

Il modello di Stommel della circolazione Atlantica

Niccolo' Zanotti and Filippo Pretolani

Dipartimento di Fisica e Astronomia, Unibo

1 Introduzione

Nel 1961 Henry Stommel propose un modello che, nella sua semplicità, permetteva uno studio dell'essenza del problema della circolazione termoalina (vedi [1]). Infatti il modello risulta descrivere un sistema che presenta una complessità nella dinamica, dai diversi stati di equilibrio ammessi alla grande sensibilità rispetto alle condizioni iniziali. Tutt'ora, se si suppone che il modello possa descrivere qualitativamente l'intensità e direzione della corrente della cosiddetta Atlantic Meridional overturning circulation (AMOC) tale modello risulta un importante oggetto di studio per studiare i tipping points del sistema climatico.

L'idea è forzare il sistema in modi diversi e vedere quanti membri dell'ensemble flippano da una soluzione di equilibrio che contempla un verso della circolazione all'altra (il modello di Stommel ammette diverse soluzioni di equilibrio). In questo lavoro consideriamo solo tre delle tante possibili perturbazioni all'oceano e ci interroghiamo su quale sia il loro effetto sull'overturning della circolazione (passaggio da una soluzione 'TH-type' a 'SH-type').

La parte di assimilazione dati è implementata usando la libreria DAPPER. Il codice utilizzato può essere reperito su [GitHub](#).

2 Stommel two-box model

La trattazione seguente è basata su [2].

È noto che l'acqua dell'oceano è composta, oltre che da acqua, da diversi ioni (Cl, Mg^{2+}, \dots). Considerato un volume di acqua oceanica di massa m , e assunto che via siano $n - 1$ tipologie di ioni con rispettive masse m_k , si definisce salinità la quantità

$$S = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{n-1} m_k$$

e contenuto di acqua (dolce)

$$W = \frac{m_n}{m}$$

Dato che risulta $S + W = 1$, si considera l'acqua dell'oceano come un liquido a due componenti (acqua e sale) in cui vi è solo una componente indipendente (la salinità S). La salinità viene normalmente misurata in ppt (parts per thousand).

2.1 Generalità

Nel modello di Stommel, noto anche come "Two-box model", si hanno due recipienti (le 'boxes', appunto) di rispettivi volumi V_p e V_e contenenti acqua ben mescolata di temperatura e salinità (T_{e*}, S_{e*}) e (T_{p*}, S_{p*}) , rispettivamente. I pedici 'e' e 'p' indicano i valori nel box equatoriale e polare, rispettivamente. I due recipienti sono connessi a livello superficiale da una regione di overflow mentre in profondità da un tubo capillare, al fine di mantenere il volume in ogni box costante (vedi Fig. 1). Consideriamo un sistema cartesiano con l'asse verticale, z , orientato verso il basso rappresentante la profondità, mentre x e y longitudine e latitudine, rispettivamente. Quando

Niccolo' Zanotti: niccolo.zanotti@studio.unibo.it

Filippo Pretolani: filippo.pretolani@studio.unibo.it

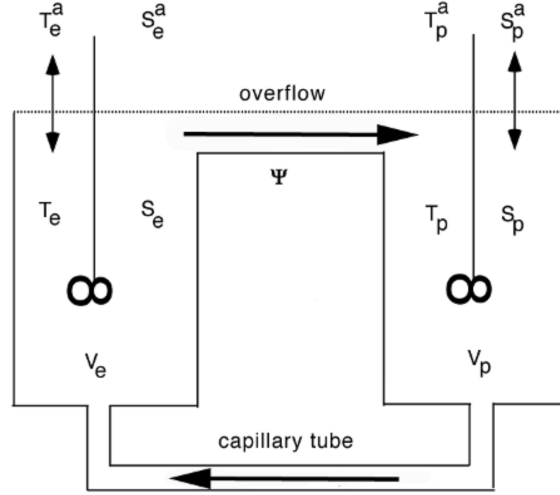


Figura 1: Rappresentazione schematica del two-box model. Due recipienti contengono acqua ben mescolata e sono connessi tramite un overflow e un tubo capillare. La circolazione è dovuta ai gradienti di densità tra i due recipienti stabiliti dagli scambi esterni a livello della superficie.

risolveremo le equazioni del modello assumeremo per semplicità che i due recipienti abbiano lo stesso volume, dato da

$$V_p = V_e = \Delta x \Delta y \Delta z \equiv V \quad (1)$$

con $\Delta x, \Delta y$ e Δz corrispondenti dimensioni dei recipienti. Il flow rate Ψ_* è diretto da zone ad alta pressione a zone a bassa pressione (o da zone ad alta densità a bassa densità). L'assunzione che si fa è che esso dipenda linearmente dalla differenza di densità tra il liquido nei due recipienti, ovvero

$$\Psi_* = \gamma \frac{\rho_{p*} - \rho_{e*}}{\rho_0} \quad (2)$$

dove ρ_0 è una densità di riferimento e γ una costante idraulica. Ψ_* rappresenta il flow rate opportunamente integrato nell'area di riferimento:

$$\Psi_* = \Delta x \Delta z \Psi'_* \quad (3)$$

$$\Psi'_* = \gamma' \frac{\rho_{p*} - \rho_{e*}}{\rho_0}, \quad \gamma' = \frac{\gamma}{\Delta x \Delta z}$$

dove si è posto un sistema di riferimento tale per cui Δx rappresenta la larghezza della porzione di oceano di riferimento mentre Δz la profondità rispettiva. Dalla definizione è chiaro che Ψ_* risulta positivo se il liquido nel recipiente polare è più denso. Lo scambio di proprietà non dipende dal segno del flow rate, l'unica cosa che importa è che tali proprietà siano trasportate da un box all'altro. Il fatto che la massa si conserva rende irrilevante quale dei due percorsi viene seguito dal liquido (dall'overflow o dal tubo capillare). Il segno del flow rate non altera le proprietà. Assumiamo un'equazione di stato lineare della forma

$$\rho_* = \rho_0 [1 - \alpha_T (T_* - T_0) + \alpha_S (S_* - S_0)] \quad (4)$$

con T_0, S_0 valori di riferimento.

