$

Como  $v_k \neq \bar{0}$ , temos então  $\alpha_k = 0$ . Assim, concluímos que a igualdade (I) só pode ocorrer se todos os seus coeficientes forem iguais a 0, logo são LI, o que prova o teorema.

□

**TEOREMA 3.3**

Seja  $\mathbb{V}$  um espaço vetorial de dimensão finita e igual a  $n$ . Se um operador linear  $A : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$  possui  $n$  autovalores **distintos**, então existe uma base  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset \mathbb{V}$  em relação à qual a matriz de  $A$  é diagonal<sup>3</sup>.

**Demonstração:** Seja um espaço vetorial  $\mathbb{V}$  de dimensão  $n$  e  $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$  uma transformação linear. Tome um conjunto de autovetores distintos  $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  associados aos autovalores distintos  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Pelo teorema 3.2, os elementos desse conjunto são L.I. Com isso, como sua cardinalidade é  $n$  e seus elementos são L.I., então o conjunto  $B$  é base do espaço  $\mathbb{V}$ . Além disso, como a matriz  $A$  representa as coordenadas de cada vetor na base do espaço vetorial, então, na base do conjunto  $B$ , a matriz  $A$  terá o seguinte formato:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

□

<sup>1</sup>Um polinômio mônico é um polinômio que o coeficiente de seu termo de maior grau vale 1.

<sup>2</sup>Para um espaço vetorial de dimensão  $n$ , qualquer conjunto de vetores que possua mais de  $n$  é L.D.

<sup>3</sup>Uma matriz diagonal é aquela na qual os elementos que não fazem parte da diagonal principal valem 0. Em *matematiquês*, poderíamos expressar essa propriedade da seguinte forma:  $A$  tem a forma  $[a_{ij}] = 0$ , se  $i \neq j$ .

# Capítulo 4

## Exercícios Propostos

- 1.01 Dê exemplo de um operador linear  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que admite um subespaço invariante  $V \subset \mathbb{R}^3$  com a seguinte propriedade: nenhum subespaço  $U \subset \mathbb{R}^3$  tal que

$$\mathbb{R}^3 = V + U$$

- 1.02 Sejam  $T, G : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$  operadores lineares. Se

$$T \circ G = G \circ T$$

prove que  $N(G)$  e  $Im(G)$  são subespaços invariantes por  $T$ .

- 1.03 Suponha que o operador linear  $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ , num espaço vetorial, onde  $\dim(\mathbb{V}) = n$ , admita um subespaço invariante  $\mathbb{W}$ , onde  $\dim(\mathbb{W}) = m$ . Prove que existe uma base  $\mathbb{V}$  tal que:

$$T = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{m \times m} & \mathbf{B}_{m \times (n-m)} \\ \mathbf{0}_{(n-m) \times m} & \mathbf{C}_{(n-m) \times (n-m)} \end{bmatrix}$$

- 1.04 Enuncie e prove um resultado análogo ao do exercício anterior, supondo que  $\mathbb{W} = \mathbb{U} \times \mathbb{V}$ , onde  $\mathbb{U}$  e  $\mathbb{V}$  são invariantes pelo operador  $T$ .
- 1.05 Dado o vetor não-nulo  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{v}$ , determine os subespaços de  $\mathbb{R}^3$  invariantes pelo operador  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , definido por  $T(v) = \mathbf{a} \times \mathbf{v}$ .

1.06 Se  $T$  é um operador autoadjunto e  $\mathbb{W}$  é invariante por  $T$ . Prove que

$$\langle u, T(v) \rangle = \langle v, T(u) \rangle$$

Prove que  $\mathbb{W}^\perp$  é um subspaço invariante por  $T$

1.07 Se  $F_1, F_2 \subset \mathbb{V}$  são invariantes por  $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ . Prove que:

- (a)  $F_1 + F_2$  é invariante por  $T$
- (b)  $F_1 \cap F_2$  é invariante por  $T$

# Referências bibliográficas

- [1] LIMA, Elon Lages. Álgebra Linear. 10. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2020. 356 p.
- [2] BOBKO, Nara. Materiais de aula - Curso básico turma 2025. IMPA Tech, 2025.