GELSON IEZZI
SAMUEL HAZZAN

FUNDAMENTOS DE

MATEMÁTICA ELEMENTAR 4

SEQUÊNCIAS MATRIZES DETERMINANTES SISTEMAS

42 exercícios resolvidos
306 exercícios propostos com resposta
310 testes de vestibular com resposta

2ª edição

ATUAL EDITORA

Capa
Roberto Franklin Rondino
Sylvio Ulhoa Cintra Filho
Rua Inhambu, 1235 — S. Paulo

Composição e desenhos
AM Produções Gráficas Ltda.
Rua Castro Alves, 135 — S. Paulo

Artes
Atual Editora Ltda.

Fotolitos
H.O.P. Fotolitos Ltda.
Rua Delmira Ferreira, 325 — S. Paulo

Impressão e acabamento
Gráfica Editora Hamburg Ltda.
Rua Apeninos, 294
278-1620 — 278-2648 — 279-9776
São Paulo — SP — Brasil

CIP-Brasil. Catalogação-na-Fonte
Câmara Brasileira do Livro, SP

F977 v.1-2, 4-6

Fundamentos de matemática elementar [por] Gelson Iezzi [e outros] São Paulo, Atual Ed., 1977-

Co-autores: Carlos Murakami, Osvaldo Dolce e Samuel Hazzan; a autoria dos volumes individuais varia entre os 4 autores.
Conteúdo: v.1. Conjuntos, funções.-v.2. Logaritmos.-v.4. Seqüencias, matrizes determinantes, sistemas.-v.5. Combinatória, probabilidade.-v.6. Complexos, polinômios, equações.

1. Matemática (2º grau) I. Dolce, Osvaldo, 1938- II. Iezzi, Gelson, 1939- III. Hazzan, Samuel, 1946- IV. Murakami, Carlos, 1943-

77-1333 CDD-510

Índice para catálogo sistemático:
1. Matemática 510

ATUAL EDITORA LTDA
Rua José Antônio Coelho, 785
Telefones: 71-7795 e 549-1720
CEP 04011 — São Paulo — SP — Brasil

APRESENTAÇÃO

"Fundamentos de Matemática Elementar" é uma coleção em dez volumes elaborada com a pretensão de dar ao estudante uma visão global da Matemática, ao nível da escola de 2º grau. Desenvolvendo os programas em geral adotados para o curso colegial, os "Fundamentos" visam aos alunos em preparativos para exames vestibulares, aos universitários que necessitam rever a Matemática Elementar e também, como é óbvio, àqueles alunos de colegial mais interessados na "rainha das ciências".

No desenvolvimento dos inúmeros capítulos dos livros de "Fundamentos" procuramos seguir uma ordem lógica na apresentação de conceitos e propriedades. Salvo algumas exceções bem conhecidas da Matemática Elementar, as proposições e teoremas estão sempre acompanhados das respectivas demonstrações.

Na estruturação das séries de exercícios, buscamos sempre uma ordenação crescente de dificuldade. Partimos de problemas simples e tentamos chegar a questões que envolvem outros assuntos já vistos, obrigando o estudante a uma revisão. A seqüência do texto sugere uma dosagem para teoria e exercícios. Os exercícios resolvidos, apresentados em meio aos propostos, pretendem sempre dar explicação sobre alguma novidade que aparece. No final do volume o aluno pode encontrar a resposta para cada problema proposto e assim, ter seu reforço positivo ou partir à procura do erro cometido.

A última parte de cada volume é constituída por testes de vestibulares até 1.977 selecionados e resolvidos o que pode ser usado para uma revisão da matéria estudada.

Queremos consignar aqui nossos agradecimentos sinceros ao Prof. Dr. Fernando Furquim de Almeida cujo apoio foi imprescindível para que pudéssemos homenagear nesta coleção alguns dos grandes matemáticos, relatando fatos notáveis de suas vidas e suas obras.

Finalmente, como há sempre uma enorme distância entre o anseio dos autores e o valor de sua obra, gostaríamos de receber dos colegas professores uma apreciação sobre este trabalho, notadamente os comentários críticos, os quais agradecemos.

Os autores

ÍNDICE

CAPÍTULO I – SEQÜÊNCIAS

CAPÍTULO II – PROGRESSÃO ARITMÉTICA

CAPÍTULO III – PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

CAPÍTULO IV — MATRIZES

CAPÍTULO V — DETERMINANTES

Apêndice I

Apêndice II

CAPÍTULO VI — SISTEMAS LINEARES

Pierre-Simon de Laplace
(1749 - 1827)

Napoleão demite ministro do interior

Pierre-Simon de Laplace francês, de descendência humilde, estudou na Academia Militar por influência de amigos.

Sem grandes convicções políticas, pouco participou de atividades revolucionárias embora tenha sido nomeado por Napoleão para o cargo de Ministro do Interior do qual foi despojado logo mais pois, como dizia o próprio Napoleão, "ele transportava o espírito do infinitamente pequeno à direção dos negócios de sua pasta". Mesmo assim, acabada a Revolução Francesa, recebeu o título de marquês e em suas obras procurava sempre incluir elogios fervorosos ao grupo que estivesse no poder, procurando assim fazer as pazes com cada regime que aparecesse.

Laplace foi professor na Escola Normal e na Escola Politécnica, participando também do Comitê de Pesos e Medidas.

Seus principais resultados foram em Teoria das Probabilidades, publicando uma obra admirável que é a *"Teoria Analítica das Probabilidades"* em 1812, onde mostra ter conhecimentos avançados de Análise.

Em *"Ensaio filosófico das probabilidades"* escreveu que "no fundo a Teoria das probabilidades é apenas o senso comum expresso em números".

Em *"Teoria Analítica"* encontramos entre outros resultados, o cálculo de π através dos problemas das agulhas de Buffon, esquecido há muitos anos, e um estudo da probabilidade inversa iniciado por Bayes.

Em *"Exposição do Sistema do Mundo"*, de 1796, e em *"Mecânica Celeste"*, de 1799, apresentou sua hipótese de que o sistema solar se originou de um gás incandescente girando em torno de um eixo que, ao esfriar, se contraiu causando rotação cada vez mais rápida até que da camada externa se desprenderam sucessivos anéis que formaram os planetas. O centro restante da massa de gás, em rotação, constituiu o sol. Esta publicação marcou o auge da teoria de Newton, explicando todas as perturbações do sistema solar, sua estabilidade e seu movimento que é secular, não lhe parecendo mais necessário admitir a intervenção divina em certas ocasiões.

Para Laplace a natureza era a essência e a Matemática apenas uma coleção de instrumentos, que ele sabia manejar com muita habilidade sempre mantendo um sentimento de honestidade intelectual com as Ciências.

CAPÍTULO I

SEQÜÊNCIAS

I. NOÇÕES INICIAIS

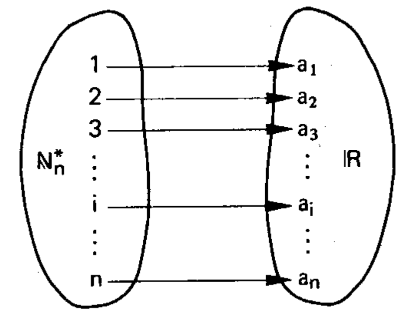
1. Definição

Chama-se *seqüência finita ou n-upla* toda aplicação f do conjunto

$\mathbb{N}_n^* = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ em $\mathbb{R}$.

Assim, em toda seqüência finita, a cada número natural **i** $(1 \leqslant i \leqslant n)$ está associado um número real $\mathbf{a_i}$

$f = \{(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), \ldots, (n, a_n)\}$.

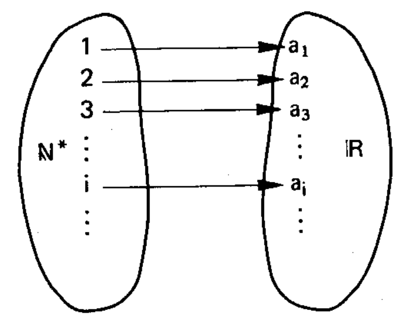


2. Definição

Chama-se *seqüência infinita* toda aplicação f de $\mathbb{N}^*$ em $\mathbb{R}$.

Em toda seqüência infinita, a cada $i \in \mathbb{N}^*$ está associado um $a_i \in \mathbb{R}$.

$f = \{(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), \ldots, (i, a_i), \ldots\}$



Vamos, daqui em diante, indicar uma seqüência f anotando apenas a imagem de f:

$$f = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_i, \ldots)$$

onde aparecem entre parênteses ordenadamente, da esquerda para a direita, as imagens dos naturais 1, 2, 3, . . . , i, ...

Quando queremos indicar uma seqüência f qualquer, escrevemos

$$f = (a_i)_{i \in I}$$

e lemos "seqüência f dos termos a_i onde o conjunto de índices é I".

3. Exemplos

1º) (1, 2, 3, 4, 6, 12) é a seqüência (finita) dos divisores inteiros positivos de 12 dispostos em ordem crescente.

2º) (2, 4, 6, 8, . . . , 2i, . . .) é a seqüência (infinita) dos múltiplos inteiros positivos de 2.

3º) (2, 3, 5, 7, 11, . . .) é a seqüência (infinita) dos números primos positivos.

Observando o 2º exemplo, notamos que estão indicadas entre parênteses as imagens de 1, 2, 3, . . . , i, . . . na aplicação $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ dada por $f(i) = 2i$.

II. IGUALDADE

4. Sabemos que duas aplicações f e g são iguais quando têm domínios iguais e $f(x) = g(x)$ para todo **x** do domínio. Assim, duas seqüências infinitas $f = (a_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ e $g = (b_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ são iguais quando $f(i) = g(i)$, isto é, $a_i = b_i$ para todo $i \in \mathbb{N}^*$. Em símbolos:

$$\boxed{f = g \iff a_i = b_i, \ \forall i \in \mathbb{N}^*}$$

III. LEI DE FORMAÇÃO

Interessam à Matemática as seqüências em que os termos se sucedem obedecendo a certa regra, isto é, aquelas que têm uma lei de formação. Esta pode ser apresentada de três maneiras:

5. Por fórmula de recorrência

São dadas duas regras: uma para identificar o primeiro termo (a_1) e outra para calcular cada termo (a_n) a partir do antecedente (a_{n-1}).

Exemplos

1º) Escrever a seqüência finita f cujos termos obedecem a seguinte fórmula de recorrência: $a_1 = 2$ e $a_n = a_{n-1} + 3, \forall n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

Temos:

$$\begin{aligned}
n = 2 &\Rightarrow a_2 = a_1 + 3 = 2 + 3 = 5\\
n = 3 &\Rightarrow a_3 = a_2 + 3 = 5 + 3 = 8\\
n = 4 &\Rightarrow a_4 = a_3 + 3 = 8 + 3 = 11\\
n = 5 &\Rightarrow a_5 = a_4 + 3 = 11 + 3 = 14\\
n = 6 &\Rightarrow a_6 = a_5 + 3 = 14 + 3 = 17
\end{aligned}$$

então $f = (2, 5, 8, 11, 14, 17)$.

2º) Escrever os cinco termos iniciais da seqüência infinita g dada pela seguinte fórmula de recorrência: $b_1 = 1$ e $b_n = 3 \cdot b_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 2$.

Temos:

$$\begin{aligned}
n = 2 &\Rightarrow b_2 = 3 \cdot b_1 = 3 \cdot 1 = 3\\
n = 3 &\Rightarrow b_3 = 3 \cdot b_2 = 3 \cdot 3 = 9\\
n = 4 &\Rightarrow b_4 = 3 \cdot b_3 = 3 \cdot 9 = 27\\
n = 5 &\Rightarrow b_5 = 3 \cdot b_4 = 3 \cdot 27 = 81
\end{aligned}$$

então $g = (1, 3, 9, 27, 81, \ldots)$.

6. Expressando cada termo em função de sua posição

É dada uma fórmula que expressa a_n em função de n.

Exemplos

1º) Escrever a seqüência finita f cujos termos obedecem à lei $a_n = 2^n$, $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Temos:

$a_1 = 2^1 = 2$, $a_2 = 2^2 = 4$, $a_3 = 2^3 = 8$ e $a_4 = 2^4 = 16$ então $f = (2, 4, 8, 16)$.

2º) Escrever os cinco termos iniciais da seqüência infinita g em que os termos verificam a relação $b_n = 3n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Temos:

$b_1 = 3 \cdot 1 + 1 = 4$, $b_2 = 3 \cdot 2 + 1 = 7$, $b_3 = 3 \cdot 3 + 1 = 10$,
$b_4 = 3 \cdot 4 + 1 = 13$ e $b_5 = 3 \cdot 5 + 1 = 16$ então $g = (4, 7, 10, 13, 16, \ldots)$.

7. Por propriedade dos termos

É dada uma propriedade que os termos da seqüência devem apresentar.

Exemplos

1º) Escrever a seqüência finita f de seis termos em que cada termo é igual ao número de divisores inteiros do respectivo índice.

Temos:

$D(1) = \{1, -1\} \Rightarrow a_1 = 2$

$D(2) = \{1, -1, 2, -2\} \Rightarrow a_2 = 4$

$D(3) = \{1, -1, 3, -3\} \Rightarrow a_3 = 4$

$D(4) = \{1, -1, 2, -2, 4, -4\} \Rightarrow a_4 = 6$

$D(5) = \{1, -1, 5, -5\} \Rightarrow a_5 = 4$

$D(6) = \{1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6\} \Rightarrow a_6 = 8$

então $f = (2, 4, 4, 6, 4, 8)$.

2º) Escrever os cinco termos iniciais da seqüência infinita g formada pelos números primos positivos colocados em ordem crescente.

Temos $g = (2, 3, 5, 7, 11, \dots)$.

Notemos que esta seqüência não pode ser dada por fórmula de recorrência bem como não existe fórmula para calcular o n-ézimo número primo positivo a partir de n.

EXERCÍCIOS

D.1 Escrever os seis termos iniciais das seqüências dadas pelas seguintes fórmulas de recorrência:

a) $a_1 = 5$ e $a_n = a_{n-1} + 2, \quad \forall n \geqslant 2$
b) $b_1 = 3$ e $b_n = 2 \cdot b_{n-1}, \quad \forall n \geqslant 2$
c) $c_1 = 2$ e $c_n = (c_{n-1})^2, \quad \forall n \geqslant 2$
d) $d_1 = 4$ e $d_n = (-1)^n \cdot d_{n-1}, \forall n \geqslant 2$
e) $e_1 = -2$ e $e_n = (e_{n-1})^n, \quad \forall n \geqslant 2.$

D.2 Escrever os seis termos iniciais das seqüências dadas pelas seguintes leis:

a) $a_n = 3n - 2, \quad \forall n \geqslant 1$
b) $b_n = 2 \cdot 3^n, \quad \forall n \geqslant 1$
c) $c_n = n(n+1), \forall n \geqslant 1$
d) $d_n = (-2)^n, \quad \forall n \geqslant 1$
e) $e_n = n^3, \quad \forall n \geqslant 1.$

D.3 Descrever por meio de uma fórmula de recorrência cada uma das seqüências abaixo:

a) $(3, 6, 9, 12, 15, 18, \dots)$
b) $(1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots)$
c) $(1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots)$
d) $(5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots)$
e) $(0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots)$

CAPÍTULO II

PROGRESSÃO ARITMÉTICA

I. DEFINIÇÃO

8. Chama-se *progressão aritmética* (P.A.) uma seqüência dada pela seguinte fórmula de recorrência:

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_n = a_{n-1} + r, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2 \end{cases}$$

onde **a** e **r** são números reais dados.

Assim, uma P.A. é uma seqüência em que cada termo, a partir do segundo, é a soma do anterior com uma constante r dada.

Eis alguns exemplos de progressões aritméticas:

$f_1 = (1, 3, 5, 7, 9, \dots)$ onde $a_1 = 1$ e $r = 2$

$f_2 = (0, -2, -4, -6, -8, \dots)$ onde $a_1 = 0$ e $r = -2$

$f_3 = (4, 4, 4, 4, 4, \dots)$ onde $a_1 = 4$ e $r = 0$

$f_4 = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \dots\right)$ onde $a_1 = \frac{1}{2}$ e $r = 1$

$f_5 = \left(4, \frac{11}{3}, \frac{10}{3}, 3, \frac{8}{3}, \dots\right)$ onde $a_1 = 4$ e $r = -\frac{1}{3}$

II. CLASSIFICAÇÃO

As progressões aritméticas podem ser classificadas em três categorias:

1ª) *crescentes* são as P.A. em que cada termo é maior que o anterior. É imediato que isto ocorre somente se $r > 0$, pois:

$$a_n > a_{n-1} \iff a_n - a_{n-1} > 0 \iff r > 0.$$

Exemplos: f_1 e f_4.

2ª) *constantes* são as P.A. em que cada termo é igual ao anterior. É fácil ver que isto só ocorre quando $r = 0$, pois:

$$a_n = a_{n-1} \iff a_n - a_{n-1} = 0 \iff r = 0$$

Exemplo: f_3

3ª) *decrescentes* são as P.A. em que cada termo é menor que o anterior. Isto ocorre somente se $r < 0$, pois:

$$a_n < a_{n-1} \iff a_n - a_{n-1} < 0 \iff r < 0.$$

Exemplos: f_2 e f_5.

III. NOTAÇÕES ESPECIAIS

Quando procuramos obter uma P.A. com 3 ou 4 ou 5 termos é muito prática a notação seguinte:

1ª) para 3 termos: $(x, x + r, x + 2r)$ ou $(x - r, x, x + r)$

2ª) para 4 termos: $(x, x + r, x + 2r, x + 3r)$ ou $(x - 3y, x - y, x + y, x + 3y)$ onde $y = \frac{r}{2}$.

3ª) para 5 termos: $(x, x + r, x + 2r, x + 3r, x + 4r)$ ou $(x - 2r, x - r, x, x + r, x + 2r)$.

EXERCÍCIOS

D.4 Determinar x de modo que $(x, 2x + 1, 5x + 7)$ seja uma P.A.

Solução

Devemos ter $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$, então:

$$(2x + 1) - x = (5x + 7) - (2x + 1) \Rightarrow x + 1 = 3x + 6 \Rightarrow x = -\frac{5}{2}.$$

D.5 Determinar a de modo que $(a^2, (a + 1)^2, (a + 5)^2)$ seja uma P.A.

D.6 Obter uma P.A. de três termos tais que sua soma seja 24 e seu produto seja 440.

Solução

Empregando a notação especial $(x - r, x, x + r)$ para a P.A., temos:

$$\begin{cases} (1)\ (x - r) + x + (x + r) = 24 \\ (2)\ (x - r) \cdot x \cdot (x + r) = 440 \end{cases}$$

De (1) obtemos $x = 8$, substituindo em (2) vem:

$$(8 - r) \cdot 8 \cdot (8 + r) = 440 \iff 64 - r^2 = 55 \iff r^2 = 9 \iff r = \pm 3.$$

Assim, a P.A. procurada é:

$(5, 8, 11)$ para $x = 8$ e $r = 3$ ou $(11, 8, 5)$ para $x = 8$ e $r = -3$.

D.7 Obter uma P.A. crescente formada por números inteiros e consecutivos de modo que a soma de seus cubos seja igual ao quadrado da sua soma.

D.8 Obter 3 números em P.A. sabendo que sua soma é 18 e a soma de seus inversos é $\frac{23}{30}$.

D.9 Uma P.A. é formada por 3 termos com as seguintes propriedades:

I) seu produto é igual ao quadrado de sua soma;
II) a soma dos dois primeiros é igual ao terceiro.

Obter a P.A.

D.10 Obter 3 números em P.A. de modo que sua soma seja 3 e a soma de seus quadrados seja 11.

D.11 Obter uma P.A. de 4 termos inteiros em que a soma dos termos é 32 e o produto é 3 465.

Solução

Empregando a notação especial $(x - 3y, x - y, x + y, x + 3y)$, temos:

$$\begin{cases} (1)\ (x - 3y) + (x - y) + (x + y) + (x + 3y) = 32 \\ (2)\ (x - 3y)\ (x - y)\ (x + y)\ (x + 3y) = 3.465 \end{cases}$$

De (1) vem $4x = 32$, isto é, $x = 8$.

Substituindo em (2) o valor de x, temos:

$$(8 - 3y) \cdot (8 - y) \cdot (8 + y) \cdot (8 + 3y) = 3\,465 \Rightarrow (64 - 9y^2) \cdot (64 - y^2) = 3\,465$$

$$9y^4 - 640y^2 + 631 = 0 \Rightarrow y = \pm \sqrt{\frac{640 \pm \sqrt{386884}}{18}} = \pm \sqrt{\frac{640 \pm 622}{18}}$$

então $y = 1$ ou $y = -1$ ou $y = \frac{\sqrt{631}}{3}$ ou $y = -\frac{\sqrt{631}}{3}$.

Como a P.A. deve ter elementos inteiros, só convêm as duas primeiras. Assim, temos:

$x = 8$ e $y = 1 \Rightarrow (5, 7, 9, 11)$
$x = 8$ e $y = -1 \Rightarrow (11, 9, 7, 5)$

D.12 (FFCLUSP-1965) A soma de quatro termos consecutivos de uma progressão aritmética é -6, o produto do primeiro deles pelo quarto é -54. Determinar esses termos.

D.13 Obter uma P.A. crescente de 4 termos tais que o produto dos extremos seja 45 e o dos meios seja 77.

D.14 Obter 4 números reais em P.A. sabendo que sua soma é 22 e a soma de seus quadrados é 166.

D.15 Obter uma P.A. de 5 termos sabendo que sua soma é 25 e a soma de seus cubos é 3 025.

Solução

Utilizando a notação $(x - 2r, x - r, x, x + r, x + 2r)$, temos:

$$\begin{cases} (1)\ (x - 2r) + (x - r) + x + (x + r) + (x + 2r) = 25 \\ (2)\ (x - 2r)^3 + (x - r)^3 + x^3 + (x + r)^3 + (x + 2r)^3 = 3\,025 \end{cases}$$

De (1) vem: $5x = 25$, isto é, $x = 5$.