Lo scambio di calore e sale in ognuno dei due recipienti dovuto alla forzante applicata in superficie è modellizzato tramite un rilassamento a partire da valori prescritti in superficie di temperatura e salinità (T^a, S^a) con coefficienti di rilassamento C_T e C_S . Questi coefficienti differiscono per ogni box e per quantità considerata (calore o sale). Le equazioni che descrivono i bilanci di calore e sale

in ogni recipiente sono date da:

$$V_p \frac{dT_{p^*}}{dt_*} = C_p^T (T_p^a - T_{p^*}) + |\Psi_*| (T_{e^*} - T_{p^*}) \quad (5a)$$

$$V_e \frac{dT_{e^*}}{dt_*} = C_e^T (T_e^a - T_{e^*}) + |\Psi_*| (T_{p^*} - T_{e^*}) \quad (5b)$$

$$V_p \frac{dS_{p^*}}{dt_*} = C_p^S (S_p^a - S_{p^*}) + |\Psi_*| (S_{e^*} - S_{p^*}) \quad (5c)$$

$$V_e \frac{dS_{e^*}}{dt_*} = C_e^S (S_e^a - S_{e^*}) + |\Psi_*| (S_{p^*} - S_{e^*}) \quad (5d)$$

Ora, tenendo conto di Eq. 1 e 3 e dividendo per il volume si ha

$$\frac{dT_{p^*}}{dt_*} = R_T (T_p^a - T_{p^*}) + \frac{|\Psi_*'|}{\Delta y} (T_{e^*} - T_{p^*}) \quad (6a)$$

$$\frac{dT_{e^*}}{dt_*} = R_T (T_e^a - T_{e^*}) + \frac{|\Psi_*'|}{\Delta y} (T_{p^*} - T_{e^*}) \quad (6b)$$

$$\frac{dS_{p^*}}{dt_*} = R_S (S_p^a - S_{p^*}) + \frac{|\Psi_*'|}{\Delta y} (S_{e^*} - S_{p^*}) \quad (6c)$$

$$\frac{dS_{e^*}}{dt_*} = R_S (S_e^a - S_{e^*}) + \frac{|\Psi_*'|}{\Delta y} (S_{p^*} - S_{e^*}) \quad (6d)$$

dove si sono introdotti i tempi di rilassamento per la temperatura e per la salinità R_T ed R_S che, per semplicità, si assumono proporzionali al volume del rispettivo contenitore:

$$C_p^T/V_p = C_e^T/V_e \equiv R_T \quad C_p^S/V_p = C_e^S/V_e \equiv R_S$$

Riscalando t, T, S come segue

$$t \mapsto \frac{1}{R_T} t, \quad T \mapsto \frac{V_e V_p R_T}{\gamma \alpha_T (V_e + V_p)} T, \quad S \mapsto \frac{V_e V_p R_T}{\gamma \alpha_S (V_e + V_p)} S$$

si ottiene il set di equazioni adimensionali:

$$\frac{dT}{dt} = \eta_1 - T(1 + |T - S|) \quad (7a)$$

$$\frac{dS}{dt} = \eta_2 - S(\eta_3 + |T - S|) \quad (7b)$$

dove si è posto $T = T_e - T_p$, $T = S_e - S_p$ e $\Psi = T - S$ rappresenta il flow rate adimensionale. I tre parametri che compaiono nelle equazioni precedenti sono dati da

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{(T_e^a - T_p^a) \gamma \alpha_T (V_e + V_p)}{V_e V_p R_T} v \\ \eta_2 &= \frac{R_S (S_e^a - S_p^a) \gamma \alpha_S (V_e + V_p)}{R_T V_e V_p R_T} \\ \eta_3 &= \frac{R_S}{R_T} \end{aligned} \quad (8)$$

Il modello di Stommel consiste quindi in un sistema di equazioni differenziali ordinarie due-dimensionale con tre parametri indipendenti $\eta_i, i = 1, 2, 3$ che descrivono l'evoluzione della differenza di temperatura e salinità tra i due recipienti.

Il sistema descritto da Eq. 7 risulta relativamente semplice, per cui saremmo spinti a cercare di risolverlo analiticamente. Per poter modellizzare con precisione sempre maggiore la struttura orizzontale e verticale di scambio delle varie proprietà, però, dovremmo considerare un numero sempre maggiore di recipienti accoppiati tra di loro tramite lo scambio di calore e di sale. Un modo ragionevole di analizzare il sistema è quello di considerare valori più 'realistici' possibili per i parametri e calcolare le traiettorie di T, S , i.e. le serie temporali della loro evoluzione a partire

da un certo stato iniziale. Ad esempio, prendendo $\eta_1 = 3.0$, $\eta_2 = 0.5$, $\eta_3 = 0.3$, l'evoluzione della differenza di temperatura e salinità tra i due recipienti può essere visualizzata in Figura 2. In tal caso il sistema evolve verso uno stato stazionario con sinking a Nord dato che $\Psi = T - S > 0$. In corrispondenza di questi valori di parametri, qualunque siano le condizioni iniziali, viene raggiunto lo stesso stato stazionario. Normalmente, ciò che si vuole fare è studiare la sensibilità del sistema

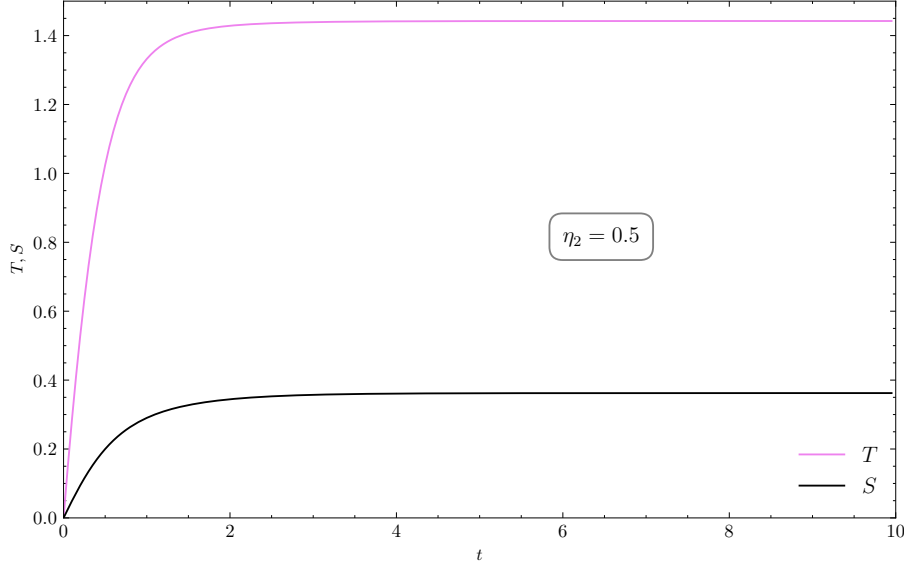


Figura 2: Traiettorie a partire da $T = 0, S = 0$ con $\eta_1 = 3.0, \eta_2 = 0.5, \eta_3 = 0.3$.

rispetto ad una variazione dei parametri. In Figura 3 sono riportate le evoluzioni da tre diverse condizioni iniziali in corrispondenza di $\eta_2 = 1.0$. Notiamo che le soluzioni per T ed S che partono da $T = 3.0, S = 3.0$ tendono ad uno stato stazionario con $\Psi = T - S < 0$ (sinking a Sud). Abbiamo quindi visto che il sistema ammette più soluzioni di equilibrio se si oltrepassa un certo valore di soglia di η_2 tra 0.5 e 1.0.

Analizziamo quindi esplicitamente le soluzioni di equilibrio del sistema in funzione dei parametri.

2.2 Soluzioni di equilibrio

Imponendo la condizione di stazionarietà alle equazioni 7 otteniamo le soluzioni

$$T = \frac{\eta_1}{1 + |\Psi|}; \quad S = \frac{\eta_2}{\eta_3 + |\Psi|}$$

con Ψ che si ottiene come soluzione dell'equazione implicita

$$\Psi = \frac{\eta_1}{1 + |\Psi|} - \frac{\eta_2}{\eta_3 + |\Psi|}.$$

che potremmo riscrivere come

$$\underbrace{\Psi|\Psi|^2}_{O(\Psi^3)} + \underbrace{(1 + \eta_3)\Psi|\Psi|}_{O(\Psi^2)} + \underbrace{\eta_3\Psi + (\eta_2 - \eta_1)|\Psi|}_{O(\Psi)} + \eta_2 - \eta_1\eta_3 = 0. \quad (9)$$

Vediamo due casi particolari importanti.

Quando $\eta_2 = 0$ si ha $S = 0$ e di conseguenza $\Psi = T > 0$. L'equazione per Ψ si riduce ad un'equazione quadratica

$$T^2 + T - \eta_1 = 0 \quad ; \quad S = 0$$

con soluzione accettabile

$$T = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \eta_1}$$

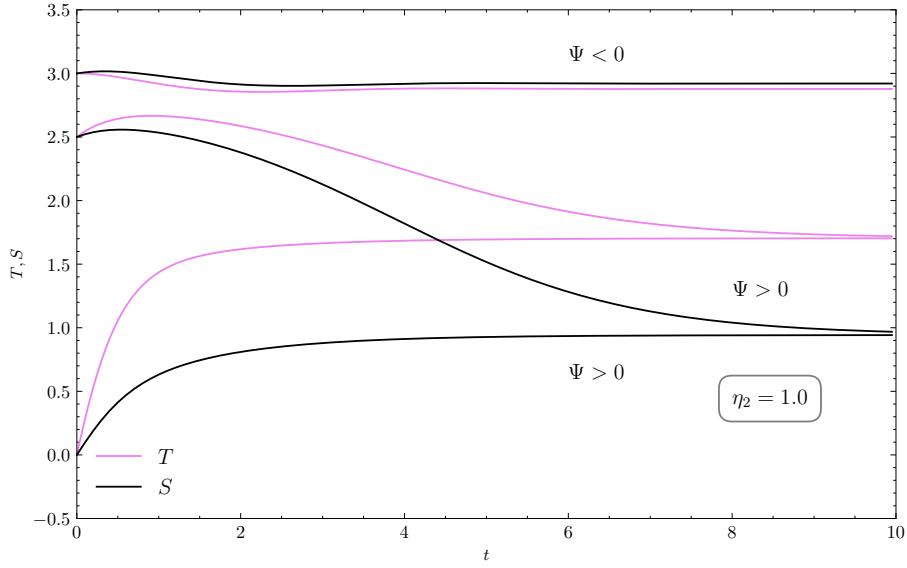


Figura 3: Traiettorie con $\eta_1 = 3.0, \eta_2 = 1.0, \eta_3 = 0.3$ a partire da $(0.0, 0.0), (2.5, 2.5)$ e $(3.0, 3.0)$; quest'ultima rappresenta una corrente con sinking a Sud ($\Psi < 0$).