De (2) vem:

$(x^3 - 6x^2r + 12xr^2 - 8r^3) + (x^3 - 3x^2r + 3xr^2 - r^3) + x^3 + (x^3 + 3x^2r + 3xr^2 + r^3) + (x^3 + 6x^2r + 12xr^2 + 8r^3) = 3\,025$

isto é: $5x^3 + 30xr^2 = 3\,025$.

Lembrando que $x = 5$, temos:

$5 \cdot 5^3 + 30 \cdot 5 \cdot r^2 = 3\,025 \Rightarrow 150r^2 = 2\,400 \Rightarrow r^2 = 16 \Rightarrow r = \pm 4$.

Portanto a P.A. é: $(-3, 1, 5, 9, 13)$ ou $(13, 9, 5, 1, -3)$.

D.16 Obter uma P.A. decrescente com 5 termos cuja soma é -10 e a soma dos quadrados é 60.

D.17 Obter 5 números reais em P.A., sabendo que sua soma é 5 e a soma de seus inversos é $\frac{563}{63}$.

D.18 Achar 5 números reais em P.A. sabendo que sua soma é 10 e a soma dos cubos dos dois primeiros é igual à soma dos cubos dos dois últimos.

D.19 Mostrar que se (a, b, c) é uma P.A., então (a^2bc, ab^2c, abc^2) também é.

Solução

Temos, por hipótese, $b - a = c - b = r$. Então:

$ab^2c - a^2bc = abc(b - a) = abcr = abc(c - b) = abc^2 - ab^2c$.

D.20 Provar que se $\left(\frac{1}{x+y}, \frac{1}{y+z}, \frac{1}{z+x}\right)$ é uma P.A., então (z^2, x^2, y^2) também é.

D.21 Provar que se (a, b, c) é uma P.A., então $(a^2(b + c), b^2(a + c), c^2(a + b))$ também é.

D.22 Sabendo que (a, b, c) e $\left(\frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}\right)$ são P.A., mostrar que $2ad = c(a + c)$.

D.23 Sabendo que $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ é P.A., provar que:

$(\delta + 3\beta)(\delta - 3\beta) + (\alpha + 3\gamma)(\alpha - 3\gamma) = 2(\alpha\delta - 9\beta\gamma)$.

IV. FÓRMULA DO TERMO GERAL

9. Utilizando a fórmula de recorrência pela qual se define uma P.A. e admitindo dados o primeiro termo (a_1), a razão (r) e o índice (n) de um termo desejado, temos:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + r \\ a_3 &= a_2 + r \\ a_4 &= a_3 + r \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n &= a_{n-1} + r \end{aligned}$$

Somando essas $n - 1$ igualdades, temos:

$$\underbrace{a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n} = a_1 + \underbrace{a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1}} + (n - 1) \cdot r$$

cancelam-se

e, então, $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$, o que sugere o seguinte

10. Teorema

Na P.A. em que o primeiro termo é a_1 e a razão é r, o n-ézimo termo é

$$\boxed{a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r}$$

Demonstração pelo princípio da indução finita

I) Para $n = 1$, temos: $a_1 = a_1 + (1 - 1) \cdot r$ (sentença verdadeira)

II) Admitamos a validade da fórmula para $n = p$: $a_p = a_1 + (p - 1) \cdot r$ (hipótese de indução) e provemos que vale para $n = p + 1$:

$a_{p+1} = a_p + r = (a_1 + (p - 1) \cdot r) + r = a_1 + [(p + 1) - 1] \cdot r$

Então $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

EXERCÍCIOS

D.24 Calcular o 17º termo da P.A. cujo primeiro termo é 3 e cuja razão é 5.

Solução

Notando que $a_1 = 3$ e $r = 5$, apliquemos a fórmula do termo geral:

$a_{17} = a_1 + 16r = 3 + 16 \cdot 5 = 83$.

D.25 Obter o 12º, o 27º e o 100º termos da P.A. (2, 5, 8, 11, . . .).

D.26 Obter a razão da P.A. em que o primeiro termo é -8 e o vigésimo é 30.

Solução

$a_{20} = a_1 + 19r \Rightarrow 30 = -8 + 19r \Rightarrow r = 2.$

D.27 Obter a razão da P.A. em que $a_2 = 9$ e $a_{14} = 45$.

D.28 Obter o primeiro termo da P.A. de razão 4 cujo 23º termo é 86.

D.29 Qual é o termo igual a 60 na P.A. em que o 2º termo é 24 e a razão é 2?

D.30 Obter a P.A. em que $a_{10} = 7$ e $a_{12} = -8$.

Solução

Para escrever a P.A. é necessário determinar a_1 e r.

Temos:

$$\begin{cases} a_{10} = 7 \Rightarrow a_1 + 9r = 7 & (1) \\ a_{12} = -8 \Rightarrow a_1 + 11r = -8 & (2) \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima, temos:

$$(2) - (1) \quad \Rightarrow 2r = -15 \Longrightarrow r = -\frac{15}{2}$$

$$(1) \quad \Rightarrow a_1 + 9(-\frac{15}{2}) = 7 \Longrightarrow a_1 = \frac{149}{2}$$

e, portanto, a P.A. é $(\frac{149}{2}, \frac{134}{2}, \frac{119}{2}, \ldots)$.

D.31 Determinar a P.A. em que o 6º termo é 7 e o 10º é 15.

D.32 Qual é a P.A. em que o 1º termo é 20 e o 9º termo é 44?

D.33 Determinar a P.A. em que se verificam as relações:

$a_{12} + a_{21} = 302$ e $a_{23} + a_{46} = 446$.

D.34 Na P.A. em que $a_p = \alpha$ e $a_q = \beta$ com $p \neq q$, calcular o termo a_{p+q}.

D.35 (IME-1965) Determine a relação que deve existir entre os números **m, n, p e q**, para que se verifique a seguinte igualdade entre os termos da mesma progressão aritmética:

$a_m + a_n = a_p + a_q$.

D.36 Qual é o primeiro termo negativo da P.A. (60, 53, 46, . . .)?

Solução

Temos: $a_n < 0 \Rightarrow a_1 + (n-1)r < 0 \Rightarrow 60 + (n-1)(-7) < 0 \Rightarrow n - 1 > \frac{60}{7} \Rightarrow$

$\Rightarrow n > \frac{67}{7} \cong 9{,}5.$

Concluímos que $a_n < 0$ para $n = 10, 11, 12, \ldots$, portanto, o primeiro termo negativo da P.A. é a_{10}.

D.37 Provar que se $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ é P.A., com $n > 2$, então

$(a_2^2 - a_1^2, a_3^2 - a_2^2, a_4^2 - a_3^2, \ldots, a_n^2 - a_{n-1}^2)$ também é.

D.38 Provar que se uma P.A. apresenta $a_m = x$, $a_n = y$ e $a_p = z$, então verifica-se a relação: $(n-p) \cdot x + (p-m) \cdot y + (m-n) \cdot z = 0$.

D.39 Provar que os termos de uma P.A. qualquer onde 0 não participa verificam a relação:

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = \frac{n-1}{a_1 a_n}$$

V. INTERPOLAÇÃO ARITMÉTICA

Em toda seqüência finita $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n)$, os termos a_1 e a_n são chamados *extremos* e os demais são chamados *meios*. Assim, na P.A. (0, 3, 6, 9, 12, 15) os extremos são 0 e 15 enquanto os meios são 3, 6, 9 e 12.

Interpolar, inserir ou *intercalar* k meios aritméticos entre os números **a e b** significa obter uma P.A. de extremos $a_1 = a$ e $a_n = b$, com $n = k + 2$ termos. Para determinar os meios dessa P.A. é necessário calcular a razão, o que é feito assim:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r \Rightarrow b = a + (k+1) \cdot r \Rightarrow r = \frac{b-a}{k+1}.$$

Exemplo

Interpolar 5 meios aritméticos entre 1 e 2.

Vamos formar uma P.A. com 7 termos onde $a_1 = 1$ e $a_7 = 2$. Temos:

$$a_7 = a_1 + 6 \cdot r \Rightarrow r = \frac{a_7 - a_1}{6} = \frac{2-1}{6} = \frac{1}{6}$$

então a P.A. é $(1, \frac{7}{6}, \frac{8}{6}, \frac{9}{6}, \frac{10}{6}, \frac{11}{6}, 2)$.

EXERCÍCIOS

D.40 Intercalar 5 meios aritméticos entre −2 e 40.

Solução

Devemos obter a razão da P.A. com 7 termos (2 extremos e 5 meios) em que $a_1 = -2$ e $a_7 = 40$. Temos: $a_7 = a_1 + 6r \Rightarrow 40 = -2 + 6r \Rightarrow r = 7$

então a P.A. é $(-2, \underbrace{5, 12, 19, 26, 33}_{\text{meios}}, 40)$

D.41 Quantos meios aritméticos devem ser interpolados entre 12 e 34 para que a razão da interpolação seja $\frac{1}{2}$?

D.42 Inserir 12 meios aritméticos entre 100 e 200.

D.43 Quantos números inteiros e positivos, formados com 3 algarismos, são múltiplos de 13?

D.44 De 100 a 1000 quantos são os múltiplos de 2 ou 3?

D.45 Quantos números inteiros e positivos, formados de dois ou três algarismos, não são divisíveis por 7?

D.46 (ITA-66) Quantos números inteiros existem, de 1000 a 10000, não divisíveis nem por 5 e nem por 7?

D.47 (MAPOFEI-75) Inscrevendo-se nove meios aritméticos entre 15 e 45, qual é o sexto termo da P.A.?

VI. SOMA

Vamos deduzir uma fórmula para calcular a soma S_n dos n termos iniciais de uma P.A.

11. Teorema 1

A soma dos n primeiros números inteiros positivos é $\frac{n(n+1)}{2}$.

Demonstração por indução finita

I) Para n = 1, temos: $1 = \frac{1(1+1)}{2}$ (sentença verdadeira)

II) Admitamos a validade da fórmula para n = p:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + p = \frac{p(p+1)}{2}$$

e provemos para n = p + 1:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + p + (p+1) = \frac{p(p+1)}{2} + (p+1) =$$

$$= \frac{p(p+1) + 2(p+1)}{2} = \frac{(p+1)(p+2)}{2}.$$

Então $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Exemplo

A soma dos 50 termos iniciais da seqüência dos inteiros positivos é:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 50 = \frac{50(50+1)}{2} = 25 \times 51 = 1\,275.$$

Utilizando a fórmula do termo geral, podemos calcular a soma S_n dos *n* termos iniciais da P.A. $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$.

12. Teorema 2

Em toda P.A. tem-se: $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot r$

Demonstração

$$+\begin{cases} a_1 = a_1 \\ a_2 = a_1 + r \\ a_3 = a_1 + 2r \\ \vdots \\ a_n = a_1 + (n-1) \cdot r \end{cases}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \underbrace{(a_1 + a_1 + \ldots + a_1)}_{\text{n parcelas}} + (r + 2r + \ldots + (n-1)r) =$$

$$= na_1 + (1 + 2 + \ldots + (n-1)) \cdot r.$$

Pelo teorema 1: $1 + 2 + \ldots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2}$, então:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = na_1 + \frac{(n-1) \cdot n}{2} \cdot r$$

isto é:

$$\boxed{\mathbf{S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot r}}$$

13. Teorema 3

Em toda P.A. tem-se:

$$\boxed{\mathbf{S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}}}$$

Demonstração

$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot r = \frac{2na_1 + n(n-1)r}{2} = \frac{n[2a_1 + (n-1)r]}{2} =$$

$$= \frac{n[a_1 + a_1 + (n-1)r]}{2} = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

Exemplos

1º) A soma dos 15 termos iniciais da P.A. (-2, 1, 4, 7, ...) é:

$$S_{15} = 15(-2) + \frac{15 \cdot 14}{2} \cdot 3 = -30 + 315 = 285.$$

2º) A soma dos múltiplos inteiros de 2 desde 4 até 100 pode ser calculada notando-se que (4, 6, 8, ..., 100) é uma P.A. de 49 termos em que $a_1 = 4$ e $a_{49} = 100$:

$$S_{49} = \frac{49(4 + 100)}{2} = 49 \times 52 = 2\,548.$$

EXERCÍCIOS

D.48 Calcular a soma dos 25 termos iniciais da P.A. (1, 7, 13, ...).

Solução

Sendo $a_1 = 1$ e $r = 6$, temos:

$$a_{25} = a_1 + 24 \cdot r = 1 + 24 \times 6 = 145$$

$$S_{25} = \frac{25(a_1 + a_{25})}{2} = \frac{25(1 + 145)}{2} = 1\,825.$$

D.49 Obter a soma dos 200 primeiros termos da seqüência dos números ímpares positivos. Calcular também a soma dos **n** termos iniciais da mesma seqüência.

Solução

A seqüência (1, 3, 5, ...) é uma P.A. em que $a_1 = 1$ e $r = 2$, então:

$$a_{200} = a_1 + 199 \cdot r = 1 + 199 \times 2 = 399$$

$$S_{200} = \frac{200(a_1 + a_{200})}{2} = \frac{200(1 + 399)}{2} = 40\,000$$

$$a_n = a_1 + (n-1)r = 1 + (n-1) \cdot 2 = 2n - 1$$

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(1 + 2n - 1)}{2} = n^2.$$

D.50 Qual é a soma dos números inteiros de 1 a 350?

D.51 Qual é a soma dos 120 primeiros números pares positivos? E a soma dos n primeiros?

D.52 Obter a soma dos 12 primeiros termos da P.A. (6, 14, 22, ...).

D.53 Obter a soma dos **n** elementos iniciais da seqüência:
$\left(\frac{1-n}{n}, \frac{2-n}{n}, \frac{3-n}{n}, \ldots\right)$.

D.54 Determinar a P.A. em que o vigésimo termo é 2 e a soma dos 50 termos iniciais é 650.

Solução

Determinar uma P.A. é obter a_1 e r. Temos:

$$a_{20} = 2 \Rightarrow a_1 + 19r = 2 \quad (1)$$

$$S_{50} = 650 \Rightarrow \frac{50(2a_1 + 49r)}{2} = 650 \Rightarrow 2a_1 + 49r = 26 \quad (2)$$

Resolvendo o sistema (1) e (2) obtemos $a_1 = -36$ e $r = 2$, portanto, a P.A. procurada é (-36, -34, -32, ...).

D.55 Qual é o 23º elemento da P.A. de razão 3 em que a soma dos 30 termos iniciais é 255?

D.56 Quantos termos devem ser somados na P.A. $(-5, -1, 3, \dots)$ a partir do 1º termo, para que a soma seja 1 590?

D.57 Qual é o número mínimo de termos que se deve somar na P.A. $\left(13, \frac{45}{4}, \frac{19}{2}, \dots\right)$ a partir do 1º termo, para que a soma seja negativa?

D.58 (MAPOFEI-76) Ao se efetuar a soma de 50 parcelas em P.A., 202, 206, 210, . . . , por distração não foi somada a 35ª parcela. Qual foi a soma encontrada?

D.59 Determinar uma P.A. de 60 termos em que a soma dos 59 primeiros é 12 e a soma dos 59 últimos é 130.

D.60 Determinar uma P.A. em que a soma dos 10 termos iniciais é 130 e a soma dos 50 iniciais é 3 650.

D.61 Calcular o quociente entre a soma dos termos de índice ímpar e a soma dos termos de índice par da P.A. finita (4, 7, 10, . . . , 517).

D.62 Qual é a soma dos múltiplos positivos de 5 formados por 3 algarismos?

Solução

Os múltiplos positivos de 5 formados por 3 algarismos constituem a P.A. (100, 105, 110, . . . , 995), em que $a_1 = 100$, $r = 5$ e $a_n = 995$. O número de elementos dessa P.A. é n tal que:

$$a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow 995 = 100 + (n-1)5 \Rightarrow n = 180.$$

A soma dos termos da P.A. é:

$$S_{180} = \frac{180(a_1 + a_{180})}{2} = \frac{180(100 + 995)}{2} = 98\,550.$$

D.63 Qual é a soma dos múltiplos de 11 compreendidos entre 100 e 10 000?

D.64 (MAPOFEI-74) Qual é a soma dos múltiplos positivos de 7, com dois, três ou quatro algarismos?

D.65 Obter uma P.A. em que a soma dos n primeiros termos é $n^2 + 2n$ para todo n natural.

Solução

Como $S_n = n^2 + 2n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, temos:

$$S_1 = 1^2 + 2 \cdot 1 = 3 \Rightarrow a_1 = 3$$
$$S_2 = 2^2 + 2 \cdot 2 = 8 \Rightarrow a_1 + a_2 = 8 \Rightarrow a_2 = 5$$

e a P.A. é (3, 5, 7, 9, . . .).

D.66 (MAPOFEI-74) Calcular o 1º termo e a razão de uma P.A. cuja soma dos n primeiros termos é $n^2 + 4n$ para todo n natural.

D.67 (EESCUSP-66) Se numa P.A. a soma dos m primeiros termos é igual à soma dos n primeiros termos, $m \neq n$, mostre que a soma dos $m + n$ primeiros termos é igual a zero.

D.68 Demonstrar que em toda P.A. com número ímpar de termos, o termo médio é igual à diferença entre a soma dos termos de ordem ímpar e a soma dos termos de ordem par.

D.69 (FAUUSP-66) Quais as progressões aritméticas nas quais a soma de dois termos quaisquer faz parte da progressão?

D.70 (EE. LINS-67) Determinar uma progressão aritmética de razão 1, sabendo-se que o número de termos é divisível por 3, que a soma dos termos é 33 e que o termo de ordem $\frac{n}{3}$ é 4.

D.71 (FFCLUSP-65) A soma de quatro termos consecutivos de uma progressão aritmética é -6, o produto do primeiro deles pelo quarto é -54. Determinar esses termos.

D.72 (ITA-58) Provar que se uma P.A. é tal que a soma dos seus n primeiros termos é igual a $n + 1$ vezes a metade do enézimo termo então $r = a_1$.

CAPÍTULO III

PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

I. DEFINIÇÃO

14. Chama-se *progressão geométrica* (P.G.) uma seqüência dada pela seguinte fórmula de recorrência:

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_n = a_{n-1} \cdot q, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2 \end{cases}$$

onde *a* e *q* são números reais dados.

Assim, uma P.G. é uma seqüência em que cada termo, a partir do segundo, é o produto do anterior por uma constante *q* dada.

Eis alguns exemplos de progressões geométricas:

$f_1 = (1, 2, 4, 8, 16, \ldots)$ onde $a_1 = 1$ e $q = 2$

$f_2 = (-1, -2, -4, -8, -16, \ldots)$ onde $a_1 = -1$ e $q = 2$

$f_3 = (1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots)$ onde $a_1 = 1$ e $q = \frac{1}{3}$

$f_4 = (-54, -18, -6, -2, -\frac{2}{3}, \ldots)$ onde $a_1 = -54$ e $q = \frac{1}{3}$

$f_5 = (7, 7, 7, 7, 7, \ldots)$ onde $a_1 = 7$ e $q = 1$

$f_6 = (5, -5, 5, -5, 5, \ldots)$ onde $a_1 = 5$ e $q = -1$

$f_7 = (3, 0, 0, 0, 0, \ldots)$ onde $a_1 = 3$ e $q = 0$

II. CLASSIFICAÇÃO

As progressões geométricas podem ser classificadas em cinco categorias:

1ª *crescentes* são as P.G. em que cada termo é maior que o anterior. Notemos que isto pode ocorrer de duas maneiras:

a) P.G. com termos positivos

$$a_n > a_{n-1} \iff \frac{a_n}{a_{n-1}} > 1 \iff q > 1$$

b) P.G. com termos negativos

$$a_n > a_{n-1} \iff 0 < \frac{a_n}{a_{n-1}} < 1 \iff 0 < q < 1$$

Exemplos: f_1 e f_4

2ª) *constantes* são as P.G. em que cada termo é igual ao anterior. Observemos que isto ocorre em duas situações:

a) P.G. com termos todos nulos

$a_1 = 0$ e q qualquer

b) P.G. com termos iguais e não nulos

$$a_n = a_{n-1} \iff \frac{a_n}{a_{n-1}} = 1 \iff q = 1$$

Exemplo: f_5

3ª) *decrescentes* são as P.G. em que cada termo é menor que o anterior. Notemos que isto pode ocorrer de duas maneiras:

a) P.G. com termos positivos

$$a_n < a_{n-1} \iff 0 < \frac{a_n}{a_{n-1}} < 1 \iff 0 < q < 1$$

b) P.G. com termos negativos

$$a_n < a_{n-1} \iff \frac{a_n}{a_{n-1}} > 1 \iff q > 1$$

Exemplos: f_2 e f_3

4ª) *alternantes* são as P.G. em que cada termo tem sinal contrário ao do termo anterior. Isto ocorre quando $q < 0$.

Exemplo: f_6

5ª) *estacionárias* são as P.G. em que $a_1 \neq 0$ e $a_2 = a_3 = a_4 = \ldots = 0$. Isto ocorre quando $q = 0$.

Exemplo: f_7

III. NOTAÇÕES ESPECIAIS

Para a obtenção de uma P.G. com 3 ou 4 ou 5 termos é muito prática a notação seguinte:

1ª) para 3 termos: (x, xq, xq^2) ou $(\frac{x}{q}, x, xq)$

2ª) para 4 termos: (x, xq, xq^2, xq^3) ou $(\frac{x}{y^3}, \frac{x}{y}, xy, xy^3)$

3ª) para 5 termos: $(x, xq, xq^2, xq^3, xq^4)$ ou $(\frac{x}{q^2}, \frac{x}{q}, x, xq, xq^2)$

EXERCÍCIOS

D.73 Qual é o número que deve ser somado a 1, 9 e 15 para que se tenha, nessa ordem, três números em P.G.?