nota anche come soluzione TH. In questo caso si ha un flusso verso il il recipiente a Nord dovuto alla differenza di temperatura tra equatore e polo con acqua più calda che fluisce verso il polo attraverso l'overflow e acqua più fredda verso l'equatore attraverso il tubo. Quando $\eta_1 = 0$, invece, non c'è forzante termica, per cui $T = 0$ e $\Psi = -S < 0$. Dall'equazione quadratica

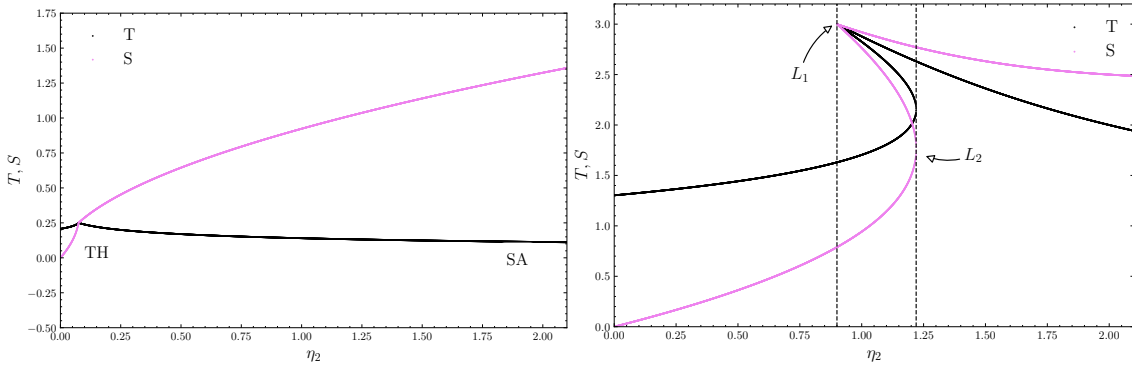
$$S^2 + \eta_3 S - \eta_2 = 0$$

otteniamo la cosiddetta soluzione SA:

$$T = 0; S = \frac{1}{2}\eta_3 - \sqrt{\frac{1}{4}\eta_3^2 + \eta_2}$$

rappresentante un flusso dovuto ad alta salinità all'equatore. Notiamo che si è inglobato il segno meno per avere una salinità positiva.

Studiamo la struttura delle soluzioni di equilibrio vedendone il comportamento per qualche valore tipico dei parametri. In Figura 4a possiamo osservare un plot dei valori stazionari di T, S



(a) Valori dei parametri fissati: $\eta_1 = 0.25, \eta_3 = 0.3$.

(b) Valori dei parametri fissati: $\eta_1 = 3.0, \eta_3 = 0.3$.

Figura 4: Plot dei valori stazionari di temperatura T e salinità S per il modello 6 fissando i valori dei parametri η_1 ed η_3 e facendo variare η_2 .

in quello che viene chiamato diagramma di biforcazione. C'è un'unica soluzione che assume tre diversi possibili comportamenti: temperature-driven ($\Psi = T - S > 0$) per piccoli valori di η_2 ,

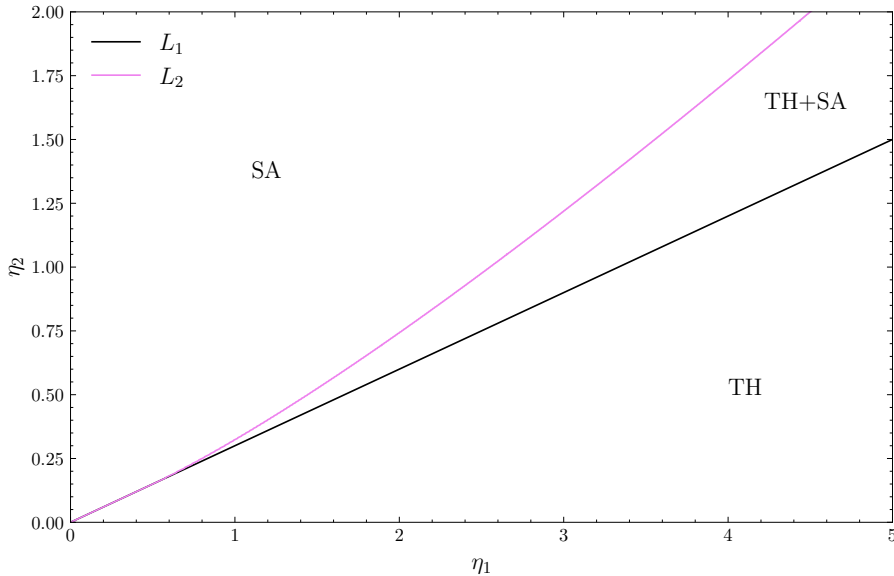


Figura 5: Posizione dei punti limite L_1 ed L_2 nello spazio dei parametri (η_1, η_2)

motionless ($\Psi = 0$) per $\eta_2 = \eta_1\eta_3$ (vedi Eq. 9) e infine salinity-driven ($\Psi < 0$) per valori più elevati di η_2 . Possiamo quindi dire che aumentando η_2 si passa da una soluzione di tipo TH ad una di tipo SA.

Come già osservato alla fine della sezione 2.1 gli andamenti per il problema dipendente dal tempo con $\eta_1 = 3.0$ visualizzati in Figura 3 suggeriscono un comportamento di biforcazione del sistema rispetto a tale parametro. In Figura 4b è mostrato l'andamento fissando $\eta_1 = 3.0, \eta_3 = 0.3$. Fino ad un certo punto che chiameremo L_1 vi è un'unica soluzione di tipo TH. In seguito, fino ad un valore di η_2 detto L_2 vi saranno tre soluzioni di equilibrio sia TH che SA; infine, da L_2 in poi vi sarà un'unica soluzione del tipo SA. In sostanza, L_1 ed L_2 delimitano esattamente la regione a più soluzioni di equilibrio.

SE ora determiniamo la posizione di questi due punti al variare di η_1, η_2 otteniamo un'altra visualizzazione, detta diagramma di regime, riportata in Figura 5. Il luogo dei punti che rappresentano L_1 corrisponde alla retta $\eta_2 = \eta_1\eta_3$, ovvero il caso in cui non si ha flusso (vedi Eq. 9). A destra della branching line data dai punti di L_1 vi è un'unica soluzione con sinking a Nord (TH), mentre a sinistra di L_2 abbiamo nuovamente un'unica soluzione con sinking a Sud (SA). Tra le due abbiamo entrambi i tipi di soluzione, con il sistema in grado di tendere a diverse soluzioni di equilibrio (con direzioni opposte della circolazione) a parità di forcing conditions.

3 Perturbazioni come forcing conditions

Lo scopo di questo lavoro è studiare come cambia il comportamento del sistema all'equilibrio quando è soggetto ad alcuni tipi di perturbazioni. In pratica, si vuole studiare la frazione di membri dell'ensemble considerato che passano da un tipo di soluzione TH, quindi con un verso di circolazione dettato da $\Psi > 0$, ad una soluzione SA, con circolazione in direzione opposta per quanto detto. D'ora in poi con 'probabilità di flip' indicheremo la probabilità che avvenga la transizione di cui sopra.

Se si suppone che il modello di Stommel possa descrivere gli aspetti essenziali della dinamica di una circolazione a larga scala come l'AMOC, risulta importante stabilire quali fattori, tra quelli che impattano la temperatura e salinità dell'oceano possano causare un tale flip. Il collasso dell'AMOC per arrivare poi ad una possibile inversione di circolazione è considerato uno dei tipping points del sistema climatico, per cui lo studio delle condizioni che favorirebbero tale fenomeno sono tema di studio.

3.1 Forma delle perturbazioni considerate

Abbiamo considerato tre tipologie di semplici perturbazioni:

- Un ‘white noise’ sulla salinità e temperatura dei membri dell’ensemble ad ogni tempo della simulazione. Nel nostro caso il rumore è gaussiano con sigma che chiamiamo σ_T e σ_S , rispettivamente, e viene sommato alla funzione che descrive temperatura e salinità superficiali.
- Un warming rate che varia linearmente con il tempo, specifico per ogni box (polare ed equatoriale). Il warming rate Γ , misurato in $^{\circ}\text{C}/\text{year}$ viene applicato per tutti i tempi $t \leq t_{\text{warming}} = 100 \text{ yrs}$.
- Un flusso di acqua fresca nella box polare dovuta allo scioglimento dell’ice sheet in Groenlandia. Detto V_{ice} il volume di ghiaccio che si può sciogliere, t_{melt} il tempo di scioglimento e $\Delta x, \Delta y$ le dimensioni laterali del recipiente polare, abbiamo un freshwater flux pari a

$$\Phi(t) = -\frac{1}{t_{\text{melt}}} \frac{V_{\text{ice}}}{\Delta x \Delta y}$$

3.2 Valori usati negli esperimenti

In tabella 1 sono riportati i valori delle grandezze fisiche utilizzati per effettuare le simulazioni con DAPPER.

4 DA Algorithm

La Data assimilation (DA) è definita come il set di tecniche statistiche che permettono di migliorare la conoscenza dello stato passato, presente o futuro del sistema utilizzando congiuntamente i dati sperimentali e la conoscenza teorica (a priori) del sistema.

Lo stato del sistema è rappresentato da un vettore \mathbf{x} , che chiameremo vettore di stato con le seguenti componenti

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} T_{p^*} \\ T_{e^*} \\ S_{p^*} \\ S_{e^*} \\ R_S \\ R_T \\ \gamma' \end{bmatrix}$$

Detto \mathbf{y} il vettore contenente le osservazioni, la relazione con il vettore di stato è data da

$$\mathbf{y} = \mathcal{H}(\mathbf{x}) + \epsilon$$

con \mathcal{H} operatore di osservazione dato da

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e ϵ errore osservazionale gaussiano con $\sigma_T = 0.5^{\circ}\text{C}$, $\sigma_S = 0.05 \text{ ppt}$.

Come algoritmo di DA abbiamo utilizzato l’ETKF (Deterministic Ensemble Kalman Filter), che riportiamo in maniera schematica:

Dato	Valore	Source/Spiegazione
Temperatura (dell'oceano)	Polo: 6°C Equatore: 6°C	data
Salinità (dell'oceano)	Polo: 35 ppt Equatore: 36.5 ppt	data
Tempo di rilassamento della temperatura	$R_T = 5.48 \times 10^{-10} \text{ s}^{-1}$	[2], data
Tempo di rilassamento della salinità	$R_S = 1.64 \times 10^{-10} \text{ s}^{-1}$	[2], data
Δx (larghezza del bacino del Nord Atlantico in direzione laterale) 4800 km		britannica
Δy (larghezza del bacino del Nord Atlantico in direzione longitudinale) 5200 km		report
Δz (profondità del bacino del Nord Atlantico in direzione longitudinale) 3650 km		2 paragrafo, britannica
ρ_0 (densità di riferimento)	1027 kg m ⁻³	2 paragrafo, sez. 2
S_0 (densità di riferimento)	35 ppt	2 paragrafo, sez. 2
T_0 (densità di riferimento)	10°	2 paragrafo, sez. 2
α_T (coefficiente di espansione termica)	$\frac{0.15 \text{ K}^{-1}}{\rho_0}$	2 paragrafo, sez. 2
α_S (coefficiente di contrazione alina)	$\frac{0.78 \text{ ppt}^{-1}}{\rho_0}$	2 paragrafo, sez. 2
γ (coefficiente di trasporto avvettivo)	$\frac{\rho_0}{\rho_p - \rho_e} \frac{Q_{\text{overturning}}}{\Delta x \Delta z}$	$\rho_p - \rho_e$ calcolati usando le condizioni iniziali e l'eq. di stato
V_{ice}	$3.46 \cdot 10^6 \text{ km}^3$	wikipedia
t_{melt}	100 yrs	Per convenienza, immaginando sia simile a t_{warming}
t_{warming}	100 yrs	
$\Gamma_{\text{equatoriale}}$	3°	IPCC 4th assessment
Γ_{polare}	6° Stimato essere circa doppio rispetto a quello polare (vedi abstract source)	abstract