Solução

Para que $(x + 1, x + 9, x + 15)$ seja P.G., devemos ter

$\frac{x+9}{x+1} = \frac{x+15}{x+9}$ e, então:

$(x+9)^2 = (x+1)(x+15) \Longrightarrow \cancel{x^2} + 18x + 81 = \cancel{x^2} + 16x + 15 \Longrightarrow 2x = -66 \Longrightarrow$
$\Longrightarrow x = -33.$

D.74 (MAPOFEI-74) Qual é o número **x** que deve ser somado aos números $a - 2$, a e $a + 3$ para que $a - 2 + x$, $a + x$ e $a + 3 + x$ formem uma P.G.?

D.75 (FAM-65) Sabendo-se que x, $x + 9$ e $x + 45$ estão em P.G., determinar o valor de **x**.

D.76 A seqüência $(x + 1, x + 3, x + 4, \ldots)$ é uma P.G. . Calcular o seu quarto termo.

D.77 (EPUSP-59) Que tipo de progressão constitue a seqüência:
$\text{sen}\, x,\ \text{sen}(x + \pi),\ \text{sen}(x + 2\pi), \ldots, \text{sen}(x + n\pi)$ com $\text{sen}\, x \neq 0$?

D.78 Classifique as sentenças abaixo em verdadeira (V) ou falsa (F):

a) na P.G. em que $a_1 > 0$ e $q > 0$, todos os termos são positivos.
b) na P.G. em que $a_1 < 0$ e $q > 0$, todos os termos são negativos.
c) na P.G. em que $a_1 > 0$ e $q < 0$, todos os termos são negativos.
d) na P.G. em que $a_1 < 0$ e $q < 0$, todos os termos são negativos.
e) na P.G. de números reais em que $q < 0$ e $a_1 \neq 0$, os sinais dos termos são alternados, isto é, a P.G. é alternante.
f) na P.G. alternante, todos os termos de índice ímpar têm o sinal de a_1 e os de índice par têm sinal contrário ao de a_1.
g) se uma P.G. formada com números reais apresenta dois termos com sinais contrários, então a P.G. é alternante.
h) existe uma P.G. de números reais em que $a_3 > 0$ e $a_{21} < 0$.
i) existe uma P.G. de números reais em que $a_1 > 0$ e $a_{20} < 0$.
j) se $q > 0$, a P.G. é crescente.
k) se $a_1 > 0$ e $q > 0$, a P.G. é crescente.
l) se $q > 1$, a P.G. é crescente

D.79 Determinar três números reais em P.G. de modo que sua soma seja $\frac{21}{8}$ e a soma de seus quadrados seja $\frac{189}{64}$.

D.80 Obter a P.G. de quatro elementos em que a soma dos dois primeiros é 12 e a soma dos dois últimos é 300.

D.81 Determinar cinco números inteiros em P.G. sabendo que sua soma é $\frac{121}{3}$ e seu produto é 243.

D.82 (FAUUSP-66) Numa progressão geométrica de seis termos a soma dos termos de ordem ímpar é 182 e a dos de ordem par é 546. Determinar a progressão.

D.83 Obter quatro números **a, b, c, d** sabendo que:

I) $a + d = 32$ III) (a, b, c) é P.G.
II) $b + c = 24$ IV) (b, c, d) é P.A.

D.84 (IME-66) A soma de três números que formam uma P.A. crescente é 36. Determine esses números, sabendo que se somarmos 6 unidades ao último, eles passam a constituir uma P.G.

D.85 Provar que se x, y, z estão em P.G. nesta ordem, vale a relação:
$(x + y + z)(x - y + z) = x^2 + y^2 + z^2$.

D.86 Se a, b, c, d estão em P.G. nesta ordem, então $(b - c)^2 = ac + bd - 2ad$.

D.87 Provar que se a, b, c formam nesta ordem uma P.A. e uma P.G., então $a = b = c$.

D.88 Provar que se os números a, b, c, d formam nesta ordem uma P.G. então vale a relação $(b - c)^2 + (c - a)^2 + (d - b)^2 = (a - d)^2$.

D.89 Os lados de um retângulo apresentam medidas em P.G. . Calcular a razão da P.G. .

D.90 Os lados de um triângulo formam uma P.G. crescente. Determinar a razão da P.G. .

D.91 As medidas dos lados de um triângulo são expressas por números inteiros em P.G. e seu produto é 1 728. Calcular as medidas dos lados.

D.92 (MAPOFEI-76) Calcular todos os ângulos x, em radianos, de modo que os números $\frac{\text{sen}\, x}{2}$, sen x, tg x formem uma progressão geométrica.

IV. FÓRMULA DO TERMO GERAL

15. Utilizando a fórmula de recorrência pela qual se define uma P.G. e admitindo dados o primeiro termo ($a_1 \neq 0$), a razão ($q \neq 0$) e o índice (n) de um termo desejado, temos:

$$a_2 = a_1 \cdot q$$
$$a_3 = a_2 \cdot q$$
$$a_4 = a_3 \cdot q$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$a_n = a_{n-1} \cdot q$$

Multiplicando essas n − 1 igualdades, temos:

$$\underbrace{a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \ldots}_{\text{cancelam-se}} \cdot a_n = a_1 \cdot \underbrace{a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}}_{\text{cancelam-se}} \cdot q^{n-1}$$

e, então, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, o que sugere o seguinte

16. Teorema

Na P.G. em que o primeiro termo é a_1 e a razão é q, o n-ézimo termo é

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}.$$

Demonstração

Demonstra-se pelo princípio da indução finita.

EXERCÍCIOS

D.93 Obter o 10º e o 15º termos da P.G. (1, 2, 4, 8, . . .).

Solução

$a_{10} = a_1 \cdot q^9 = 1 \cdot 2^9 = 512$

$a_{15} = a_1 \cdot q^{14} = 1 \cdot 2^{14} = 4\,096$

D.94 Obter o 100º termo da P.G. (2, 6, 18, . . .).

D.95 Calcular o 21º termo da seqüência (1, 0, 3, 0, 9, 0, . . .).

D.96 (ITA-59) Dada uma P.G. finita ($a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{10}$) de modo que $a_1 = 2$ e $a_2 = 6$, pergunta-se se é correta a igualdade

$$(a_{10})^{\frac{1}{8}} = 3 \cdot (2)^{\frac{1}{8}}$$

D.97 (MAPOFEI-76) Uma empresa produziu, no ano de 1975, 100 000 unidades de um produto.
Quantas unidades produzirá no ano de 1980, se o aumento anual de produção é de 20%?

D.98 Obter a P.G. cujos elementos verificam as relações:

$$a_2 + a_4 + a_6 = 10$$
$$a_3 + a_5 + a_7 = 30$$

D.99 Calcular o número de termos da P.G. que tem razão $\frac{1}{2}$, 1º termo 6 144 e último termo 3.

D.100 Provar que se a, b, c são os elementos de ordem p, q, r, respectivamente, da mesma P.G., então:

$$a^{q-r} \cdot b^{r-p} \cdot c^{p-q} = 1$$

D.101 Provar que se ($a_1, a_2, a_3, \ldots$) é uma P.G., com termos todos diferentes de zero, então $\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \ldots\right)$ também é P.G.

D.102 Provar que se ($a_1, a_2, a_3, \ldots$) é uma P.G., então ($a_1, a_3, a_5, \ldots$) e (a_2, a_4, a_6) também são P.G.

V. INTERPOLAÇÃO GEOMÉTRICA

Interpolar k meios geométricos entre os números **a** e **b** significa obter uma P.G. de extremos $a_1 = a$ e $a_n = b$, com $n = k + 2$ termos. Para determinar os meios dessa P.G. é necessário calcular a razão. Assim, temos:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow b = a \cdot q^{k+1} \Rightarrow q = \sqrt[k+1]{\frac{b}{a}}.$$

Exemplo

Interpolar 8 meios geométricos (reais) entre 5 e 2 560.

Formemos uma P.G. com 10 termos onde $a_1 = 5$ e $a_{10} = 2\,560$. Temos:

$$a_{10} = a_1 \cdot q^9 \Rightarrow q = \sqrt[9]{\frac{a_{10}}{a_1}} = \sqrt[9]{\frac{2\,560}{5}} = \sqrt[9]{512} = 2$$

então a P.G. é (5, 10, 20, 40, 80, 160, 320, 640, 1 280, 2 560).

EXERCÍCIOS

D.103 Inserir 6 meios geométricos reais entre 640 e 5.

D.104 Quantos meios se deve intercalar entre 78 125 e 128 para obter uma P.G. de razão $\frac{2}{5}$?

D.105 Qual é o número mínimo de meios geométricos que se deve interpolar entre 1 458 e 2 para a razão de interpolação ficar menor que $\frac{1}{3}$?

D.106 (EESCUSP-58) Sendo **a** e **b** números dados, achar outros dois **x** e **y** tais que a, x, y, b formem uma P.G.

VI. PRODUTO

Vamos deduzir uma fórmula para calcular o produto P_n dos n termos iniciais de uma P.G.

17. Teorema

Em toda P.G. tem-se: $P_n = a_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}$

Demonstração

$$\times\begin{cases} a_1 = a_1 \\ a_2 = a_1 \cdot q \\ a_3 = a_1 \cdot q^2 \\ \vdots \\ a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \end{cases}$$

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n = \underbrace{(a_1 \cdot a_1 \cdot a_1 \cdot \ldots \cdot a_1)}_{\text{n fatores}} (q \cdot q^2 \cdot \ldots \cdot q^{n-1}) =$$

$$= a_1^n \cdot q^{1+2+\ldots+n-1} = a_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

isto é:

$$\boxed{P_n = a_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}}$$

EXERCÍCIOS

D.107 Em cada uma das P.G. abaixo calcule o produto dos **n** termos iniciais:

a) $(1, 2, 4, 8, \ldots)$ e $n = 10$
b) $(-2, -6, -18, -54, \ldots)$ e $n = 20$
c) $(3, -6, 12, -24, \ldots)$ e $n = 25$
d) $((-2)^0, (-2)^1, (-2)^2, (-2)^3, \ldots)$ e $n = 66$
e) $((-3)^{25}, (-3)^{24}, (-3)^{23}, \ldots)$ e $n = 51$
f) $(a^1, -a^2, a^3, -a^4, \ldots)$ e $n = 100$

D.108 (MAPOFEI-71)

a) Calcular a soma $S = \log_2 a + \log_2 2a + \log_2 4a + \ldots + \log_2 2^r a$
b) Qual o valor de a se $S = n + 1$?

D.109 Calcular o produto dos 101 termos iniciais da P.G. alternante em que $a_{51} = -1$.

D.110 Uma seqüência é tal que:

I) os termos de ordem par são ordenadamente as potências de 2 cujo expoente é igual ao índice do termo, isto é, $a_{2n} = 2^{2n}$ para todo $n \geqslant 1$.
II) os termos de ordem ímpar são ordenadamente as potências de -3 cujo expoente é igual ao índice do termo, isto é, $a_{2n-1} = (-3)^{2n-1}$ para todo $n \geqslant 1$.
Calcular o produto dos 55 termos iniciais dessa seqüência.

VII. SOMA DOS TERMOS DE P.G. FINITA

18. Sendo dada uma P.G., isto é, conhecendo-se os valores de a_1 e q, procuremos uma fórmula para calcular a soma S_n dos n termos iniciais da seqüência.

Temos: $S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1}$ (1)

Multiplicando ambos os membros por q, obtemos:

$qS_n = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \ldots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n$ (2)

Comparando os segundos membros de (1) e (2), podemos observar que a parcela a_1 só aparece em (1), a parcela $a_1 q^n$ só aparece em (2) e todas as outras parcelas são comuns às duas igualdades, então, subtraindo, temos:

(2) - (1) $\Rightarrow qS_n - S_n = a_1 q^n - a_1 \Rightarrow S_n \cdot (q - 1) = a_1 q^n - a_1$

Supondo $q \neq 1$, resulta:

$$S_n = \frac{a_1 q^n - a_1}{q - 1}$$

Este resultado sugere o seguinte teorema:

19. Teorema

A soma dos n termos iniciais de uma P.G. é

$$\boxed{S_n = \frac{a_1q^n - a_1}{q - 1}} \quad (q \neq 1)$$

Demonstração

Demonstra-se aplicando o princípio da indução finita:

20. Corolário

A soma dos n primeiros termos de uma P.G. é

$$\boxed{S_n = \frac{a_nq - a_1}{q - 1}} \quad (q \neq 1)$$

Demonstração

$$S_n = \frac{a_1q^n - a_1}{q - 1} = \frac{(a_1q^{n-1})q - a_1}{q - 1} = \frac{a_nq - a_1}{q - 1}$$

21. Exemplos

1º) Calcular a soma dos 10 termos iniciais da P.G. (1, 3, 9, 27, ...)

$$S_{10} = \frac{a_1q^{10} - a_1}{q - 1} = \frac{1 \cdot 3^{10} - 1}{3 - 1} = \frac{59\,049 - 1}{2} = 29\,524$$

2º) Calcular a soma das potências de 5 com expoentes inteiros consecutivos, desde 5^2 até 5^{26}.

Trata-se da P.G. $(5^2, 5^3, 5^4, ..., 5^{26})$.

Temos:

$$S = \frac{a_nq - a_1}{q - 1} = \frac{5^{26} \cdot 5 - 5^2}{5 - 1} = \frac{5^{27} - 5^2}{4}.$$

EXERCÍCIOS

D.111 Calcular a soma das 10 parcelas iniciais da série $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ...$

D.112 Calcular a soma dos 20 termos iniciais da série $1 + 3 + 9 + 27 + ...$

D.113 (MAPOFEI-76) Se **a** e **q** são números reais não nulos, calcular a soma dos **n** primeiros termos da P.G.: $a, aq^2, aq^4, aq^6, ...$

D.114 (ITA-53) Partindo de um quadrado Q_1, cujo lado mede **a** metros, consideremos os quadrados $Q_2, Q_3, Q_4, ..., Q_n$ tais que os vértices de cada quadrado sejam os pontos médios dos lados do quadrado anterior. Calcular, então, a soma das áreas dos quadrados $Q_1, Q_2, Q_3, ..., Q_n$.

D.115 Quantos termos da P.G. (1, 3, 9, 27, ...) devem ser somados para que a soma dê 3 280.

D.116 Determinar n tal que $\sum_{i=3}^{n} 2^i = 4\,088$.

D.117 A soma de seis elementos em P.G. de razão 2 é 1 197. Qual é o 1º termo da P.G.?

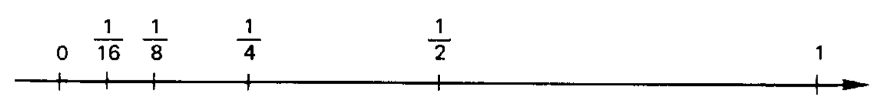
D.118 Provar que em toda P.G. $S_n^2 + S_{2n}^2 = S_n \cdot (S_{2n} + S_{3n})$.

D.119 Determinar onze números em P.G. sabendo que a soma dos dez primeiros é 3 069 e a soma dos dez últimos é 6 138.

D.120 Uma P.G. finita tem **n** termos. Sendo **S** a soma dos termos, **S'** a soma de seus inversos e **P** o produto dos elementos, provar que $P^2 = \frac{S}{S'}$.

VIII. LIMITE DE UMA SEQÜÊNCIA

22. Consideremos a seqüência $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, ..., \frac{1}{2^n}, ...\right)$ e representemos seus 4 termos iniciais sobre a reta real



Notemos que os termos da seqüência vão se aproximando de zero, isto é, para n bastante "grande" o enézimo termo da seqüência $\frac{1}{2^n}$ estará tão próximo de zero quanto quizermos. Assim, desejando que a distância entre $\frac{1}{2^n}$ e 0 seja menor que $\frac{1}{1000}$, impomos:

$$\left|\frac{1}{2^n} - 0\right| < \frac{1}{1000}$$

então: $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{1000} \implies 2^n > 1000 \implies n > 9$ (pois $2^9 = 512 < 1000$).

Quer dizer que a partir do 10º termo, os termos da seqüência estarão próximos de 0, com aproximação menor que $\frac{1}{1000}$.

Em geral, sendo dada uma aproximação $\epsilon > 0$, é possível encontrar um número natural n_0 tal que

$$\left| \frac{1}{2^n} - 0 \right| < \epsilon \text{ quando } n > n_0$$

Dizemos, então, que o limite de $\frac{1}{2^n}$, quando n tende a infinito, é zero e anotamos:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

23. Definição

Uma seqüência $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ tem um limite ℓ se, dado $\epsilon > 0$, é possível obter um número natural n_0 tal que $|a_n - \ell| < \epsilon$ quando $n > n_0$. Neste caso, indica-se $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \ell$ e diz-se que a seqüência *converge para* ℓ.

24. Exemplo Importante

Para nosso próximo assunto é importante saber que toda seqüência da forma $(1, q, q^2, q^3, \ldots, q^n, \ldots)$, com $-1 < q < 1$, converge para zero.

$$\boxed{\textbf{Se } -1 < q < 1 \textbf{ então } \lim_{n \to +\infty} q^n = 0}$$

Assim, têm limite nulo as seqüências:

$(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots, (\frac{1}{3})^n, \ldots)$

$(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots, (-\frac{1}{2})^n, \ldots)$

$(1; 0{,}7; 0{,}49; 0{,}343; \ldots; (0{,}7)^n, \ldots)$

IX. SOMA DOS TERMOS DE P.G. INFINITA

25. Exemplo Preliminar

Consideremos a P.G. infinita $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots)$.

Formemos a seqüência $(S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots)$ onde:

$S_1 = \frac{1}{2}$

$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

. . . .

$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$

. . . .

Esta última seqüência converge para 1 pois:

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} (1 - \frac{1}{2^n}) = 1 - \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} = 1 - 0 = 1$$

Quer dizer, que, quanto maior o número de termos somados na P.G. $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots)$, mais nos aproximamos de 1. Dizemos, então, que a soma dos infinitos termos dessa P.G. é 1.

26. Definição

Dada uma P.G. infinita $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$, dizemos que $a_1 + a_2 + \ldots = S$ se, formada a seqüência $(S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots)$ onde:

$S_1 = a_1$
$S_2 = a_1 + a_2$
$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

. . . .

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$

. . . .

esta seqüência converge para S, isto é, $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = S$.

27. TEOREMA

Se $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ é uma P.G. com razão q tal que $-1 < q < 1$, então

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... = \frac{a_1}{1-q}.$$

Demonstração

Vamos provar que o limite da seqüência $(S_1, S_2, S_3, ..., S_n, ...)$ das somas parciais dos termos da P.G. é $\frac{a_1}{1-q}$.

Temos: $S_n - \frac{a_1}{1-q} = \frac{a_1 - a_1q^n}{1-q} - \frac{a_1}{1-q} = -\frac{a_1}{1-q} \cdot q^n$

Lembrando que a_1 e q são constantes, notamos que $-\frac{a_1}{1-q}$ é constante; lembrando que, para $-1 < q < 1$, temos $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$. Resulta, portanto, o seguinte:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(S_n - \frac{a_1}{1-q}\right) = \lim_{n\to+\infty} -\frac{a_1}{1-q} \cdot q^n = -\frac{a_1}{1-q} \cdot \lim_{n\to+\infty} q^n = -\frac{a_1}{1-q} \cdot 0 = 0$$

isto é:

$$\boxed{S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}}$$

28. Observações

1ª) Se $a_1 = 0$, a condição $-1 < q < 1$ é desnecessária para a convergência da seqüência $(S_1, S_2, S_3, ...)$. Neste caso, é óbvio que a P.G. é (0, 0, 0, ...) e sua soma é zero, qualquer que seja q.

2ª) Se $a_1 \neq 0$ e $q < -1$ ou $q > 1$, a seqüência $(S_1, S_2, S_3, ...)$ não converge. Neste caso, é impossível calcular a soma dos termos da P.G.

29. Exemplos

1º) Calcular a soma dos termos da P.G. $(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, ...)$.

Como $q = \frac{1}{3}$ e $-1 < \frac{1}{3} < 1$, decorre $S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$.

2º) Calcular a soma dos termos da P.G. $(2, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, ...)$.

Como $q = -\frac{1}{2}$ e $-1 < -\frac{1}{2} < 1$, decorre: $S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{2}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}$.

3º) Calcular $S = 3 + \frac{6}{5} + \frac{12}{25} + \frac{24}{125} + ...$

Como as parcelas formam uma P.G. infinita com razão $q = \frac{2}{5}$ e $-1 < \frac{2}{5} < 1$, vem: $S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{3}{1-\frac{2}{5}} = \frac{3}{\frac{3}{5}} = 5$.

EXERCÍCIOS

D.121 Calcular a soma dos termos das seguintes seqüências:

a) $(2, \frac{2}{5}, \frac{2}{25}, \frac{2}{125}, ...)$;
b) $(-3, -1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{9}, ...)$;
c) $(5, -1, \frac{1}{5}, -\frac{1}{25}, ...)$;
d) $(-\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, ...)$

D.122 Calcular a soma da série infinita:

$$1 + 2 + \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{1}{9} + \frac{2}{25} + ... + \left(\frac{1}{3}\right)^n + 2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n + ...$$

D.123 Qual é o número para o qual converge a série

$$\frac{2a}{3} + \frac{a}{9} + \frac{a}{54} + \frac{a}{324} + ...?$$

D.124 Calcular $S = \frac{3}{5} + \frac{6}{35} + \frac{12}{245} + ...$

D.125 Qual é a geratriz das dízimas periódicas abaixo?

a) 0,417417417...;
b) 5,12121212...;
c) 0,17090909...;
d) 9,3858585....

D.126 (MAPOFEI-75) Determinar a fração geratriz do número decimal periódico N = = 121,434343... .

D.127 Qual o erro cometido quando, em vez de somar os 1000 elementos iniciais, calcula-se a soma dos infinitos elementos da P.G. abaixo?