Tabella 1: Tabella contenente i valori utilizzati per le grandezze fisiche.

ETKF

1. Initialization:

- Ensemble of state vectors $\mathbf{E}_0^f = \{x_0, \dots, x_{N_e}\}$

2. For $t_k = 1, 2, \dots$

a. Analysis

- Compute forecast mean, the ensemble anomalies and the observation anomalies:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{x}}_k^f &= \mathbf{E}_k^f \mathbf{1} / N_e \\ \mathbf{X}_k^f &= (\mathbf{E}_k^f - \bar{\mathbf{x}}_k^f \mathbf{1}^T) / \sqrt{N_e - 1} \\ \mathbf{Y}_k^f &= (H_k(\mathbf{E}_k^f) - H_k(\bar{\mathbf{x}}_k^f) \mathbf{1}^T) / \sqrt{N_e - 1}\end{aligned}$$

- Computation of ensemble transform matrix

$$\mathbf{\Omega} = (\mathbf{I}_e + \mathbf{Y}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{Y}_k)^{-1}$$

- Analysis estimate in ensemble space

$$\mathbf{w}_k^a = \mathbf{\Omega} (\mathbf{Y}_k^f)^T \mathbf{R}_k^{-1} (\mathbf{y}_k - H_k(\bar{\mathbf{x}}_k^f))$$

- Generating the posterior ensemble

$$\mathbf{E}_k^a = \bar{\mathbf{x}}_k^f \mathbf{1}^T + \mathbf{X}_k^f (\mathbf{w}_k^a \mathbf{1}^T + \sqrt{N_e - 1} \mathbf{\Omega}^{1/2})$$

b. Forecast

- Forecast ensemble

$$\mathbf{E}_{k+1}^f = M_{k+1}(\mathbf{E}_k^a)$$

Per una trattazione completa si veda [3].

Il motivo per cui abbiamo utilizzato la DA è che le stime dei parametri R_T e R_S non sono in genere molto affidabili e quindi si utilizzano gli algoritmi di DA per avere risultati più accurati. Negli script che la utilizzano, la DA è attiva solo per i primi 20 anni di simulazione, e viene fatta una osservazione per ogni anno. La libreria **DAPPER** implementa gli algoritmi di DA usati.

5 Risultati

Osserviamo subito che tutte le simulazioni sono svolte su un tempo di 200 anni, alla fine dei quali viene calcolata la probabilità di flip.

Per prima cosa si è verificato se il codice producesse l'output atteso. Abbiamo fatto un piccolo setup in cui si variavano le condizioni iniziali, in modo da avere uno spread iniziale dell'ensemble, ma non applicando perturbazioni. Come atteso, i membri dell'ensemble sono tornati allo stato di equilibrio (vedi Figura 6).

Si è studiato poi l'effetto del white noise applicato a temperatura e salinità per vedere se da solo può portare i membri dell'ensemble a cambiare da uno stato TH a uno SA. La figura 7 mostra che per valori di deviazione standard ragionevoli il white noise non provoca il flip.

Abbiamo poi fissato $\sigma_T = 2.0$ °C e $\sigma_S = 0.2$ ppt e abbiamo perturbato i valori delle temperature superficiali sia al polo che all'equatore applicandogli un tasso di riscaldamento lineare variabile per studiarne anche in questo caso i valori delle probabilità di flip. Si è poi applicato, nella metà dei casi, anche il flusso di acqua non salata proveniente dallo scioglimento dello strato di ghiaccio della Groenlandia, fissando $t_{\text{melt}} = 100$ anni. I grafici sono riportati in Figura 8. Essi mostrano come l'applicazione del DA modifichi i risultati, aumentando la stabilità del sistema, che infatti

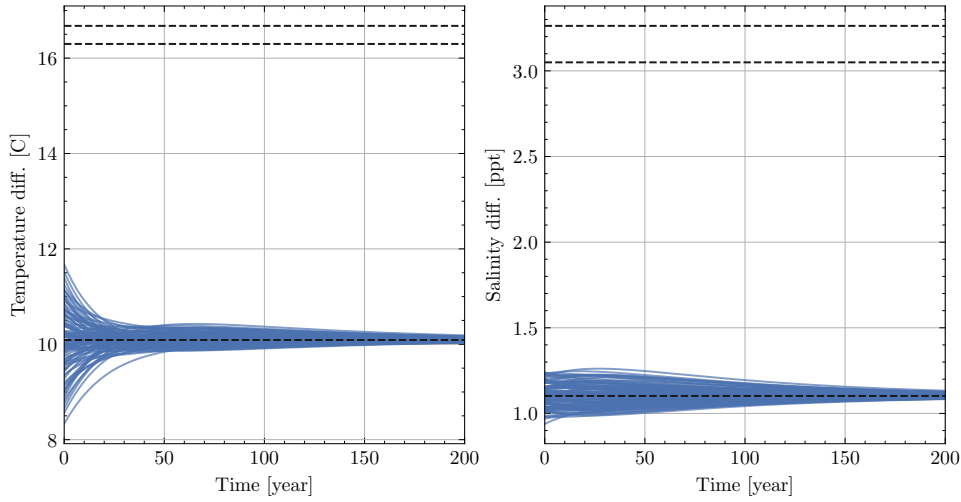


Figura 6: Evoluzione temporale dei membri dell'ensemble con diverse condizioni iniziali.

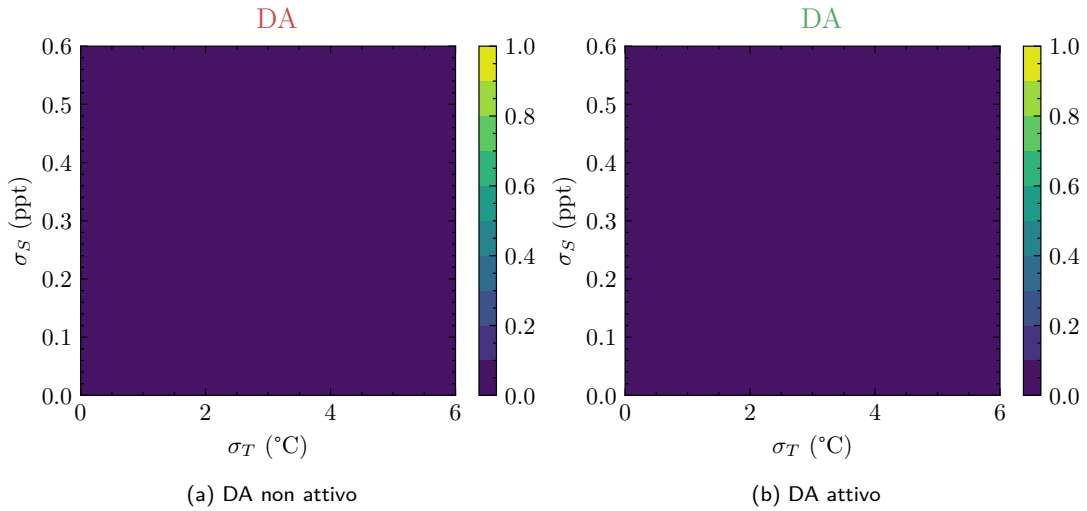


Figura 7: Probabilità di flip se viene applicato un white noise alla temperatura e alla salinità rispettivamente con deviazione standard σ_T e σ_S .

deve ricevere perturbazioni di magnitudine maggiore per avere il flip dello stato. I grafici, inoltre, sottolineano l'importanza dello scioglimento del ghiaccio, che risulta quindi la perturbazione che influisce maggiormente sulla probabilità di flip.

Abbiamo poi fissato $\Gamma_p = 0.06$ °C/yr sul polo e a $\Gamma_e = 0.03$ °C/yr sull'equatore e abbiamo variato il tempo di scioglimento dello strato di ghiaccio t_{melt} . I risultati ottenuti sono riportati in Figura 9. Si può osservare come, anche in questo caso, l'utilizzo del DA aumenti di molto la stabilità del sistema. Infatti senza l'utilizzo del DA la probabilità di flip è indipendente dal tempo di scioglimento del ghiacciaio nel range studiato, ma attivando il DA si può osservare che, come ci si poteva intuitivamente aspettare, la probabilità di flip diminuisce se si fa aumentare il tempo di scioglimento, cioè si diminuisce il flusso di acqua non salata al polo.

6 Conclusioni

Abbiamo studiato con che probabilità le varie perturbazioni possono invertire il flusso di corrente. Le due maggiori cause sono quindi il riscaldamento delle temperature superficiali dei due bacini polare ed equatoriale e lo scioglimento dello strato di ghiaccio della Groenlandia. Abbiamo inoltre