$(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, ...)$

D.128 (FEI-1967) Mostre que existe a P.G. cujos três primeiros termos são $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{2}$ e $\frac{\sqrt{2}}{4}$ e determine o limite da soma dos **n** primeiros termos, quando $n \to \infty$.

D.129 (FAUSP-67) A soma dos termos de ordem ímpar de uma P.G. infinita é 20 e a soma dos termos de ordem par é 10. Obter o primeiro termo.

D.130 A soma dos termos de ordem ímpar de uma P.G. infinita é 17 e a soma dos termos de ordem par é $\frac{17}{3}$. Calcular o primeiro termo da progressão.

D.131 (ENE-59) Numa P.G. $a_1 = \frac{25a^2}{4(a^2+1)}$ e $a_4 = \frac{2(a^2+1)^2}{5a}$ com $a > 0$. Pede-se:

a) estabelecer o conjunto de valores de **a** para os quais a P.G. é decrescente.
b) calcular o limite da soma dos termos para $q = a - \frac{1}{5}$.

D.132 (EPUSP-67) Divide-se um segmento de comprimento **m** em três partes iguais e retira-se a parte central; para cada um dos segmentos repete-se o processo, retirando-se suas partes centrais e assim sucessivamente. Calcular a soma dos comprimentos retirados.

D.133 (EPUSP-65) É dado um triângulo de perímetro **p**. Com vértices nos pontos médios dos seus lados, constrói-se um 2º triângulo. Com vértices nos pontos médios dos lados do 2º constrói-se um 3º triângulo e assim por diante. Qual é o limite da soma dos perímetros dos triângulos construídos?

D.134 (FAUUSP-67) É dada uma seqüência infinita de quadriláteros, cada um, a partir do segundo, tendo por vértices os pontos médios dos lados do anterior. Obter a soma das áreas dos quadriláteros em função da área **A** do primeiro.

D.135 Num triângulo eqüilátero de lado **a** se inscreve uma circunferência de raio **r**. Nesta circunferência, se inscreve um triângulo eqüilátero de lado **a'** e neste inscreve-se uma circunferência de raio **r'**. Repete-se indefinidamente a operação de inscrição

$\Delta \to \bigcirc \to \Delta$

Pede-se calcular:

a) o limite da soma dos lados dos triângulos;
b) o limite da soma dos raios das circunferências;
c) o limite da soma das áreas dos triângulos;
d) o limite da soma das áreas dos círculos.

D.136 Num quadrado de lado **a** inscreve-se um círculo; neste círculo se inscreve um novo quadrado e neste um novo círculo. Repetindo-se a operação indefinidamente, pede-se:

a) a soma dos perímetros de todos os quadrados;
b) a soma dos perímetros de todos os círculos;
c) a soma das áreas de todos os quadrados;
d) a soma das áreas de todos os círculos.

OS MAIORAIS EM ÁLGEBRA

Solicitado a relacionar os vinte maiores algebristas de todos os tempos, o grande matemático francês André Veil, um dos componentes do grupo Bourbaki, alinhou os seguintes nomes:

Fermat	(1601 – 1665)
Euler	(1707 – 1783)
Lagrange	(1736 – 1813)
Legendre	(1752 – 1833)
Gauss	(1777 – 1855)
Dirichlet	(1805 – 1859)
Kummer	(1810 – 1893)
Hermite	(1822 – 1901)
Eisenstein	(1823 – 1852)
Kronecker	(1823 – 1891)
Riemann	(1823 – 1891)
Dedekind	(1831 – 1921)
H. Weber	(1842 – 1913)
Hensel	(1861 – 1941)
Hilbert	(1862 – 1943)
Takagi	(1875 – 1960)
Hecke	(1887 – 1947)
Artin	(1898 – 1962)
Hasse	(1898 –)
Chevalley	(1909 –)

Esta lista é, no entanto, considerada incompleta uma vez que, por uma questão de elegância, Veil não se incluiu na relação, faltando com a verdade.

CAPÍTULO IV

MATRIZES

I. NOÇÃO DE MATRIZ

Dados dois números **m** e **n** naturais e não nulos, chama-se *matriz m por n* (indica-se m × n) toda tabela M formada por números reais distribuídos em m linhas e n colunas.

30. Exemplos

1) $\begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 0 & \frac{4}{5} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ é matriz 2 × 3

2) $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ \frac{3}{7} & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ é matriz 3 × 2

3) $\begin{bmatrix} 0 & 9 & -1 & 7 \end{bmatrix}$ é matriz 1 × 4

4) $\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ é matriz 3 × 1

5) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ é matriz 2 × 2

31. Em uma matriz qualquer M, cada elemento é indicado por a_{ij}. O índice i indica a linha e o índice j a coluna às quais o elemento pertence. Com a convenção de que as linhas sejam numeradas de cima para baixo (de 1 até m) e as colunas, da esquerda para a direita (de 1 até n), uma matriz m × n é representada por:

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ ou } M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ ou}$$

$$M = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{matrix} \right\|$$

Uma matriz M do tipo m X n também pode ser indicada por: $M = (a_{ij})$; $i \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$ e $j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ou simplesmente $M = (a_{ij})_{m \times n}$

II. MATRIZES ESPECIAIS

Há matrizes que, por apresentarem uma utilidade maior nesta teoria, recebem um nome especial:

32. a) *matriz – linha* é toda matriz do tipo 1 × n, isto é, é uma matriz que tem uma única linha (exemplo 3 da página 35).

b) *matriz – coluna* é toda matriz do tipo m × 1, isto é, é uma matriz que tem uma única coluna (exemplo 4 da página 35).

c) *matriz – nula* é toda matriz que tem todos os elementos iguais a zero.

Exemplos

1º) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ é a matriz nula do tipo 2 X 3

2º) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ é a matriz-nula do tipo 2 X 2.

33. d) *matriz-quadrada de ordem n* é toda matriz do tipo n × n, isto é, é uma matriz que tem igual número de linhas e colunas:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Chama-se *diagonal principal* de uma matriz quadrada de ordem n o conjunto dos elementos que têm os dois índices iguais, isto é:

$$\{a_{ij} \mid i = j\} = \{a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}\}$$

Chama-se *diagonal secundária* de uma matriz quadrada de ordem n o conjunto dos elementos que têm soma dos índices igual a n + 1, isto é:

$$\{a_{ij} \mid i + j = n + 1\} = \{a_{1n}, a_{2,n-1}, a_{3,n-2}, \dots, a_{n1}\}$$

Exemplos

1º) A matriz $M = \begin{bmatrix} 8 & 9 & -7 \\ 6 & 4 & -5 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ é quadrada de ordem 3. Sua diagonal principal é {8, 4, 3} e sua diagonal secundária é {-7, 4, -1}

2º) A matriz $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & -1 & -2 \\ -3 & -4 & -5 & -6 \end{bmatrix}$ é quadrada de ordem 4. Sua diagonal principal é {0, 5, -1, -6} e sua diagonal secundária é {3, 6, 9, -3}.

34. e) *matriz-diagonal* é toda matriz quadrada em que os elementos que não pertencem à diagonal principal são iguais a zero.

Exemplos

1) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ 2) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ 3) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 5) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

35. f) *matriz-unidade de ordem n* (indica-se I_n) é toda matriz-diagonal em que os elementos da diagonal principal são iguais a 1.

Exemplos

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

III. IGUALDADE

36. Definição

Duas matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$ são iguais quando $a_{ij} = b_{ij}$ para todo i ($i \in \{1, 2, 3, \ldots, m\}$) e todo j ($j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$). Isto significa que para serem iguais duas matrizes devem ser do mesmo tipo e apresentar todos os elementos correspondentes (elementos com índices iguais) iguais.

Exemplos

1) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 7 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}$ pois $a_{11} = b_{11}$, $a_{12} = b_{12}$, $a_{21} = b_{21}$ e $a_{22} = b_{22}$

2) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 7 & -4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$ pois $a_{12} \neq b_{12}$ e $a_{21} \neq b_{21}$

EXERCÍCIOS

D.137 Indicar explicitamente os elementos da matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ tal que $a_{ij} = i - j$.

Solução

Temos por definição:

$a_{11} = 1 - 1 = 0$, $a_{12} = 1 - 2 = -1$, $a_{13} = 1 - 3 = -2$
$a_{21} = 2 - 1 = 1$, $a_{22} = 2 - 2 = 0$, $a_{23} = 2 - 3 = -1$
$a_{31} = 3 - 1 = 2$, $a_{32} = 3 - 2 = 1$, $a_{33} = 3 - 3 = 0$

Assim, a matriz é $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

D.138 Construir as seguintes matrizes:

$A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ tal que $a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } i = j \\ 0, \text{ se } i \neq j \end{cases}$

$B = (b_{ij})_{3 \times 3}$ tal que $b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } i + j = 4 \\ 0, \text{ se } i + j \neq 4 \end{cases}$

D.139 Determinar **x** e **y** de modo que se tenha $\begin{bmatrix} 2x & 3y \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 1 & 2y \\ 3 & y + 4 \end{bmatrix}$

Solução

Temos, por definição, que satisfazer o sistema:

$\begin{cases} 2x = x + 1 \\ 3y = 2y \\ 4 = y + 4 \end{cases}$ e, então, $x = 1$ e $y = 0$

D.140 Determinar **x**, **y**, **z** e **t** de modo que se tenha

$$\begin{bmatrix} x^2 & 2x & y \\ 4 & 5 & t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & x & 3 \\ z & 5t & t \end{bmatrix}$$

IV. ADIÇÃO

37. Definição

Dadas duas matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, chama-se *soma* $A + B$ a matriz $C = (c_{ij})_{m \times n}$ tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para todo i e todo j. Isto significa que a soma de duas matrizes A e B do tipo m × n é uma matriz C do mesmo tipo em que cada elemento é a soma dos elementos correspondentes em A e B.

38. Exemplos

1º) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+4 & 2-1 & 3+1 \\ 4-4 & 5+0 & 6-6 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

2º) $\begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7+0 & 8+1 \\ 9+2 & 9+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 11 & 12 \end{bmatrix}$

3º) $\begin{bmatrix} 5 \\ 11 \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+1 \\ 11-2 \\ \frac{3}{4}+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ \frac{15}{4} \end{bmatrix}$

39. Teorema

A adição de matrizes do tipo $m \times n$ goza das seguintes propriedades:

(1) é associativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$ quaisquer que sejam A, B e C do tipo $m \times n$.
(2) é comutativa: $A + B = B + A$ quaisquer que sejam A e B, do tipo $m \times n$.
(3) tem elemento neutro: $\exists\ M \mid A + M = A$ qualquer que seja A do tipo $m \times n$.
(4) todo elemento tem simétrico: para todo A do tipo $m \times n$: $\exists\ A' \mid A + A' = M$.

Demonstração

(1) Fazendo $(A + B) + C = X$ e $A + (B + C) = Y$, temos:

$x_{ij} = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) = y_{ij}$

para todo i e todo j.

(2) Fazendo $A + B = X$ e $B + A = Y$, temos:

$x_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij} = y_{ij}$

(3) Impondo $A + M = A$, resulta:

$a_{ij} + m_{ij} = a_{ij} \Longrightarrow m_{ij} = 0 \Longrightarrow M = 0$

isto é, o elemento neutro é a matriz nula do tipo $m \times n$.

(4) Impondo $A + A' = M = 0$, resulta:

$a_{ij} + a'_{ij} = 0 \Longrightarrow a'_{ij} = -a_{ij} \quad \forall\, i, \forall\, j$

isto é, a simétrica da matriz A para a adição é a matriz A' de mesmo tipo que A, na qual cada elemento é simétrico do correspondente em A.

40. Definição

Dada a matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$, chama-se *oposta de A* (indica-se $-A$) a matriz A' tal que $A + A' = 0$.

Exemplos

1º) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \Longrightarrow -A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}$

2º) $A = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ -\sqrt{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow -A = \begin{bmatrix} -9 & -8 & -7 \\ \sqrt{2} & 0 & -1 \end{bmatrix}$

41. Definição

Dadas duas matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, chama-se *diferença A – B* a matriz soma de A com a oposta de B.

Exemplo

$\begin{bmatrix} 11 & 9 & 8 & 1 \\ -1 & 4 & 7 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & 8 & -1 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 11 & 9 & 8 & 1 \\ -1 & 4 & 7 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ -4 & -7 & -8 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 9 & 7 & 0 \\ -5 & -3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

EXERCÍCIOS

D.141 Dadas $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$, calcular $A + B$ e $A - B$

D.142 Dadas $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 3 & 9 & 11 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$,

calcular $A + B + C$, $A - B + C$, $A - B - C$ e $-A + B - C$.

D.143 Calcular a soma $C = (c_{ij})_{3 \times 3}$ das matrizes $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ e $B = (b_{ij})_{3 \times 3}$ tais que $a_{ij} = i^2 + j^2$ e $b_{ij} = 2ij$.

D.144 Seja $C = (c_{ij})_{2 \times 3}$ a soma das matrizes $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 \end{bmatrix}$.

Calcular a soma $c_{21} + c_{22} + c_{23}$.

D.145 Determinar, α, β, γ e δ de modo que se tenha:

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & \beta \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

D.146 Determinar x e y de modo que se tenha:

$$\begin{bmatrix} y^3 & 3x \\ y^2 & 4x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -y & x^2 \\ 2y & x^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 10 & -1 \end{bmatrix}$$

D.147 Dadas as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

determinar a matriz X tal que $X + A = B - C$

Solução 1

Fazendo $X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$, temos: $\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} x+1 & y+2 \\ z+2 & t+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (x + 1 = 1,\ y + 2 = -2,\ z + 2 = 2 \text{ e } t + 3 = 8) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (x = 0,\ y = -4,\ z = 0 \text{ e } t = 5), \text{ então } X = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Solução 2

Utilizando as propriedades da adição, temos:

$$X + A = B - C \Longrightarrow X + A - A = B - C - A \Longrightarrow X = B - C - A$$

então: $X = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

D.148 Resolver a equação matricial $X - A - B = C$, sendo dadas:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

D.149 Obter X tal que

$$X + \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

V. PRODUTO DE NÚMERO POR MATRIZ

42. Definição

Dado um número k e uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ chama-se *produto kA* a matriz $B = (b_{ij})_{m \times n}$ tal que $b_{ij} = k\, a_{ij}$ para todo i e todo j. Isto significa que multiplicar uma matriz A por um número k é construir uma matriz B formada pelos elementos de A todos multiplicados por k.

43. Exemplos

1º) $3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 5 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 21 & 6 \\ 15 & -3 & -6 \end{bmatrix}$

2º) $\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 8 & 6 & 4 \\ 10 & 12 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & -3 \end{bmatrix}$

44. Teorema

O produto de um número por uma matriz goza das seguintes propriedades:

(1) $a \cdot (b \cdot A) = (ab) \cdot A$

(2) $a \cdot (A + B) = a \cdot A + a \cdot B$

(3) $(a + b) \cdot A = a \cdot A + b \cdot A$

(4) $1 \cdot A = A$

onde A e B são matrizes quaisquer do tipo $m \times n$ e a e b são números reais quaisquer.

Deixamos a demonstração deste teorema como exercício para o leitor.

EXERCÍCIOS

D.150 Calcular as matrizes $2A$, $\frac{1}{3}B$, e $\frac{1}{2}(A + B)$, sendo dadas

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}.$$

D.151 Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$,

determinar X em cada uma das equações abaixo:

a) $2X + A = 3B + C$

b) $X + A = \frac{1}{2}(B - C)$

c) $3X + A = B - X$

d) $\frac{1}{2}(X - A - B) = \frac{1}{3}(X - C)$

D.152 Resolver o sistema:

$$\begin{cases} X + Y = 3A \\ X - Y = 2B \end{cases} \qquad \text{onde } A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Solução

Somando membro a membro as duas equações, resulta:

$$X + Y + X - Y = 3A + 2B \Longrightarrow 2X = 3A + 2B \Longrightarrow X = \frac{1}{2}(3A + 2B)$$

Subtraindo membro a membro as duas equações, resulta:

$$X + Y - X + Y = 3A - 2B \Longrightarrow 2Y = 3A - 2B \Longrightarrow Y = \frac{1}{2}(3A - 2B)$$

Temos:

$$X = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$Y = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -10 \\ -6 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$$

D.153 Determinar as matrizes X e Y que satisfazem o sistema

$$\begin{cases} X + Y = A \\ X - Y = B \end{cases} \qquad \text{sendo dadas } A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

D.154 Obter X e Y a partir do sistema:

$$\begin{cases} 2X + 3Y = A + B \\ 3X + 4Y = A - B \end{cases} \qquad \text{onde } A = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

VI. PRODUTO DE MATRIZES

45. Definição

Dadas duas matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{jk})_{n \times p}$, chama-se *produto AB* a matriz $C = (c_{ik})_{m \times p}$ tal que

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + a_{i3} \cdot b_{3k} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{jk}$$

para todo $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ e todo $k \in \{1, 2, \ldots, p\}$

46. Observações

1ª) A definição dada garante a existência do produto AB somente se o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B, pois A é do tipo $m \times n$ e B é do tipo $n \times p$.

2ª) A definição dada afirma que o produto AB é uma matriz que tem o número de linhas de A e o número de colunas de B, pois $C = AB$ é do tipo $m \times p$.

3ª) Ainda pela definição, um elemento c_{ik} da matriz AB deve ser obtido pelo procedimento seguinte:

(I) toma-se a linha i da matriz A.

$$\boxed{a_{i1} \quad a_{i2} \quad a_{i3} \quad \ldots \quad a_{in}} \quad \text{(n elementos)}$$

(II) toma-se a coluna k da matriz B:

$$\boxed{\begin{matrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ b_{3k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{matrix}} \quad \text{(n elementos)}$$

(III) coloca-se a linha i de A na "vertical" ao lado da coluna k de B (conforme esquema)

$$\begin{array}{|c|}\hline a_{i1} \\ a_{i2} \\ a_{i3} \\ \vdots \\ a_{in} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|}\hline b_{1k} \\ b_{2k} \\ b_{3k} \\ \vdots \\ b_{nk} \\ \hline \end{array}$$

(IV) calculam-se os n produtos dos elementos que ficaram lado a lado (conforme esquema)

$$\begin{array}{|c|}\hline a_{i1} \times b_{1k} \\ a_{i2} \times b_{2k} \\ a_{i3} \times b_{3k} \\ \vdots \\ a_{in} \times b_{nk} \\ \hline \end{array}$$

(V) somam-se esses n produtos, obtendo c_{ik}.

47. Exemplos

1º) Dadas

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}, \text{ calcular } AB.$$

Sendo A do tipo 2 X 3 e B do tipo 3 X 1, decorre que existe AB e é do tipo 2 X 1. Fazendo AB = C, devemos calcular c_{11} e c_{21}:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1^{a} \text{ L. de A} \times 1^{a} \text{ C. de B}) \\ (2^{a} \text{ L. de A} \times 1^{a} \text{ C. de B}) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \times 7 \\ 2 \times 8 \\ 3 \times 9 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 4 \times 7 \\ 5 \times 8 \\ 6 \times 9 \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (7 + 16 + 27) \\ (28 + 40 + 54) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 122 \end{bmatrix}$$

2º) Dadas $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$, calcular AB.

Sendo A do tipo 2 X 2 e B do tipo 2 X 2, decorre que existe AB e é do tipo 2 X 2. Fazendo AB = C, temos:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1^{a} \text{ L. de A} \times 1^{a} \text{ C. de B}) & (1^{a} \text{ L. de A} \times 2^{a} \text{ C. de B}) \\ (2^{a} \text{ L. de A} \times 1^{a} \text{ C. de B}) & (2^{a} \text{ L. de A} \times 2^{a} \text{ C. de B}) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \times 5 \\ 2 \times 7 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \times 6 \\ 2 \times 8 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 \times 5 \\ 4 \times 7 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 \times 6 \\ 4 \times 8 \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 + 14 & 6 + 16 \\ 15 + 28 & 18 + 32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$$

EXERCÍCIOS

D.155 Calcular os seguintes produtos:

a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 1 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

D.156 Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, calcular A^2, A^3, A^4 e A^n ($n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 1$)

Solução

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^3A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observamos que em cada multiplicação por A os elementos a_{11}, a_{21}, e a_{22} não se alteram e o elemento a_{12} sofre acréscimo de 1. Provaríamos por indução finita sobre n que:

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

D.157 Calcular AB, BA, A^2 e B^2, sabendo que

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

D.158 Calcular o produto ABC, sendo dadas:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Solução

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c:c} 1 \times 1 & 1 \times 1 & 1 \times 1 \\ 2 \times 3 & 2 \times 2 & 2 \times 1 \\ \hdashline 5 \times 1 & 5 \times 1 & 5 \times 1 \\ 1 \times 3 & 1 \times 2 & 5 \times 1 \end{array}\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 8 & 7 & 10 \end{bmatrix}$$

$$(AB)C = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 8 & 7 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c} 7 \times 3 & 7 \times 1 \\ 5 \times 1 & 5 \times 0 \\ 3 \times 2 & 3 \times -1 \\ \hdashline 8 \times 3 & 8 \times 1 \\ 7 \times 1 & 7 \times 0 \\ 10 \times 2 & 10 \times -1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 32 & 4 \\ 51 & -2 \end{bmatrix}$$

D.159 Calcular os seguintes produtos:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

D.160 Resolver a equação matricial:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -5 & 9 \end{bmatrix}$$

Solução

A equação dada equivale a:

$$\begin{bmatrix} 3a - 2b & a + 2b \\ 3c - 2d & c + 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -5 & 9 \end{bmatrix}$$

então

$$\left\{ \begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} 3a - 2b = 5 \\ a + 2b = 7 \end{array}\right\} \Longrightarrow a = 3 \quad e \quad b = 2 \\ \left.\begin{array}{r} 3c - 2d = -5 \\ c + 2d = 9 \end{array}\right\} \Longrightarrow c = 1 \quad e \quad d = 4 \end{array} \right.$$

e a resposta é $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

D.161 Resolver as seguintes equações:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -5 & 9 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

48. Teorema

Se $A = (a_{ij})_{m \times n}$, então $AI_n = A$ e $I_mA = A$.