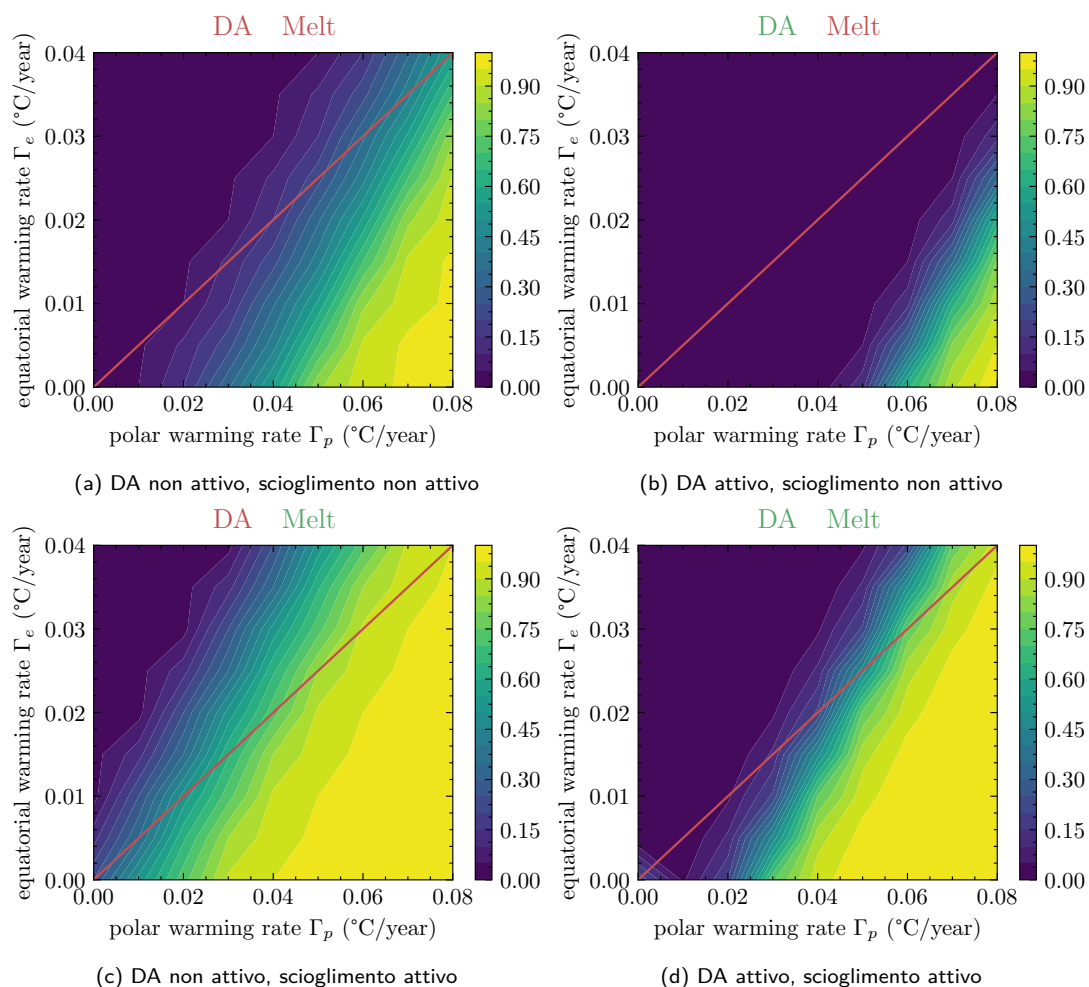


Figura 8: Probabilità di flip con diversi warming rate al polo e all'equatore, dove si vuole studiare l'effetto del DA e dello scioglimento dello strato di ghiaccio in Groenlandia. La retta in rosso rappresenta una stima del rapporto tra il tasso di riscaldamento polare e quello equatoriale come misurato in studi precedenti [4].

visto la sostanziale differenza fra i risultati ottenuti sfruttando algoritmi di Data Assimilation (DA) e senza, vedendo come i primi predicano una maggior stabilità del regime del flusso.

Il modello presenta però molti limiti. In primis è un modello molto semplificato rispetto alla circolazione oceanica reale, considerando solo 2 bacini cubici descritti da temperatura e salinità media. Si dovrebbe considerare un numero di recipienti accoppiati come i due singoli considerati per fare considerazioni più precise. Inoltre si sono usate solo perturbazioni lineari e costanti, quando invece la temperatura superficiale varia in modo periodico durante l'intero anno. Si sono inoltre ignorate le perturbazioni dovute alle precipitazioni, che porterebbero ad un ulteriore flusso di acqua non salata, non limitato però al solo bacino polare. Abbiamo poi usato come osservazioni per il Data Assimilation quelle generate dalla libreria DAPPER (basate su considerazioni di verosimiglianza ad una situazione fisica reale), e non misurazioni vere. Per ultimo, siamo riusciti a lavorare solo con ensemble costituito da un numero ristretto di membri (100) in quanto, l'aumento di questi ultimi, incrementa di molto il peso computazionale della simulazione (molto più di un aumento di intervallo temporale simulato).

Riferimenti bibliografici

- [1] Stommel H., Thermohaline Convection with Two Stable Regimes of Flow. *Tellus*, 13(2):224–230 (1961).

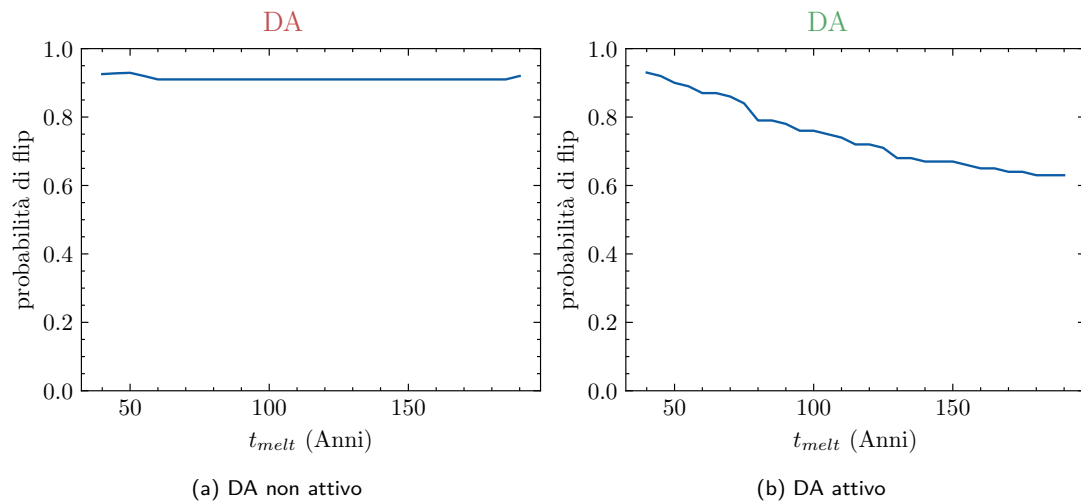


Figura 9: Grafico che mostra la probabilità di flip in funzione del tempo di scioglimento dello strato di ghiaccio in Groenlandia t_{melt}

- [2] Dijkstra H., Dynamical Oceanography, Springer Berlin, Heidelberg (2008). <https://doi.org/10.1007/978-3-540-76376-5>
- [3] Geir Evensen, et al., Data Assimilation Fundamentals, Springer Cham (2022). <https://doi.org/10.1007/978-3-030-96709-3>
- [4] Zhang, Jinlun, Warming of the arctic ice-ocean system is faster than the global average since the 1960s. Geophysical Research Letters, 2005. <https://doi.org/10.1029/2005GL024216>