Demonstração

I) Sendo $I_n = (\delta_{ij})_{n \times n}$ e $B = AI_n = (b_{ij})_{m \times n}$. Temos:

$$b_{ij} = a_{i1}\delta_{1j} + a_{i2}\delta_{2j} + a_{i3}\delta_{3j} + \ldots + a_{ii}\delta_{ii} + \ldots + a_{in}\delta_{nj} =$$

$$= a_{i1} \cdot 0 + a_{i2} \cdot 0 + a_{i3} \cdot 0 + \ldots + a_{ii} \cdot 1 + \ldots + a_{in} \cdot 0 = a_{ij}$$

para todos i e j, então $A \cdot I_n = A$.

II) Analogamente

49. Teorema

A multiplicação de matrizes goza das propriedades seguintes:

(1) é associativa: $(AB)C = A(BC)$
quaisquer que sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{jk})_{n \times p}$ e $C = (c_{k\ell})_{p \times r}$

(2) é distributiva à direita em relação à adição: $(A + B)C = AC + BC$
quaisquer que sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n}$ e $C = (c_{jk})_{n \times p}$

(3) é distributiva à esquerda: $C(A + B) = CA + CB$
quaisquer que sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n}$ e $C = (c_{ki})_{p \times m}$

(4) $(kA)B = A(kB) = k(AB)$
quaisquer que sejam o número k e as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{jk})_{n \times p}$

Demonstração

(1) Fazendo $D = AB = (d_{ik})_{m \times p}$, $E = (AB)\,C = (e_{i\ell})_{m \times r}$ e $F = BC = (f_{j\ell})_{n \times r}$,
temos:

$$e_{i\ell} = \sum_{k=1}^{p} d_{ik} \cdot c_{k\ell} = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} \right) \cdot c_{k\ell} =$$

$$= \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} \cdot c_{k\ell} \right) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \left(\sum_{k=1}^{p} b_{jk} \cdot c_{k\ell} \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot f_{j\ell}$$

então, $(AB)\,C = A(BC)$

(2) Fazendo $D = (A + B)\,C = (d_{ik})_{m \times p}$, temos

$$d_{ik} = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + b_{ij}) \cdot c_{jk} = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} \cdot c_{jk} + b_{ij} \cdot c_{jk}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot c_{jk} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \cdot c_{jk} \text{ então,}$$

$(A + B)\,C = AC + BC$

(3) Análoga a (2)

(4) Fazendo $C = kA = (c_{ij})_{m \times n}$, $D = kB = (d_{jk})_{n \times p}$ e $E = AB = (e_{ik})_{m \times p}$,
temos:

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot b_{jk} = \sum_{j=1}^{n} (k \cdot a_{ij}) \cdot b_{jk} = k \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot d_{jk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot (k \cdot b_{jk}) = k \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk}$$

então, $(kA)B = A(kB) = k(AB)$

50. Observações

1ª) É muito importante notar que a multiplicação de matrizes não é comutativa, isto é, para duas matrizes quaisquer A e B é falso que $AB = BA$ necessariamente.

Exemplos

1º) Há casos em que existe AB e não existe BA. Isto ocorre quando A é $m \times n$, B é $n \times p$ e $m \neq p$:

$$\underbrace{A}_{m \times n} \quad e \quad \underbrace{B}_{n \times p} \Longrightarrow \exists\, AB$$

$$=$$

$$\underbrace{B}_{n \times p} \quad e \quad \underbrace{A}_{m \times n} \Longrightarrow \nexists\, BA$$

$$\neq$$

2º) Há casos em que existem AB e BA, porém são matrizes de tipos diferentes e, portanto, $AB \neq BA$. Isto ocorre quando A é $m \times n$, B é $n \times m$ e $m \neq n$:

$$\underbrace{A}_{m \times n} \quad \text{e} \quad \underbrace{B}_{n \times m} \quad \Longrightarrow \quad \exists \quad \underbrace{AB}_{m \times m}$$

$$=$$

$$\underbrace{B}_{n \times m} \quad \text{e} \quad \underbrace{A}_{m \times n} \quad \Longrightarrow \quad \exists \quad \underbrace{BA}_{n \times n}$$

$$=$$

3º) Mesmo nos casos em que AB e BA são do mesmo tipo (o que ocorre quando A e B são quadradas e de mesma ordem), temos quase sempre $AB \neq BA$. Assim, por exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow AB = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 26 & 10 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 14 & 15 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

2ª) Quando A e B são tais que $AB = BA$, dizemos que A e B comutam. Notemos que uma condição necessária para A e B comutarem é que sejam quadradas e de mesma ordem.

Exemplos

1º) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ comuta com $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

2º) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ comuta com $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

3º) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ comuta com $\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

3ª) É importante observar também que a implicação:

$$AB = 0 \Longrightarrow A = 0 \quad \text{ou} \quad B = 0$$

não é válida para matrizes, isto é, é possível encontrar duas matrizes não nulas cujo produto é a matriz nula.

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

EXERCÍCIOS

D.162 Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, qual das matrizes abaixo comuta com A?

$$B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

D.163 Determinar x e y de modo que as matrizes

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ x & y \end{bmatrix}$ comutem.

D.164 Obter todas as matrizes B que comutam com $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$.

Solução

Notemos inicialmente que uma condição necessária para que A e B sejam comutáveis é que A e B sejam quadradas e de mesma ordem. Assim, fazendo

$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, temos: $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ isto é

$$\begin{bmatrix} a - c & b - d \\ 3a & 3b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + 3b & -a \\ c + 3d & -c \end{bmatrix} \quad \text{e então:} \quad \begin{cases} a - c = a + 3b & (1) \\ b - d = -a & (2) \\ 3a = c + 3d & (3) \\ 3b = -c & (4) \end{cases}$$

De (1) e (4) vem $c = -3b$

De (2) e (3) vem $d = a + b$

Resposta: $B = \begin{bmatrix} a & b \\ -3b & a + b \end{bmatrix}$ com $a, b \in \mathbb{R}$.

D.165 Calcular, em cada caso, as matrizes que comutam com A.

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

D.166 Provar que se A e B são matrizes comutáveis, então vale a igualdade:
$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$

Solução

Lembrando que $AB = BA \iff BA - AB = 0$, temos:
$(A + B)(A - B) = A(A - B) + B(A - B) = A^2 - AB + BA - B^2 =$
$= A^2 + (BA - AB) - B^2 = A^2 + 0 - B^2 = A^2 - B^2$

D.167 Provar que se A e B são matrizes comutáveis, então valem as seguintes igualdades:

a) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
b) $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$
c) $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$
d) $(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$
e) $(AB)^n = A^nB^n$

D.168 Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, calcular:

a) $(A + B)^2$
b) $(A + B)(A - B)$
c) $A^2 - 2I_2A + I_2^2$
d) $A^3 - I_2^3$

D.169 Calcular todas as matrizes X, quadradas de ordem 2, tais que $X^2 = 0$.

Solução

Fazendo $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, resulta: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & cb + d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ então

$$\begin{cases} a^2 + bc = 0 & (1) \\ b(a + d) = 0 & (2) \\ c(a + d) = 0 & (3) \\ bc + d^2 = 0 & (4) \end{cases}$$

1ª possibilidade: $b = 0$

$$\left.\begin{array}{l} (1) \Rightarrow a^2 = 0 \Longrightarrow a = 0 \\ (4) \Rightarrow d^2 = 0 \Longrightarrow d = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow a + d = 0 \Longrightarrow (3) \text{ é satisfeita } \forall\, c \in \mathbb{R}$$

2ª possibilidade: $b \neq 0$

$(2) \Rightarrow a + d = 0 \Longrightarrow d = -a$
(1) e (4) $bc = -a^2 \Longrightarrow c = -\dfrac{a^2}{b}$

Resposta:

$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}$ com $c \in \mathbb{R}$ ou $X = \begin{bmatrix} a & b \\ -\dfrac{a^2}{b} & -a \end{bmatrix}$ com $a, b, c \in \mathbb{R}$

D.170 Calcular todas as matrizes X, quadradas de ordem 2, tais que $X^2 = I_2$.

D.171 Calcular todas as matrizes X, quadradas de ordem 2, tais que $X^2 = X$.

VII. MATRIZ TRANSPOSTA

51. Definição

Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$, chama-se *transposta de A* a matriz $A^t = (a'_{ji})_{n \times m}$ tal que $a'_{ji} = a_{ij}$, para todo i e todo j. Isto significa que, por exemplo, $a'_{11}, a'_{21}, a'_{31}, \ldots, a'_{n1}$, são respectivamente iguais a $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{1n}$; vale dizer que a 1ª coluna de A^t é igual à 1ª linha de A. Repetindo o raciocínio, chegaríamos à conclusão de que as colunas de A^t são ordenadamente iguais às linhas de A.

52. Exemplos

1º) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Longrightarrow A^t = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$

2º) $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \Longrightarrow A^t = \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}$

3º) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \Longrightarrow A^t = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$

53. Teorema

A matriz transposta goza das seguintes propriedades:

(1) $(A^t)^t = A$ para toda matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$

(2) Se $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$, então $(A + B)^t = A^t + B^t$

(3) Se $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $k \in \mathbb{R}$, então $(kA)^t = k\,A^t$

(4) Se $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{jk})_{n\times p}$, então $(AB)^t = B^tA^t$

Demonstração

(1) Fazendo $(A^t)^t = (a''_{ij})_{m\times n}$, resulta:

$a''_{ij} = a'_{ji} = a_{ij}$ para todos i, j.

(2) Fazendo $A + B = C = (c_{ij})_{m\times n}$ e $(A + B)^t = C^t = (c'_{ji})_{n\times m}$, temos:

$c'_{ji} = c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = a'_{ji} + b'_{ji}$ para todos i, j.

(3) Fazendo $(kA)^t = (a''_{ji})_{n\times m}$, resulta:

$a''_{ji} = ka_{ij} = ka'_{ji}$ para todos i, j.

(4) Fazendo $AB = C = (c_{ik})_{m\times p}$ e $(AB)^t = C^t = (c'_{ki})_{p\times m}$, resulta:

$$c'_{ki} = c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{jk} = \sum_{j=1}^{n} b_{jk}\, a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b'_{kj}\, a'_{ji}$$

54. Aplicação

Verificar diretamente a validade do teorema anterior com

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \text{ e } k = 2$$

(1) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Longrightarrow A^t = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \Longrightarrow (A^t)^t = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = A$

(2) $A + B = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix} \Longrightarrow (A + B)^t = \begin{bmatrix} a+e & c+g \\ b+f & d+h \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & g \\ f & h \end{bmatrix} = A^t + B^t$

(3) $2 \cdot A = \begin{bmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{bmatrix} \Longrightarrow (2A)^t = \begin{bmatrix} 2a & 2c \\ 2b & 2d \end{bmatrix} =$

$= 2\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = 2A^t$

(4) $AB = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix} \Longrightarrow (AB)^t = \begin{bmatrix} ae+bg & ce+dg \\ af+bh & cf+dh \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} e & g \\ f & h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = B^t\,A^t$

55. Definição

Chama-se *matriz simétrica* toda matriz quadrada A, de ordem n, tal que $A^t = A$.

Decorre da definição que se $A = (a_{ij})$ é uma matriz simétrica, temos:

$$a_{ij} = a_{ji}; \quad \forall\, i, \forall\, j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$$

isto é, os elementos simetricamente dispostos em relação à diagonal principal são iguais.

Exemplo

São simétricas as matrizes:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & e & f & g \\ c & f & h & i \\ d & g & i & j \end{bmatrix}$$

56. Definição

Chama-se *matriz anti-simétrica* toda matriz quadrada A, de ordem n, tal que

$$A^t = -A.$$

Decorre da definição que se $A = (a_{ij})$ é uma matriz anti-simétrica, temos:

$$a_{ij} = -a_{ij} \qquad \forall\, i, \forall\, j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$$

Isto é, os elementos simétricamente dispostos em relação à diagonal principal são opostos.

Exemplo

São anti-simétricas as matrizes:

$$\begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{bmatrix}$$

EXERCÍCIOS

D.172 Determinar, em cada caso, a matriz X:

a) $X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 7 & 2 \end{bmatrix}^t$ b) $X + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^t$.

c) $2X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}^t$ d) $3X^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$

D.173 Determinar x, y, z para que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x & 5 \\ 2 & 7 & -4 \\ y & z & -3 \end{bmatrix} \text{ seja simétrica.}$$

D.174 Determinar x, y e z de modo que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 2 \\ x & 0 & 1-z \\ y & 2z & 0 \end{bmatrix} \text{ seja anti-simétrica}$$

D.175 Provar que se A e B são matrizes simétricas de ordem n, então A + B também é simétrica.

VIII. MATRIZES INVERSÍVEIS

57. Definição

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Dizemos que A é *matriz inversível* se existir uma matriz B tal que $AB = BA = I_n$. Se A não é inversível, dizemos que A é uma matriz singular.

58. Teorema

Se A é inversível, então é única a matriz B tal que $AB = BA = I_n$.

Demonstração

Admitamos que exista uma matriz C tal que $AC = CA = I_n$. Temos:

$$C = I_n C = (BA)\,C = B\,(AC) = BI_n = B.$$

59. Definição

Dada uma matriz inversível A, chama-se *inversa de A* a matriz A^{-1} (que é única) tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

É evidente que A^{-1} deve ser também quadrada de ordem n, pois A^{-1} comuta com A.

Exemplos

1º) A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ é inversível e $A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

pois:

$$A\,A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

2º) A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ é inversível e $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 31 & -19 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix}$

pois:

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 31 & -19 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 31 & -19 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

3º) Qual é a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 11 \end{bmatrix}$?

Fazendo $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, temos:

$$A^{-1}A = I_2 \Longrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} 3a+5b & 7a+11b \\ 3c+5d & 7c+11d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pela definição de igualdade de matrizes, temos:

$$\begin{cases} 3a + 5b = 1 \\ 7a + 11b = 0 \end{cases} \Longrightarrow a = -\frac{11}{2} \quad e \quad b = \frac{7}{2}.$$

e

$$\begin{cases} 3c + 5d = 0 \\ 7c + 11d = 1 \end{cases} \Longrightarrow c = \frac{5}{2} \quad e \quad d = -\frac{3}{2}$$

isto é, $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{11}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$ pois temos também:

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{11}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

4º) A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$ é singular (não é inversível) pois se $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

decorre: $$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ 4a+8c & 4b+8d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e então:

$$\underbrace{a + 2c = 1,\ 4a + 8c = 0}_{\text{impossível}},\ \underbrace{b + 2d = 0 \text{ e } 4b + 8d = 1}_{\text{impossível}}$$

portanto, não existem a, b, c, d satisfazendo a definição.

5º) Qual é a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 9 & 1 \end{bmatrix}$?

Fazendo $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$, resulta:

$$A^{-1}A = I_3 \Longrightarrow \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 9 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} a+2b+4c & a+3b+9c & a+b+c \\ d+2e+4f & d+3e+9f & d+e+f \\ g+2h+4i & g+3h+9i & g+h+i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Devemos ter:

$$\begin{cases} a + 2b + 4c = 1 \\ a + 3b + 9c = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \Longrightarrow a = -3,\ b = 4,\ c = -1$$

$$\begin{cases} d + 2e + 4f = 0 \\ d + 3e + 9f = 1 \\ d + e + f = 0 \end{cases} \Longrightarrow d = 1,\ e = -\frac{3}{2},\ f = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} g + 2h + 4i = 0 \\ g + 3h + 9i = 0 \\ g + h + i = 1 \end{cases} \Longrightarrow g = 3,\ h = -\frac{5}{2},\ i = \frac{1}{2}$$

portanto vem:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 3 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

60. Observação

Do exposto observamos que, para determinar a inversa de uma matriz quadrada de ordem n, temos de obter n^2 incógnitas, resolvendo n sistemas de n equações a n incógnitas cada um. Isto não é nada prático. No final do capítulo sobre determinantes expomos um outro método para obter a inversa de uma matriz.

Uma aplicação prática da inversa de uma matriz é exposta no início do capítulo sobre sistemas lineares.

EXERCÍCIOS

D.176 Determinar a inversa de cada matriz abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

D.177 Determinar a inversa de cada matriz abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

D.178 Resolver a equação matricial:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Solução 1

Fazendo $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = A$ e $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = B$, vemos que a equação dada é $AX = B$.

Temos:

$\exists\ AX$, A é 2×2 e X é $m \times n \Longrightarrow m = 2$

$AX = B$ e B é $2 \times 1 \Longrightarrow n = 1$

Fazendo $X = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, vem:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 3a + 4b \\ 2a + 3b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} 3a + 4b = -1 \\ 2a + 3b = -1 \end{cases}$$

e, então, $a = 1$ e $b = -1$, portanto, $X = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Solução 2

Notando que se A é matriz inversível, então $AX = B \iff X = A^{-1}B$, temos:

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

D.179 Resolver as equações matriciais abaixo:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 13 \\ 18 \end{bmatrix}$

b) $X \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} \cos a & \operatorname{sen} a \\ -\operatorname{sen} a & \cos a \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} \cos 2a \\ \operatorname{sen} 2a \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 9 \\ -7 \end{bmatrix}$

D.180 Resolver as equações matriciais abaixo:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$

b) $X \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix}$

D.181 Expressar X em função de A, B e C, sabendo que A, B e C são matrizes quadradas de ordem n inversíveis e $AXB = C$

Solução

Vamos multiplicar ambos os membros da igualdade $AXB = C$ por A^{-1}:

$A^{-1}AXB = A^{-1}C \iff I_nXB = A^{-1}C \iff XB = A^{-1}C$

Vamos multiplicar ambos os membros da igualdade $XB = A^{-1}C$ por B^{-1}:

$XBB^{-1} = A^{-1}CB^{-1} \iff XI_n = A^{-1}CB^{-1} \iff X = A^{-1}CB^{-1}$

Temos, portanto: $X = A^{-1}CB^{-1}$

D.182 Sendo A e B matrizes inversíveis de ordem n, isolar X a partir de cada equação abaixo:

a) $AX = B$
b) $AXB = I_n$
c) $(AX)^{-1} = B$
d) $BAX = A$
e) $(AX)^t = B$
f) $(A + X)^t = B$

D.183 Determinar X tal que:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

D.184 Provar que se A e B são matrizes inversíveis de ordem n, então $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Solução

Para provarmos que $C = B^{-1}A^{-1}$ é a matriz inversa de AB, basta mostrar que $C(AB) = (AB)C = I_n$. De fato:

$C(AB) = (B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n$

$(AB)C = (AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$

D.185 Provar que se A, B e C são matrizes inversíveis de ordem n, então $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$.

D.186 Verificar diretamente que se A é uma matriz inversível de ordem 2, então $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Ingleses ofendidos por alemão

Carl Gustav Jacob Jacobi nasceu na Alemanha. Seu pai era um próspero banqueiro, nunca tendo lhe faltado nada. Obteve boa instrução na Universidade de Berlim, concentrando-se em Filosofia e Matemática à qual acabou por dedicar-se inteiramente. Era professor nato e gostava de transmitir suas idéias.

Na mesma época que Gauss e Abel, Jacobi desenvolveu a teoria sobre as funções elíticas. Tendo conhecimento de que Abel havia entregue a Cauchy alguns artigos sobre o assunto, Jacobi escreveu ao mestre francês perguntando por eles, na esperança de obter informações que confirmassem sua descoberta. Cauchy, entretanto, tinha perdido os escritos de Abel.

Seu tratado clássico *"Fundamentos da Nova Teoria das Funções Elíticas"* apareceu em 1829, ano da morte de Abel, e mereceu elogios até de Legendre.

Em 1834 provou que se uma função unívoca de uma variável é duplamente periódica, a razão entre os períodos não pode ser real e é impossível que ela tenha mais de dois períodos distintos. A ele também devemos o estudo das "funções theta de Jacobi", funções inteiras das quais as elíticas são quocientes.

Até essa época, a teoria dos determinantes aparecia nos trabalhos de alguns matemáticos como Leibniz, Cramer e Lagrange, mas com idéias esporádicas. O desenvolvimento contínuo dessa teoria teve lugar somente no século XIX e seu principal colaborador foi Jacobi, além de Cauchy, construindo algoritmos, dando regras práticas com grande preocupação pelas notações de determinantes e em 1829 usou pela primeira vez os "jacobianos", determinantes especiais análogos para funções de várias variáveis, do quociente diferencial de uma função de uma variável. Através deles conseguiu provar o teorema dos quatro quadrados de Fermat-Lagrange e também com a utilização dos jacobianos conseguiu saber quando uma coleção de funções é independente.

Carl G. J. Jacobi
(1804 — 1851)

Os artigos de Jacobi, bem como os de Abel e Dirichlet apareceram freqüentemente no Journal de Crelle.

Em 1842, quando Jacobi visitou Paris, perguntaram-lhe quem era o maior matemático inglês vivo e ele, impressionado com tantas descobertas francesas importantes, respondeu: "Não há nenhum", o que foi considerado muito deselegante e cruel de sua parte.

CAPÍTULO V

DETERMINANTES

I. INTRODUÇÃO

A teoria dos determinantes teve origem em meados do século XVII, quando eram estudados processos para resolução de sistemas lineares de equações. Hoje em dia, embora não sejam um instrumento prático para resolução de sistemas, os determinantes são utilizados, por exemplo, para sintetizar certas expressões matemáticas complicadas.

II. DEFINIÇÃO DE DETERMINANTE ($n \leqslant 3$)

Consideremos o conjunto das *matrizes quadradas* de elementos reais. Seja M uma matriz de ordem n desse conjunto. Chamamos *determinante da matriz M* (e indicamos por det M) o número que podemos obter operando com os elementos de M da seguinte forma:

61. 1º) *Se M é de ordem n = 1,* então det M é o único elemento de M.

$$\mathbf{M} = [a_{11}] \Longrightarrow \mathbf{det\ M} = a_{11}$$

Exemplo

$$M = [6] \Longrightarrow \det M = 6.$$

Podemos também indicar *o determinante de M* pelo símbolo $|a_{11}|$, isto é, colocando uma barra vertical de cada lado de M.

62. 2º) *Se M é de ordem n = 2,* o produto dos elementos da diagonal principal menos o produto dos elementos da diagonal secundária.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathbf{det\ M} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Exemplos

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 4(-1) = 10$$

$$\begin{vmatrix} \cos x & \text{sen } x \\ \text{sen } y & \cos y \end{vmatrix} = \cos x \cdot \cos y - \text{sen } x \cdot \text{sen } y = \cos(x+y)$$

63. 3º) *Se M é de ordem n = 3,* isto é,

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \text{ definimos:}$$

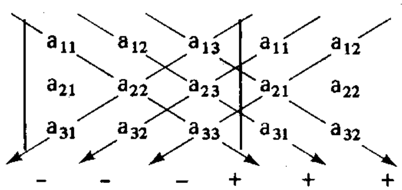
$$\textbf{det M} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

Podemos memorizar esta definição da seguinte forma:

a) Repetimos ao lado da matriz, as duas primeiras colunas.

b) Os termos precedidos pelo sinal (+) são obtidos multiplicando-se os elementos segundo as flechas situadas na direção da diagonal principal: $a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$; $a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}$; $a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}$.

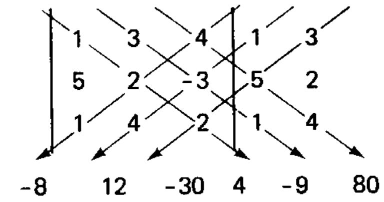
c) Os termos precedidos pelo sinal (−) são obtidos multiplicando-se os elementos segundo as flechas situadas na direção da diagonal secundária: $-a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$; $-a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$; $-a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$.



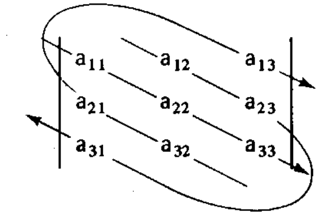
Este dispositivo prático é conhecido como regra de Sarrus para o cálculo de determinantes de ordem 3.

Exemplo

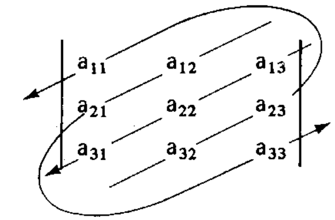
$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 9 + 80 - 8 + 12 - 30 = 49$$



Uma outra forma de memorizar a definição, é a indicada ao lado:



Os termos precedidos pelo sinal (+) são obtidos multiplicando-se os elementos segundo as trajetórias indicadas.



Os termos precedidos pelo sinal (−) são obtidos multiplicando-se os elementos segundo as trajetórias indicadas.

EXERCÍCIOS

D.187 Calcular os determinantes:

a) $\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 13 & 7 \\ 11 & 5 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 3i & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$

D.188 Calcular os determinantes:

a) $\begin{vmatrix} \text{sen } x & -\cos x \\ \text{sen } y & \cos y \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} \text{sen } x & -\cos x \\ \cos x & \text{sen } x \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 2 \cdot \text{sen } x & 3 \cdot \cos x \\ 1 - 2 \cdot \cos x & 3 \cdot \text{sen } x + 2 \end{vmatrix}$

D.189 Calcular os determinantes:

a) $\begin{vmatrix} \log a & \log b \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2m^2 & 2m^4 - m \\ m & m^3 - 1 \end{vmatrix}$

D.190 Determinar x tal que:

a) $\begin{vmatrix} 2x & 3x+2 \\ 1 & x \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} 2x & x-2 \\ 4x+5 & 3x-1 \end{vmatrix} = 11$

D.191 Calcular os determinantes pela regra de Sarrus:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & -3 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

D.192 Calcular os determinantes pela regra de Sarrus:

a) $\begin{vmatrix} 9 & 7 & 11 \\ -2 & 1 & 13 \\ 5 & 3 & 6 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 0 & a & c \\ -c & 0 & b \\ a & b & 0 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ m & n & 2 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$

D.193 Determinar **x** tal que

a) $\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ 2 & 2x & 1 \\ 3 & x+1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 1 & -1 & x \\ 1 & -x & 1 \end{vmatrix} = 0$ c) $\begin{vmatrix} 1 & x & 2 \\ -2 & x & -4 \\ 1 & -3 & -x \end{vmatrix} = 0$

D.194 Determinar **x** tal que

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & x \\ 0 & 1 & -1 \\ 3x & x+1 & 2x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3x & 2x \\ 4 & -x \end{vmatrix}$$

III. MENOR COMPLEMENTAR E COMPLEMENTO ALGÉBRICO

64. Definição

Consideremos uma matriz M de ordem $n \geqslant 2$; seja a_{ij} um elemento de M. Definimos *menor complementar do elemento* a_{ij}, e indicamos por D_{ij}, como sendo o determinante da matriz que se obtém, suprimindo a linha i e coluna j de M.

65. Exemplos

1º) Seja $M = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ e calculemos D_{11}, D_{21}, D_{31}.

Temos: $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ então $D_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -13$

$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ então $D_{21} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -6$

$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ então $D_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 11$

2º) Seja $M = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ e calculemos D_{12}, D_{22}.

Temos: $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ então $D_{12} = |7| = 7$

$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ então $D_{22} = |5| = 5$.

66. Definição

Consideremos uma matriz de ordem $n \geqslant 2$; seja a_{ij} um elemento de M. Definimos *complemento algébrico do elemento* a_{ij} (ou cofator de a_{ij}), e indicamos por A_{ij}, como sendo o número $(-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$.

Exemplo

Seja $M = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ e calculemos A_{11}, A_{12}, A_{13}.

Temos: $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ então $A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -28$

$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ então $A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 53$

$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ então $A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = -23$

IV DEFINIÇÃO DE DETERMINANTE POR RECORRÊNCIA

(Caso Geral)

Já vimos em (II) a definição de determinante para matrizes de ordem 1, 2 e 3. Vamos agora, com o auxílio de conceito do cofator (complemento algébrico) dar a definição de determinante, válida para matrizes de ordem n qualquer.

Seja M uma matriz de ordem **n.** Definimos determinante da matriz M, e indicamos por det M, da seguinte forma:

1º) *Se M é de ordem 1,* então $M = [a_{11}]$ e $\det M = a_{11}$

2º) *Se M é de ordem $n \geqslant 2$,* então

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ e definimos } \det M = \begin{vmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \boxed{a_{21}} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \boxed{a_{n1}} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot A_{11} + a_{21} \cdot A_{21} + a_{31} \cdot A_{31} + \dots + a_{n1} \cdot A_{n1} = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} \cdot A_{i1}$$

Isto é, o determinante de uma matriz de ordem $n \geqslant 2$ é *a soma dos produtos dos elementos da 1ª coluna, pelos respectivos cofatores.*

67. Exemplos

1º) $\begin{vmatrix} \boxed{a} & b \\ \boxed{c} & d \end{vmatrix} = a \cdot A_{11} + c \cdot A_{21} = a \cdot (-1)^2 \cdot |d| + c \cdot (-1)^3 \cdot |b| = ad - bc$

que coincide com a definição particular dada em II.

2º) $\begin{vmatrix} \boxed{a} & b & c \\ \boxed{d} & e & f \\ \boxed{g} & h & i \end{vmatrix} = a \cdot A_{11} + d \cdot A_{21} + g \cdot A_{31} =$

$= a \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} + d \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + g \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} =$

$= a(ei - hf) - d(bi - ch) + g(bf - ce) = aei + dhc + gbf - gce - dbi - ahf$

que coincide com a definição dada em (II) (ver regra de Sarrus).

3º) $\begin{vmatrix} \boxed{3} & 1 & 2 & -2 \\ \boxed{0} & 2 & 0 & 4 \\ \boxed{0} & 4 & 1 & -2 \\ \boxed{0} & 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot A_{11} + \underbrace{0 \cdot A_{21}}_{0} + \underbrace{0 \cdot A_{31}}_{0} + \underbrace{0 \cdot A_{41}}_{0} =$

$= 3 \cdot A_{11} = 3 \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 62 = 186.$

4º) $\begin{vmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 \\ \boxed{2} & 1 & 4 & 3 \\ \boxed{3} & 0 & 0 & 2 \\ \boxed{4} & 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{11} + 2 \cdot A_{21} + 3 \cdot A_{31} + 4 \cdot A_{41} =$

$= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix}$

$-4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 20 - 2(-2) + 3 \cdot (-48) - 4 \cdot (14) = -176.$

68. Observação

Notemos que (exemplo 4º), quando a 1ª coluna não possui zeros, o cálculo do determinante torna-se trabalhoso. Isto pode ser atenuado, de certo modo, com o teorema que veremos a seguir.

EXERCÍCIOS

D.195 Seja

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ -3 & 7 & -1 \end{bmatrix}$$

Calcular D_{21}, D_{22}, D_{23}.

D.196 Encontrar o cofator de 3 na matriz.

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 6 & -2 & 5 & 7 \\ -1 & 7 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & -10 \end{bmatrix}$$

D.197 Seja

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 7 & 6 \end{bmatrix}, \text{ calcular } D_{13}, D_{24}, D_{32}, D_{43}$$

D.198 Seja

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 4 & 0 \\ 5 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \text{ calcular } D_{11}, D_{22}, D_{33}, D_{44}$$

D.199 Calcular os determinantes das matrizes abaixo, usando a definição:

a) $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ b) $M = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

V. TEOREMA FUNDAMENTAL (DE LAPLACE)

O determinante de uma matriz M, de ordem $n \geq 2$, é a soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer (linha ou coluna) pelos respectivos cofatores.

Isto é,

a) Se escolhermos a coluna j da matriz M

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

então $\quad \det M = a_{1j}A_{ij} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \ldots + a_{nj} \cdot A_{nj}$

b) Se escolhermos a linha i da matriz M

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

então $\quad \mathbf{\det M = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \ldots + a_{in} \cdot A_{in}}$

Portanto, para calcularmos um determinante, não precisamos necessariamente dos elementos da 1ª coluna e seus cofatores; qualquer outra coluna (ou linha) com seus cofatores permitem seu cálculo.

Para calcularmos o determinante.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

Se escolhermos a 3ª linha para seu cálculo, teremos:

$$\det M = 3 \cdot A_{31} + \underbrace{0 \cdot A_{32}}_{0} + \underbrace{0 \cdot A_{33}}_{0} + 2 \cdot A_{34} = 3 \cdot A_{31} + 2 \cdot A_{34}$$

e só teremos que calcular dois cofatores, em vez de quatro se usássemos a definição.

Concluímos então que, quanto mais zeros houver em uma fila, mais fácil será o cálculo do determinante se usarmos esta fila. Em particular, se a matriz tiver uma fila de zeros, seu determinante será zero.

Demonstração

Ver apêndice no final do capítulo.

EXERCÍCIOS

D.200 Calcular os determinantes das matrizes abaixo utilizando o teorema de Laplace

a) $M = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ b) $M = \begin{bmatrix} 0 & a & b & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & a & 0 & b \\ 1 & b & a & 0 \end{bmatrix}$ c) $M = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

d) $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & a & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & b & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & c & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}$ e) $M = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \ell & p & z & 0 & 0 & 0 \\ m & n & p & x & 0 & 0 \\ b & c & d & e & y & 0 \\ a & b & c & d & e & z \end{bmatrix}$

D.201 (MAPOFEI-75) Desenvolver o determinante abaixo, pelos elementos da 2ª coluna.

$$D = \begin{vmatrix} 0 & a & 1 & 0 \\ 1 & b & -1 & 1 \\ 2 & c & 0 & -1 \\ 0 & d & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

D.202 (MAPOFEI-76) Calcular o valor do determinante $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

VI. PROPRIEDADES DOS DETERMINANTES

A definição de determinante e o teorema de Laplace permitem-nos o cálculo de qualquer determinante, contudo, é possível simplificar o cálculo com o emprego de certas propriedades. Vejamos quais são elas.

69. (P_1) Matriz transposta

Se M é a matriz de ordem n e M^t sua transposta, então $\det M^t = \det M$.

Demonstração

Vamos usar o princípio da indução finita.

1ª Parte

Para n = 1, a propriedade é imediata.

2ª Parte

Suponhamos a propriedade válida para matrizes de ordem (n − 1) e provemos que ela também será válida para determinantes de ordem n. Temos:

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad M^t = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

onde $b_{ij} = a_{ji} \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ e $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

$\det M = a_{11} \cdot A_{11} + a_{21} \cdot A_{21} + a_{31} \cdot A_{31} + \dots + a_{n1} \cdot A_{n1}$ (pela 1ª coluna)

$\det M^t = b_{11} \cdot A'_{11} + b_{12} \cdot A'_{12} + b_{13} \cdot A'_{13} + \dots + b_{1n} \cdot A'_{1n}$ (pela 1ª linha)

Mas, por definição de matriz transposta, temos:

$$a_{11} = b_{11},\ a_{21} = b_{12},\ a_{31} = b_{13},\ \dots,\ a_{n1} = b_{1n}$$

e pela hipotese da indução, temos:

$$A_{11} = A'_{11},\ A_{21} = A'_{12},\ A_{31} = A'_{13},\ \dots,\ A_{n1} = A'_{1n}.$$

Logo $\det M^t = \det M$.

Portanto, a propriedade é válida para matrizes de ordem n, $\forall n \geqslant 1$.

Exemplos

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 9$$

A importância dessa propriedade reside no fato de que toda propriedade válida para as linhas de uma matriz também é válida para as colunas e vice-versa.

✱ 70. (P_2) Fila nula

Se os elementos de uma fila qualquer (linha ou coluna) de uma matriz M de ordem n forem todos nulos, então det M = 0.

Demonstração

Suponhamos que a j'ésima coluna de M tenha todos os elementos nulos, isto é

$$a_{1j} = a_{2j} = a_{3j} = \ldots = a_{nj} = 0$$

Desenvolvendo o determinante por esta fila, temos:

$$\det M = 0 \cdot A_{1j} + 0 \cdot A_{2j} + \ldots + 0 \cdot A_{nj} = 0$$

Exemplos

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 5 & x & 0 \\ 3 & 7 & y & 0 \\ 4 & -2 & z & 0 \\ 2 & 3 & t & 0 \end{vmatrix} = 0$$

✱ 71. (P_3) Multiplicação de uma fila por uma constante

Se multiplicarmos uma fila qualquer de uma matriz M de ordem n por um número K, o determinante da nova matriz M' obtida será o produto de K pelo determinante de M, isto é det M' = K · det M.

Demonstração

Seja

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \boxed{a_{i1}} & \boxed{a_{i2}} & \boxed{\ldots} & \boxed{a_{in}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \boxed{K \cdot a_{i1}} & \boxed{Ka_{i2}} & \boxed{\ldots} & \boxed{K \cdot a_{in}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Notemos que os cofatores dos elementos da i-ésima linha de M são os mesmos que os da i-ésima linha de M'.

Desenvolvendo det M e det M' pela i-ésima linha temos:

$$\det M = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \ldots + a_{in} \cdot A_{in} \quad \text{(I)}$$
$$\det M' = K \cdot a_{i1} \cdot A_{i1} + K \cdot a_{i2} \cdot A_{i2} + \ldots + K \cdot a_{in} \cdot A_{in} \quad \text{(II)}$$

de (I) e (II) concluímos que det M' = K · det M.

A demonstração seria análoga se tomássemos uma coluna de M.

Exemplos

1º) $$\begin{vmatrix} 7 & 14 & 49 \\ 3 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

2º) $$\begin{vmatrix} 5 & 7 & 2 \\ 10 & 28 & 8 \\ 15 & 7 & 16 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 2 & 28 & 8 \\ 3 & 7 & 16 \end{vmatrix} =$$

$$= 5 \cdot 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 1 & 16 \end{vmatrix} = 5 \cdot 7 \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 5 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 140 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 8 \end{vmatrix}$$

3º)

$$K \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boxed{K \quad 2K \quad 3K} \\ 4 \quad 5 \quad 6 \\ 7 \quad 8 \quad 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \boxed{3K} \\ 4 & 5 & \boxed{6K} \\ 7 & 8 & \boxed{5K} \end{vmatrix}$$

4º) Se A é matriz de ordem n, então

$\det(\alpha \cdot A) = \alpha^n \cdot \det A$.

72. (P_4) Troca de filas paralelas

Seja M uma matriz de ordem $n \geqslant 2$. Se trocarmos de posição duas filas paralelas (duas linhas ou duas colunas) obteremos uma nova matriz M' tal que det M' = -det M.

Demonstração

Vamos usar o princípio da indução finita.

1ª Parte

Provemos que a propriedade vale para n = 2

Seja $M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $\det M = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

Trocando de posição as linhas, obtemos:

$$M' = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix} \Longrightarrow \det M' = a_{21} \cdot a_{12} - a_{11} \cdot a_{22} = -\det M.$$

Trocando de posição as colunas, obtemos:

$$M' = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{bmatrix} \Longrightarrow \det M' = a_{12} \cdot a_{21} - a_{11} \cdot a_{22} = -\det M.$$

2ª Parte

Admitamos que a propriedade seja válida para matrizes de ordem (n - 1) e provemos que ela também será válida para matrizes de ordem n.

Tomemos a linha i, admitindo que ela não seja nenhuma das duas que tenham sido trocadas de lugar. Desenvolvendo det M e det M' por esta linha, temos:

$$\det M = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij} \quad \text{e} \quad \det M' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A'_{ij}.$$

Como cada cofator A'_{ij} é obtido de A_{ij} trocando de posição duas linhas e, por hipótese de indução, $D'_{ij} = -D_{ij}, \forall j \in \{1, 2, ..., n\}$, segue que, $A'_{ij} = -A_{ij}$, $\forall j \in \{1, 2, ..., n\}$ e, portanto, det M' = -det M.

A demonstração seria análoga se trocássemos de posição duas colunas.

Exemplos

1º) $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = -22$, $\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 22$

2º) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -37$, $\begin{vmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 37$.

73. (P_5) Filas paralelas iguais

Se uma matriz M de ordem $n \geqslant 2$ tem duas filas paralelas (duas linhas ou duas colunas) formadas por elementos respectivamente iguais, então det M = 0.

Demonstração

Suponhamos que as linhas de índices i e k sejam formadas por elementos respectivamente iguais, isto é, $a_{ij} = a_{kj}, \forall j \in \{1, 2, ..., n\}$.

De acordo com a propriedade P_4, se trocarmos de posição estas duas linhas, obteremos uma nova matriz M' tal que det M' = -det M (I).

Por outro lado, M = M' (pois as filas paralelas trocadas são iguais). Logo det M' = det M (II).

De (I) e (II) concluímos que

$$\det M = -\det M \Longrightarrow 2 \det M = 0 \Longrightarrow \det M = 0.$$

Analogamente se demonstra para o caso de duas colunas iguais.

Exemplos

$$\begin{vmatrix} \boxed{a \quad b \quad c} \\ 1 \quad 4 \quad 7 \\ \boxed{a \quad b \quad c} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix}3\\1\\7\end{matrix}} & \begin{matrix}2\\8\\2\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}3\\1\\7\end{matrix}} \end{vmatrix} = 0.$$

74. (P_6) Teorema de Cauchy

A soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer de uma matriz M, ordenadamente, pelos cofatores dos elementos de uma fila paralela, é igual a zero.

Demonstração

Seja

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Substituindo em M a s'ésima linha pela r'ésima, obteremos a matriz

$$M' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \rightarrow \text{linha } s \\ \\ \\ \end{matrix}$$

Pela P_5, det $M' = 0$.

Desenvolvendo det M' pela s'ésima linha,

$$\det M' = a_{r1} \cdot A_{s1} + a_{r2} \cdot A_{s2} + \dots + a_{rn} \cdot A_{sn} = 0.$$

Observemos que os cofatores dos elementos da s'ésima linha de M, são os mesmos que os da s'ésima linha de M'.

A demonstração é análoga se tomarmos em M duas colunas.

Exemplo

$$M = \begin{bmatrix} \boxed{3 \quad 4 \quad 2} \\ 1 \quad 3 \quad 5 \\ \boxed{5 \quad 6 \quad 7} \end{bmatrix}$$

1ª linha $\boxed{3 \quad 4 \quad 2}$ 3ª linha $\boxed{5 \quad 6 \quad 7}$

$a_{11} \; a_{12} \; a_{13}$ → elementos $A_{31} \; A_{32} \; A_{33}$ → cofatores

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 14, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -13 \quad \text{e} \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5$$

$$a_{11} \cdot A_{31} + a_{12} \cdot A_{32} + a_{13} \cdot A_{33} = 3 \cdot 14 + 4 \cdot (-13) + 2 \cdot 5 = 0$$

75. (P_7) Filas paralelas proporcionais

Se uma matriz M de ordem $n \geqslant 2$ tem duas filas paralelas (duas linhas ou duas colunas) formadas por elementos respectivamente proporcionais então det $M = 0$.

Demonstração

Suponhamos que as linhas de índices i e p de M sejam formadas por elementos proporcionais, isto é

$$a_{ij} = K \cdot a_{pj} \qquad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Então

$$\begin{array}{l} \\ \\ \\ \text{linha } i \\ \det M = \\ \text{linha } p \\ \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K\cdot a_{p1} & K\cdot a_{p2} & \dots & K\cdot a_{pn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{P_3}{=} K \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{P_5}{=} 0$$

A demonstração seria análoga se tivéssemos duas colunas proporcionais.

Exemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 2x & x \\ 2 & 2y & y \\ 3 & 2z & z \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(2ª e 3ª colunas proporcionais).}$$

EXERCÍCIOS

D.203 Calcular os determinantes, utilizando as propriedades anteriores:

a) $\begin{vmatrix} ax & 2a & a^2 \\ x & 4 & 1 \\ 3x & 6 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} x^2 & xy^2 & x \\ xy & y^3 & y \\ x^2 & y^2 & x \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 6 & 11 \\ -2 & 14 & 9 & 22 \\ 4 & 21 & 15 & 55 \\ 6 & 49 & 30 & 121 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 & 4 & 7 \\ 2 & 13 & 0 & 19 & 17 \\ 9 & 27 & 0 & 25 & 35 \\ 16 & 51 & 0 & 42 & 47 \\ 21 & 73 & 0 & 54 & 49 \end{vmatrix}$

D.204 Provar que os determinantes abaixo são múltiplos de 12, sem desenvolvê-los.

$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 12 & 11 \\ 5 & 24 & 13 \\ 7 & 36 & 17 \end{vmatrix}$ $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 11 \\ 4 & 8 & 12 & 8 \\ 10 & 5 & 9 & 13 \\ 14 & 7 & -3 & 15 \end{vmatrix}$ $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 3 & 11 & 15 \\ 5 & 13 & 25 \end{vmatrix}$

D.205 Sem desenvolver, dizer porque o valor dos determinantes abaixo é zero.

a) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 & 9 \\ 12 & 11 & 15 & 27 \\ 20 & 12 & 25 & 51 \\ 28 & 23 & 35 & 64 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a & ab & a & a^2b \\ b & bc & b & c \\ c & cd & c & b \\ d & ad & d & d \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} x & xy & x^2y \\ y & yz & xyz \\ z & xz & x^2z \end{vmatrix}$

D.206 Sem desenvolver nenhum dos determinantes, provar que $D' = 8 \cdot D$, sabendo que:

$D = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 & x^4 \\ y & y^2 & y^3 & y^4 \\ z & z^2 & z^3 & z^4 \\ t & t^2 & t^3 & t^4 \end{vmatrix}$ $D' = \begin{vmatrix} 8x & -2x^2 & 2x^3 & -2x^4 \\ 4y & -y^2 & y^3 & -y^4 \\ 4z & -z^2 & z^3 & -z^4 \\ 4t & -t^2 & t^3 & -t^4 \end{vmatrix}$

D.207 Sem desenvolver provar que: $\begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ac & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$

Solução

Multiplicamos a 1ª linha por **a**, a 2ª por **b** e a 3ª por **c**

$$\begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ac & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} abc & a^2 & a^3 \\ abc & b^2 & b^3 \\ abc & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \frac{abc}{abc} \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

D.208 Sem desenvolver provar que: $\begin{vmatrix} zy & x & 1 \\ xz & y & 1 \\ xy & z & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x^2 & x \\ 1 & y^2 & y \\ 1 & z^2 & z \end{vmatrix}$

76. (P_8) Adição de determinantes

Seja M uma matriz de ordem n, onde os elementos da j'ésima coluna são tais que:

$$\begin{array}{l} a_{1j} = b_{1j} + c_{1j} \\ a_{2j} = b_{2j} + c_{2j} \\ a_{3j} = b_{3j} + c_{3j} \\ \\ a_{nj} = b_{nj} + c_{nj} \end{array} \quad \text{isto é} \quad M = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & (b_{1j} + c_{1j}) & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & (b_{2j} + c_{2j}) & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & (b_{3j} + c_{3j}) & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & (b_{nj} + c_{nj}) & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \\ \uparrow \\ \text{coluna } j \end{array}$$

então, teremos:

$$\det M = \det M' + \det M''$$

onde M' é a matriz que se obtém de M, substituindo-se os elementos a_{ij} da j'ésima coluna, pelos elementos b_{ij} $(1 \leqslant i \leqslant n)$ e M'' é a matriz que se obtém de M, substituindo-se os elementos a_{ij} da j'ésima coluna pelos elementos c_{ij} $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

Isto é:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (b_{1j}+c_{1j}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (b_{2j}+c_{2j}) & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (b_{nj}+c_{nj}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & c_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & c_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & c_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Demonstração

Notemos que os cofatores dos elementos da j'ésima coluna de M são os mesmos que os da j'ésima coluna de M' e M''.

Desenvolvendo o determinante de M, pela j'ésima coluna, temos:

$$\det M = (b_{1j} + c_{1j})A_{1j} + (b_{2j} + c_{2j})A_{2j} + \ldots + (b_{nj} + c_{nj})A_{nj}$$
$$\det M = \underbrace{(b_{1j}A_{1j} + b_{2j}A_{2j} + \ldots + b_{nj}A_{nj})}_{\det M'} + \underbrace{(c_{1j}A_{1j} + c_{2j}A_{2j} + \ldots + c_{nj}A_{nj})}_{\det M''}$$
$$\det M = \det M' + \det M''.$$

77. Observação

A propriedade é válida também se tivermos uma *linha* cujos elementos se decompõem em soma.

Exemplos

1) $\begin{vmatrix} x & a+b & m \\ y & c+d & n \\ z & e+f & p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & a & m \\ y & c & n \\ z & e & p \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & b & m \\ y & d & n \\ z & f & p \end{vmatrix}$

2) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ x+y & a+b & m+p \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ x & a & m \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ y & b & p \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

78. Combinação linear de filas paralelas

Seja $M = [a_{ij}]$ uma matriz de ordem n e sejam p quaisquer de suas colunas (ou linhas) de índices $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_p$. Multipliquemos, respectivamente, estas p colunas pelos números $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_p$ e construamos as somas:

$$\begin{cases} \alpha_1 = c_1 \cdot a_{1s_1} + c_2 \cdot a_{1s_2} + \ldots + c_p \cdot a_{1s_p} \\ \alpha_2 = c_1 \cdot a_{2s_1} + c_2 \cdot a_{2s_2} + \ldots + c_p \cdot a_{2s_p} \\ \alpha_3 = c_1 \cdot a_{3s_1} + c_2 \cdot a_{3s_2} + \ldots + c_p \cdot a_{3s_p} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_n = c_1 \cdot a_{ns_1} + c_2 \cdot a_{ns_2} + \ldots + c_p \cdot a_{ns_p} \end{cases}$$

Diremos que o conjunto $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ é uma *combinação linear* das p colunas.

Se substituirmos a coluna de índice q, diferente das p colunas consideradas, pelos números:

$$a_{1q} + \alpha_1, \quad a_{2q} + \alpha_2, \quad a_{3q} + \alpha_3, \quad \ldots, \quad a_{nq} + \alpha_n$$

diremos que se adicionou à coluna de índice q uma *combinação linear* das outras colunas.

Exemplo

Vamos construir uma combinação linear da 2ª e 3ª colunas da matriz:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 2 & 8 & 5 \\ 3 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

usando os multiplicadores 3 e 4 respectivamente:

$$\begin{array}{l} 3 \cdot 7 + 4 \cdot 1 = 25 \\ 3 \cdot 8 + 4 \cdot 5 = 44 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 6 = 27 \\ \quad\uparrow \qquad\quad \uparrow \qquad \uparrow \\ \text{2ª coluna} \quad \text{3ª coluna} \quad \text{combinação linear} \end{array}$$

Vamos somar esta combinação linear à 1ª coluna; obteremos a matriz:

$$M' = \begin{bmatrix} \mathbf{26} & 7 & 1 \\ 46 & 8 & 5 \\ 30 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

De forma análoga, definimos *combinação linear* de **p** linhas e adição dessa combinação linear a uma outra linha diferente das consideradas.

79. (P_9) Teorema da combinação linear

Se uma matriz quadrada $M = [a_{ij}]$, de ordem n, tem uma linha (ou coluna) **que é combinação linear de outras linhas (ou colunas), então det M = 0.**

Demonstração

Suponhamos que a q? coluna seja combinação linear de **p** outras colunas, de índices $s_1, s_2, s_3, ..., s_p$.

Desenvolvendo o determinante de M pela q? coluna, temos:

$$\det M = \sum_{i=1}^{n} a_{iq} \cdot A_{iq} = \sum_{i=1}^{n} [c_1 \cdot a_{is_1} + c_2 \cdot a_{is_2} + ... + c_p \cdot a_{is_p}] \cdot A_{iq} \overset{P_8}{=}$$

$$= c_1 \sum_{i=1}^{n} a_{is_1} \cdot A_{iq} + c_2 \sum_{i=1}^{n} a_{is_2} \cdot A_{iq} + ... + c_p \sum_{i=1}^{n} a_{is_p} \cdot A_{iq} \overset{P_6}{=}$$

$$= c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 + ... + c_p \cdot 0 = 0.$$

Exemplos

São nulos os determinantes

1º) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & \boxed{5} \\ 4 & -1 & \boxed{3} \\ 5 & 4 & \boxed{9} \end{vmatrix}$ pois 3ª coluna = 1 X 1ª coluna + 1 X 2ª coluna.

2º) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ \boxed{7} & \boxed{12} & \boxed{23} \end{vmatrix}$ pois 3ª linha = 2 X 1ª linha + 3 X 2ª linha.

80. (P_{10}) Teorema de Jacobi

Adicionando-se a uma fila de uma matriz M, de ordem n, uma outra fila paralela, previamente multiplicada por uma constante, obteremos uma nova matriz M', tal que det M' = det M.

Demonstração

Seja

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3p} & \cdots & a_{3j} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

K

Adicionemos à j'ésima coluna à p'ésima multiplicada pela constante K. Obtemos a matriz:

$$M' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} & \cdots & (a_{1j} + K \cdot a_{1p}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} & \cdots & (a_{2j} + K \cdot a_{2p}) & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3p} & \cdots & (a_{3j} + K \cdot a_{3p}) & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} & \cdots & (a_{nj} + K \cdot a_{np}) & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

De acordo com P_8, temos:

$$\det M' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3p} & \cdots & a_{3j} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+ \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} & \cdots & Ka_{1p} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} & \cdots & Ka_{2p} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3p} & \cdots & Ka_{3p} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} & \cdots & Ka_{np} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{0 \quad (P_7)} = \textbf{det M}$$

Exemplos

1º) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 7 \\ 4 & 1 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 4 & -10 & 7 \\ 4 & -11 & -6 \end{vmatrix}$

Adicionamos à 2ª coluna, a 1ª multiplicada por (-3).

2º) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -8 & -4 & -5 \\ 2 & -3 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

-2

-3

-4

Adicionamos à 2ª coluna, a 1ª multiplicada por (-2).
Adicionamos à 3ª coluna, a 1ª multiplicada por (-3).
Adicionamos à 4ª coluna, a 1ª multiplicada por (-4).

81. Observação

A importância desta propriedade, reside no fato de que podemos "introduzir zeros" numa fila de uma matriz, sem alterar seu determinante; com isto, podemos facilitar bastante seu cálculo através do teorema de Laplace.

EXERCÍCIOS

D.209 (IE-ITAJUBÁ-65) Completar o que falta

$$\begin{vmatrix} a+b+c & 1 & 2 \\ a-b+c & 3 & 4 \\ a-b-c & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{vmatrix}$$

D.210 (IME-65) Calcular o valor de

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

D.211 Demonstrar a identidade:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b+2c & c \\ x & y+2z & z \\ m & n+2p & p \end{vmatrix}$$

D.212 (FAM-64-MACK-68) Quais as condições necessárias e suficientes para que um determinante se anule?

D.213 (FEI-64) Verificar a identidade seguinte, aplicando as propriedades dos determinantes:

$$\begin{vmatrix} \cos 2a & \cos^2 a & \operatorname{sen}^2 a \\ \cos 2b & \cos^2 b & \operatorname{sen}^2 b \\ \cos 2c & \cos^2 c & \operatorname{sen}^2 c \end{vmatrix} = 0$$

D.214 Demonstrar sem desenvolver o determinante que:

$$\begin{vmatrix} a-b & m-n & x-y \\ b-c & n-p & y-z \\ c-a & p-m & z-x \end{vmatrix} = 0$$

D.215 (EESCUSP) Enunciar as propriedades que permitem escrever sucessivamente:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 10 \\ 7 & 15 & 16 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 5 & 8 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 12 & 3 & 5 \\ 20 & 5 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

D.216 Provar que o determinante é múltiplo de 17, sem desenvolvê-lo. Dado:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 1 & 8 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

Solução

Observemos que se os elementos de uma matriz são números inteiros, então o determinante da matriz também é número inteiro, portanto, provar que D é divisível por 17 é provar que: $D = 17 \cdot D'$

onde D' é o determinante de uma matriz de elementos inteiros. Temos, por exemplo

$$D = \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{10} \cdot \begin{vmatrix} 100 & 10 & 9 \\ 100 & 80 & 7 \\ 100 & 50 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{1\,000} \begin{vmatrix} 100 & 10 & 119 \\ 100 & 80 & 187 \\ 100 & 50 & 153 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 119 \\ 1 & 8 & 187 \\ 1 & 5 & 153 \end{vmatrix} = 17 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 1 & 8 & 11 \\ 1 & 5 & 9 \end{vmatrix}}_{D' \in \mathbb{Z}}$$

D.217 Provar que o determinante é mútiplo de 13, sem desenvolvê-lo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

D.218 Demonstrar que o determinante D é divisível por x + 3a sem desenvolvê-lo. Dado:

$$D = \begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix}$$

D.219 Provar que

$$\begin{vmatrix} a + x & b + x & c + x \\ a + y & b + y & c + y \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b - c)(c - a)(a - b)(x - y)$$

D.220 Demonstrar a identidade

$$\begin{vmatrix} a - b - c & 2a & 2a \\ 2b & b - c - a & 2b \\ 2c & 2c & c - a - b \end{vmatrix} = (a + b + c)^3$$

D.221 Mostrar que (a + b + c) é fator de:

$$\begin{vmatrix} (b + c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & (a + c)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a + b)^2 \end{vmatrix}$$

D.222 Sem desenvolver, demonstrar que:

$$\begin{vmatrix} \cos 0 & \cos a & \cos 2a \\ \cos a & \cos 2a & \cos 3a \\ \cos 2a & \cos 3a & \cos 4a \end{vmatrix} = 0$$

D.223 Mostrar que o determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} \cos (x + a) & \text{sen } (x + a) & 1 \\ \cos (x + b) & \text{sen } (x + b) & 1 \\ \cos (x + c) & \text{sen } (x + c) & 1 \end{bmatrix}$$

é independente de x.

D.224 Provar que:

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a + 2)^2 & (a + 4)^2 \\ (a + 2)^2 & (a + 4)^2 & (a + 6)^2 \\ (a + 4)^2 & (a + 6)^2 & (a + 8)^2 \end{vmatrix} = -2^9$$

82. (P_{11}) Matriz triangular

Chamamos *matriz triangular* aquela cujos elementos situados "de um mesmo lado" da diagonal principal são iguais a zero, isto é $M = (a_{ij})$ é triangular se

$$a_{ij} = 0 \quad \text{para } i < j$$

ou

$$a_{ij} = 0 \quad \text{para } i > j$$

O determinante de uma matriz triangular é o produto dos elementos da diagonal principal.

Demonstração

Consideremos a matriz triangular onde $a_{ij} = 0$ para $i < j$ (o caso $a_{ij} = 0$ para $i > j$ é análogo).

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Aplicando sucessivamente o teorema de Laplace, através da 1ª linha, é imediato que:

$$\det M = a_{11} \cdot a_{12} \cdot \dots \cdot a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} (a_{ii})$$

Exemplos

1º) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 \cdot 1 = 15$

2º) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 6 = 36$

83. **(P_{12}) Teorema de Binet**

Se A e B são matrizes quadradas de ordem n, então

$$\det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B).$$

Exemplos

Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ temos,

$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 13 \\ 6 & 29 \end{bmatrix}$, $\det(AB) = 58 - 78 = -20$

$$\left.\begin{array}{l} \det A = 4 - 6 = -2 \\ \det B = 10 - 0 = 10 \end{array}\right\} \Longrightarrow (\det A) \cdot (\det B) = -20 = \det(AB)$$

Conseqüência

Decorre do teorema que $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$.

De fato, se $\exists\, A^{-1}$, então:

$$A \cdot A^{-1} = I_n \Longrightarrow \det.(A \cdot A^{-1} = \det I_n \Longrightarrow \det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \det(A) \neq 0 \text{ e } \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

VII. ABAIXAMENTO DE ORDEM DE UM DETERMINANTE — REGRA DE CHIÓ

Como conseqüência do teorema de Jacobi (P_{10}), veremos agora um processo útil, bastante prático, para reduzirmos de uma unidade a ordem de um determinante de ordem $n \geqslant 2$, sem alterá-lo, e conseqüentemente facilitar seu cálculo.

Consideremos uma matriz M de ordem $n \geqslant 2$, tal que $a_{11} = 1$, isto é

$$M = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Adicionemos à 2ª coluna, a 1ª multiplicada por $-a_{12}$.
Adicionemos à 3ª coluna, a 1ª multiplicada por $-a_{13}$.
. . . .
Adicionemos à j'ésima coluna, a 1ª multiplicada por $-a_{1j}$.
. . . .
Adicionemos à n'ésima coluna, a 1ª multiplicada por $-a_{1n}$.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & -a_{12} & -a_{13} & \dots & -a_{1n} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \end{array}$$

Obteremos a matriz M', tal que $\det M' = \det M$

$$\det M' = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} & a_{23} - a_{21} \cdot a_{13} & \dots & a_{2n} - a_{21} \cdot a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} - a_{31} \cdot a_{12} & a_{33} - a_{31} \cdot a_{13} & \dots & a_{3n} - a_{31} \cdot a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} - a_{n1} \cdot a_{12} & a_{n3} - a_{n1} \cdot a_{13} & \dots & a_{nn} - a_{n1} \cdot a_{1n} \end{vmatrix}$$

Pelo teorema de Laplace, temos:

$$\det M' = \begin{vmatrix} a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} & a_{23} - a_{21} \cdot a_{13} & \dots & a_{2n} - a_{21} \cdot a_{1n} \\ a_{32} - a_{31} \cdot a_{12} & a_{33} - a_{31} \cdot a_{13} & \dots & a_{3n} - a_{31} \cdot a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} - a_{n1} \cdot a_{12} & a_{n3} - a_{n1} \cdot a_{13} & \dots & a_{nn} - a_{n1} \cdot a_{1n} \end{vmatrix}$$

onde det M' é de ordem (n - 1).

Isto pode ser resumido através da regra, conhecida como *regra de Chió:*

1º) Desde que M tenha $a_{11} = 1$, suprimimos a 1ª linha e 1ª coluna de M.

2º) De cada elemento restante na matriz, subtraímos o produto dos elementos que se encontram nas "extremidades das perpendiculares" traçadas do elemento considerado, à 1ª linha e 1ª coluna.

3º) Com as diferenças obtidas, construímos uma matriz de ordem (n − 1) cujo determinante é igual ao de M.

Exemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 5 & 6 \\ 1 & 10 & -4 & 5 \\ 3 & 8 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7-6 & 5-12 & 6-6 \\ 10-2 & -4-4 & 5-2 \\ 8-6 & 2-12 & 3-6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -7 & 0 \\ 8 & -8 & 3 \\ 2 & -10 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -8+56 & 3-0 \\ -10+14 & -3-0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 48 & 3 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -144 - 12 = -156.$$

84. Observações

1) Se na matriz M, $a_{11} \neq 1$ e existir algum outro elemento igual a 1, podemos através de troca de filas paralelas, transformar M numa outra matriz que tenha $a_{11} = 1$.

Exemplo

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 7 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 7 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

2) Se não existir em M nenhum elemento igual a 1, podemos, usando o teorema de Jacobi, obter uma nova matriz M', que tenha um elemento igual a 1.

Exemplo

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 & 3 \\ 5 & 7 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ -2 & 7 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

(-1)

EXERCÍCIOS

D.225 Calcular os determinantes

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 7 \end{vmatrix}$

D.226 Calcular os determinantes, com o auxílio da regra de Chió.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ yz & xz & xy \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$

D.227 Provar que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & r & r^2 & r^3 \\ 1 & r^2 & r^3 & r^4 \\ 1 & r^3 & r^4 & r^5 \end{vmatrix} = 0$$

D.228 Demonstrar que

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = a(b-a)(c-b)(d-c)$$

Solução

$$D = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 1 & b & b & b \\ 1 & b & c & c \\ 1 & b & c & d \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} b-a & b-a & b-a \\ b-a & c-a & c-a \\ b-a & c-a & d-a \end{vmatrix} =$$

$$= a(b-a) \cdot \begin{vmatrix} 1 & b-a & b-a \\ 1 & c-a & c-a \\ 1 & c-a & d-a \end{vmatrix} = a(b-a) \cdot \begin{vmatrix} (c-a)-(b-a) & (c-a)-(b-a) \\ (c-a)-(b-a) & (d-a)-(b-a) \end{vmatrix} =$$

$$= a \cdot (b-a) \cdot \begin{vmatrix} c-b & c-b \\ c-b & d-b \end{vmatrix} = a(b-a)(c-b) \begin{vmatrix} 1 & c-b \\ 1 & d-b \end{vmatrix} =$$

$$= a(b-a)(c-b)(d-c)$$

D.229 (ESQOC-67) Resolver a equação

$$\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} = 0$$

D.230 Sem desenvolver o determinante, calcular

$$\begin{vmatrix} x & y & z & t \\ -x & y & a & b \\ -x & -y & z & c \\ -x & -y & -z & t \end{vmatrix}$$

D.231 Demonstrar que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & . & 1 \\ 1 & 1+a_1 & 1 & . & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_2 & . & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & . & 1+a_n \end{vmatrix} = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$$

D.232 (EPUSP-62) Subsiste sempre a igualdade

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \operatorname{sen} x & \operatorname{sen} y & \operatorname{sen} z \\ \cos x & \cos y & \cos z \end{vmatrix} = \operatorname{sen}(x-y) + \operatorname{sen}(y-z) + \operatorname{sen}(z-x)?$$

D.233 Se a, b, c são reais mostrar que

$$\begin{vmatrix} 1 & \operatorname{sen} a & \cos.a \\ 1 & \operatorname{sen} b & \cos b \\ 1 & \operatorname{sen} c & \cos c \end{vmatrix} = 4 \cdot \operatorname{sen}\frac{b-c}{2} \cdot \operatorname{sen}\frac{a-c}{2} \cdot \operatorname{sen}\frac{a-b}{2}$$

D.234 Mostrar que

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos 2a & \operatorname{sen} a \\ 1 & \cos 2b & \operatorname{sen} b \\ 1 & \cos 2c & \operatorname{sen} c \end{vmatrix} = 2 \cdot (\operatorname{sen} b - \operatorname{sen} c)(\operatorname{sen} c - \operatorname{sen} a) \cdot (\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b)$$

D.235 Sendo S_n a soma dos n primeiros números naturais, demonstrar que:

$$\begin{vmatrix} S_1 & S_1 & S_1 & \ldots & S_1 & S_1 \\ S_1 & S_2 & S_2 & \ldots & S_2 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 & \ldots & S_3 & S_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ S_1 & S_2 & S_3 & \ldots & S_{n-1} & S_{n-1} \\ S_1 & S_2 & S_3 & \ldots & S_{n-1} & S_n \end{vmatrix} = n!$$

VIII. MATRIZ DE VANDERMONDE (OU DAS POTÊNCIAS)

85. Definição

Chamamos *matriz de Vandermonde,* ou das potências, toda matriz de ordem $n \geqslant 2$, do tipo.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \ldots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \ldots & a_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

Isto é, as colunas de M são formadas por potências de mesma base, com expoente inteiro, variando desde 0 até $n-1$ (os elementos de cada coluna formam uma progressão geométrica cujo primeiro elemento é 1).

Os elementos da *2ª linha* são chamados ***elementos característicos*** da matriz.

Indiquemos o determinante de uma matriz de Vandermonde por

$$V(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$$

86. Propriedade

"O determinante $V(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ é igual ao produto de todas as diferenças possíveis entre os elementos característicos, com a condição de que, nas diferenças, o minuendo tenha índice maior que o subtraendo. Isto é

$$V(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) = (a_2 - a_1) \ldots (a_n - 1)\ (a_3 - a_2) \ldots (a_n - a_2) \ldots (a_n - a_{n-1}) =$$

$$= \prod_{i > j} (a_i - a_j) \qquad i \in \{1, 2, \ldots, n\} \quad j \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

Demonstração

Vamos usar o princípio da indução finita.

1ª Parte

Provemos que a propriedade é válida para $n = 2$.

Temos $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \det M = a_2 - a_1 \Longrightarrow V(a_1, a_2) = a_2 - a_1.$

Portanto a propriedade é válida para $n = 2$.

2ª Parte

Suponhamos a propriedade válida para matrizes de ordem $(n - 1)$ e provemos sua validade para matrizes de ordem n.

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} \begin{matrix} (-a_1) \\ (-a_1) \\ (-a_1) \\ \vdots \\ (-a_1) \\ (-a_1) \end{matrix}$$

sentido das operações

Adicionemos à linha de índice n, a de índice $n - 1$ multiplicada por $-a_1$.
Adicionemos à linha de índice $n - 1$, a de índice $n - 2$ multiplicada por $-a_1$.

....

....

Adicionemos à linha de índice 3, a de índice 2 multiplicada por $-a_1$.
Adicionemos à linha de índice 2, a de índice 1 multiplicada por $-a_1$.

Obteremos o determinante equivalente

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2(a_2 - a_1) & a_3(a_3 - a_1) & \dots & a_n(a_n - a_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_2^{n-2}(a_2 - a_1) & a_3^{n-2}(a_3 - a_1) & \dots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix}$$

Pelo teorema de Laplace e por (P_3) temos:

$$V = (a_2 - a_1) \cdot (a_3 - a_1) \cdot \ldots \cdot (a_n - a_1) \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \dots & 1 \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}}_{V'}$$

$$V = (a_2 - a_1) \cdot (a_3 - a_1) \cdot (a_4 - a_1) \cdot \ldots \cdot (a_n - a_1) \cdot V'$$

Mas V' é um determinante de Vandermonde de ordem $n - 1$, logo, por hipótese de indução

$$V' = \prod_{i>j} (a_i - a_j) \qquad \begin{matrix} i \in \{2, 3, \dots, n\} \\ j \in \{2, 3, \dots, n\} \end{matrix}$$

Portanto $\quad V = \prod_{i>j} (a_i - a_j) \qquad \begin{matrix} i \in \{1, 2, \dots, n\} \\ j \in \{1, 2, \dots, n\} \end{matrix}$

E, assim, a propriedade é válida para matrizes de ordem n, $\forall\ n \geqslant 2$.

87. Exemplos

1º) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} = (4 - 3) \cdot (4 - 2) \cdot (3 - 2) = 2 \qquad \boxed{2 \quad 3 \quad 4}$

2º) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & 9 & 25 \\ 8 & 1 & -27 & 125 \end{vmatrix} = 8 \cdot 4 \cdot 3 \cdot (-4) \cdot (-5) \cdot (-1) = -1920.$

$\boxed{2 \quad 1 \quad -3 \quad 5}$

EXERCÍCIOS

D.236 Calcular os determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 25 & 49 \\ 8 & 27 & 125 & 343 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -3 & 6 & 12 \\ -1 & 3 & 5 \\ -1 & 9 & 25 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & a^2 \\ a^2 & b^2 & a^4 \end{vmatrix}$

D.237 Calcular o determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d & e \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 & e^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 & e^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 & e^4 \end{vmatrix}$$

D.238 Calcular o determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & t & t^2 & t^3 \end{vmatrix}$$

D.239 (EPUSP-57) Dado o polinômio

$$P(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & 2 & 3 \\ x^2 & 1 & 4 & 9 \\ x^3 & 1 & 8 & 27 \end{vmatrix}$$ dizer quais são as raízes de $P(x)$.

D.240 (EE LINS-66) Calcular o determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 & 6 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 1 & 5^2 & 6^2 \\ 2^3 & 3^3 & 4^3 & 1 & 5^3 & 6^3 \\ 2^4 & 3^4 & 4^4 & 1 & 5^4 & 6^4 \\ 2^5 & 3^5 & 4^5 & 1 & 5^5 & 6^5 \end{vmatrix}$$

D.241 (IME-66) Determinar o valor numérico do determinante abaixo

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \log 7 & \log 70 & \log 700 & \log 7000 \\ (\log 7)^2 & (\log 70)^2 & (\log 700)^2 & (\log 7000)^2 \\ (\log 7)^3 & (\log 70)^3 & (\log 700)^3 & (\log 7000)^3 \end{vmatrix}$$

D.242 Resolver a equação

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & x & -5 \\ 1 & 4 & x^2 & 25 \\ 1 & 8 & x^3 & -125 \end{vmatrix} = 0$$

EXERCÍCIOS SUPLEMENTARES

D.243 (EPUSP-61) Supondo positivos todos os elementos literais da matriz quadrada

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e sendo **n** múltiplo de **4**, qual é o sinal do determinante correspondente?

D.244 Demonstrar que se os elementos de uma matriz quadrada M, são números inteiros, então o determinante de M é um número inteiro.

D.245 Calcular o determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & \binom{p}{1} & \binom{p+1}{2} & \binom{p+2}{3} \\ 1 & \binom{p+1}{1} & \binom{p+2}{2} & \binom{p+3}{3} \\ 1 & \binom{p+2}{1} & \binom{p+3}{2} & \binom{p+4}{3} \\ 1 & \binom{p+3}{1} & \binom{p+4}{2} & \binom{p+5}{3} \end{vmatrix}$$

Sugestão: Relação de Stifel.

D.246 Demonstrar a identidade

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \\ c & d & a & b \\ d & a & b & c \end{vmatrix} = -(a+b+c+d)\,(a-b+c-d)\left[(a-c)^2 + (b-d)^2\right]$$

D.247 Demonstrar que num determinante de uma matriz simétrica, os complementos algébricos de dois elementos situados simetricamente em relação a diagonal principal são iguais.

D.248 Em uma matriz quadrada de ordem $n \geqslant 3$, os elementos de cada linha estão em P.G.. Mostrar que o determinante de M se anula, quando e somente quando, duas progressões têm a mesma razão.

D.249 Mostrar que

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix} = -2(n-2)!$$

D.250 Provar que

$$\begin{vmatrix} \text{cotg}\,\dfrac{A}{2} & \text{cotg}\,\dfrac{B}{2} & \text{cotg}\,\dfrac{C}{2} \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

sendo A, B, C, ângulos de um triângulo e **a**, **b**, **c** os lados respectivamente, opostos aos mesmos ângulos.

D.251 (FEIUC-58) Quantos termos se obtém no desenvolvimento do determinante de uma matriz quadrada de 6 filas?

D.252 (ESAN-PUC-64) Determinar o valor de m que verifica a igualdade

$$\begin{vmatrix} A_{m,2} & A_{m,1} & A_{m,0} \\ C_{m,2} & m & 3! \\ m(m-1) & \dfrac{m!}{(m-1)!} & 0 \end{vmatrix} = -10\,m$$

D.253 Demonstrar que toda matriz anti-simétrica de ordem ímpar e elementos reais têm determinante nulo.

APÊNDICE I

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE LAPLACE

Vamos usar o princípio da indução finita.

1ª Parte

Provemos que o teorema é válido para matrizes de ordem 2

Desenvolvendo pela 2ª coluna: $M = \begin{bmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} \end{bmatrix}$

$$a_{12} \cdot A_{12} + a_{22} \cdot A_{22} = a_{12} \cdot (-1)\,|a_{21}| + a_{22} \cdot |a_{11}| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} = \det M.$$

Desenvolvendo pela 1ª linha: $M = \begin{bmatrix} \boxed{a_{11} \quad a_{12}} \\ a_{21} \quad a_{22} \end{bmatrix}$

$$a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} = a_{11} \cdot |a_{22}| + a_{12} \cdot (-1) \cdot |a_{21}| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} = \det M.$$

Desenvolvendo pela 2ª linha: $M = \begin{bmatrix} a_{11} \quad a_{12} \\ \boxed{a_{21} \quad a_{22}} \end{bmatrix}$

$$a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} = a_{21}(-1) \cdot |a_{12}| + a_{22} \cdot |a_{11}| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} = \det M.$$

Portanto, a propriedade é válida para $n = 2$.

2ª Parte

Admitamos que a propriedade seja válida para determinantes de ordem $(n-1)$ e provemos que ela também é válida para determinantes de ordem n.

Seja M uma matriz de ordem $n > 2$. Os menores complementares dos elementos de M serão determinantes de ordem $(n-1)$. Vamos usar o símbolo $D_{ij}^{k\ell}$ para designar o determinante da matriz que se obtém, suprimindo as linhas i e k e as colunas j e ℓ da matriz M. É claro que $D_{ij}^{k\ell}$ é um determinante de ordem $(n-2)$.

Fixemos a coluna k da matriz M $(1 < k \leqslant n)$ e calculemos o número

$$C = a_{1k} \cdot A_{1k} + a_{2k} \cdot A_{2k} + a_{3k} \cdot A_{3k} + \ldots + a_{nk} \cdot A_{nk}$$

Temos:

$$C = a_{1k} \cdot A_{1k} + a_{2k} \cdot A_{2k} + a_{3k} \cdot A_{3k} + \ldots + a_{nk} \cdot A_{nk} = a_{1k}\,(-1)^{1+k} \cdot D_{1k} + a_{2k} \cdot (-1)^{2+k} \cdot D_{2k} + a_{3k} \cdot (-1)^{3+k} \cdot D_{3k} + \ldots + a_{nk} \cdot (-1)^{n+k} \cdot D_{nk}$$

Os determinantes $D_{1k}, D_{2k}, \ldots, D_{nk}$ são de ordem $(n - 1)$. Desenvolvendo-os pela 1ª coluna, temos:

$$C = a_{1k}\,(-1)^{1+k} \left\{ \sum_{i>1} a_{i1}(-1)^i \cdot D^{i1}_{1k} \right\} + a_{2k}\,(-1)^{2+k} \left\{ a_{11} \cdot D^{11}_{2k} + \sum_{i>2} a_{i1}(-1)^i D^{i1}_{2k} \right\} + a_{3k}\,(-1)^{3+k} \left\{ a_{11} D^{11}_{3k} - a_{21} \cdot D^{21}_{3k} + \sum_{i>3} a_{i1}(-1)^i \cdot D^{i1}_{3k} \right\} + \ldots + a_{nk}\,(-1)^{n+k} \left\{ a_{11} \cdot D^{11}_{nk} - a_{21} D^{21}_{nk} + a_{31} \cdot D^{31}_{nk} - \ldots \pm a_{n-1,1} D^{n-1,1}_{nk} \right\}$$

Na expressão de C, acima,

1º) tomemos as parcelas que contêm a_{11}. Temos:

$$a_{11}\{a_{2k}(-1)^{2+k} \cdot D^{11}_{2k} + a_{3k}(-1)^{3+k} \cdot D^{11}_{3k} + \ldots + a_{nk}(-1)^{n+k} \cdot D^{11}_{nk}\} =$$
$$= a_{11}\{a_{2k} \cdot (-1)^k \cdot D^{11}_{2k} + a_{3k}(-1)^{k+1} \cdot D^{11}_{3k} + \ldots + a_{nk}(-1)^{n+k-2} \cdot D^{11}_{nk}\} =$$
$$= a_{11} \cdot D_{11} \text{ (por hipótese de indução)}$$

2º) tomemos as parcelas que contêm a_{21}. Temos:

$$a_{21}\{a_{1k}(-1)^{1+k} \cdot D^{21}_{1k} - a_{3k}(-1)^{3+k} \cdot D^{21}_{3k} - \ldots - a_{nk} \cdot (-1)^{n+k} \cdot D^{21}_{nk}\} =$$
$$= a_{21}\{-a_{1k}(-1)^k \cdot D^{21}_{1k} - a_{3k}(-1)^{1+k} \cdot D^{21}_{3k} - \ldots - a_{nk}(-1)^{n+k-2} D^{21}_{nk}\} =$$
$$= -a_{21} \cdot D_{21} \text{ (por hipótese de indução).}$$

3º) tomemos as parcelas que contêm a_{31}. Temos:

$$a_{31}\{-a_{1k}(-1)^{1+k} \cdot D^{31}_{1k} - a_{2k}(-1)^{2+k} \cdot D^{31}_{2k} + a_{4k}(-1)^{4+k} \cdot D^{31}_{4k} + \ldots + a_{nk}(-1)^{n+k} \cdot D^{31}_{nk}\} =$$
$$= a_{31}\{a_{1k}(-1)^k \cdot D^{31}_{1k} + a_{2k}(-1)^{k+1} \cdot D^{31}_{2k} + a_{4k}(-1)^{k+2} \cdot D^{31}_{4k} + \ldots + a_{nk}(-1)^{n+k-2} \cdot D^{31}_{nk}\} = a_{31} \cdot D_{31} \text{ (por hipótese de indução)}$$

Prosseguindo da mesma forma até obtermos as parcelas que contêm a_{n1}, teremos:

$$C = a_{11}D_{11} - a_{21}D_{21} + a_{31}D_{31} - \ldots \pm a_{n1}D_{n1}$$

isto é

$$C = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + \ldots + a_{n1}A_{n1}.$$

O que prova que $C = \det M$, isto é, a propriedade é válida para qualquer coluna k, $1 < k \leqslant n$.

Fixemos agora a 1ª linha de M, e calculemos o número

$$L = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + \ldots + a_{1n}A_{1n}$$

Temos:

$$L = a_{11}(-1)^{1+1} \cdot D_{11} + a_{12}(-1)^{1+2} \cdot D_{12} + a_{13}(-1)^{1+3} \cdot D_{13} + \ldots + a_{1n}(-1)^{1+n} \cdot D_{1n}.$$

Os determinantes $D_{11}, D_{12}, D_{13}, \ldots, D_{1n}$ são de ordem $(n - 1)$. Desenvolvendo-os pela 1ª coluna, temos:

$$L = a_{11} \cdot D_{11} - a_{12}\left\{\sum_{i>1} a_{i1}(-1)^i \cdot D^{i1}_{12}\right\} + a_{13}\left\{\sum_{i>1} a_{i1}(-1)^i \cdot D^{i1}_{13}\right\} + \ldots + (-1)^{1+n} \cdot a_{1n}\left\{\sum_{i>1} a_{i1}(-1)^i \cdot D^{i1}_{1n}\right\}$$

Na expressão de L, acima

1º) Tomemos as parcelas que contêm a_{21}. Temos:

$$a_{21}\{(-1)^{1+2} \cdot a_{12} \cdot D^{21}_{12} + (-1)^{1+3} \cdot a_{13} \cdot D^{21}_{13} + \ldots + (-1)^{1+n} \cdot a_{1n} \cdot D^{21}_{1n}\} =$$
$$= a_{21}\{-(-1)^2 \cdot a_{12} \cdot D^{21}_{12} - (-1)^3 \cdot a_{13} \cdot D^{21}_{13} - \ldots - (-1)^n \cdot a_{1n} \cdot D^{21}_{1n}\} =$$
$$= -a_{21} \cdot D_{21} \text{ (por hipótese de indução).}$$

2º) Tomando as parcelas que contêm a_{31}, temos:

$$a_{31}\{-a_{12} \cdot (-1)^3 \cdot D^{31}_{12} - a_{13} \cdot (-1)^4 \cdot D^{31}_{13} - \ldots - a_{1n} \cdot (-1)^{1+n} \cdot D^{31}_{1n}\} =$$
$$= a_{31}\{a_{12} \cdot (-1)^2 \cdot D^{31}_{12} + a_{13} \cdot (-1)^3 \cdot D^{31}_{13} + \ldots + a_{1n} \cdot (-1)^n \cdot D^{31}_{1n}\} =$$
$$= a_{31} \cdot D_{31} \text{ (por hipótese de indução).}$$

Prosseguindo da mesma forma, até obtermos as parcelas que contêm a_{n1}, teremos:

$$L = a_{11} \cdot D_{11} - a_{21} \cdot D_{21} + a_{31} \cdot D_{31} - \ldots \pm a_{n1} \cdot D_{n1}$$

isto é

$$L = a_{11} \cdot A_{11} + a_{21} \cdot A_{21} + a_{31} \cdot A_{31} + \ldots + a_{n1} \cdot A_{n1}$$

O que prova que $L = \det M$, isto é, a propriedade é válida para a 1ª linha.

Com raciocínio análogo ao que fizemos para as colunas, podemos provar que a propriedade é válida para a linha i $(1 < i \leqslant n)$, usando o fato de que ela é válida para a 1ª linha.

Com isto, concluímos que o teorema é válido para matrizes de ordem $n \geqslant 2$.

APÊNDICE II

CÁLCULO DA MATRIZ INVERSA ATRAVÉS DE DETERMINANTES

1. Matriz dos cofatores

Seja M, uma matriz quadrada de ordem n. Chamamos de *matriz dos cofatores de M,* e indicamos por M', a matriz que se obtém de M, substituindo cada elemento de M por seu cofator.

Assim, se

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{então}$$

$$M' = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2n} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \dots & A_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Exemplos

1º) Se $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ então $M' = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

pois $A_{11} = (-1)^2 \cdot |4| = 4$ $\qquad A_{12} = (-1)^3 \cdot |3| = -3$

$A_{21} = (-1)^3 \cdot |2| = -2$ $\qquad A_{22} = (-1)^4 \cdot |1| = 1$

2º) Se $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ então $M' = \begin{bmatrix} -3 & 9 & -1 \\ 2 & -6 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

pois $A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3;$ $\qquad A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 9$

$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2;$ $\qquad A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6$

$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2;$ $\qquad A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1$

$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1;$ $\qquad A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1$

$A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$

2. Matriz adjunta

Seja M uma matriz quadrada de ordem n e M' a matriz dos cofatores de M. Chamamos de *matriz adjunta de M,* e indicamos por $\overline{M}$, à transposta da matriz M', isto é $\overline{M} = (M')^t$.

Em resumo,

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad M' = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\overline{M} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{n1} & B_{n2} & \dots & B_{nn} \end{bmatrix} \qquad \text{onde } B_{ij} = A_{ji} \begin{cases} \forall\, i \in \{1, 2, \dots, n\} \\ \forall\, j \in \{1, 2, \dots, n\} \end{cases}$$

Nos exemplos dados no item anterior, temos:

1º) $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ então $\overline{M} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

2º) $M = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ então $\overline{M} = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 9 & -6 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

3. Teorema

"Se M é matriz quadrada de ordem n e I_n é matriz identidade de ordem n, então $M \cdot \overline{M} = \overline{M} \cdot M = \det(M) \cdot I_n$".

Demonstração

Seja $M \cdot \overline{M} = (b_{ik})$. Por definição de produto de matrizes,

$$b_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot B_{jk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{kj}$$

Logo, se $i = k \Longrightarrow b_{ik} = \det(M)$ (teorema de Laplace)
se $i \neq k \Longrightarrow b_{ik} = 0$ (teorema de Cauchy)

Logo, $M \cdot \overline{M}$ é a matriz diagonal

$$\begin{bmatrix} \det M & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det M & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \det M & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \det M \end{bmatrix} = \det M \cdot I_n$$

Portanto, $M \cdot \overline{M} = \det M \cdot I_n$ (I)

Analogamente, seja $\overline{M} \cdot M = (c_{ik})$. Por definição de produto de matrizes,

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} B_{ij} \cdot a_{jk} = \sum_{j=1}^{n} a_{jk} \cdot A_{ji}$$

Logo, se $i = k \Longrightarrow c_{ik} = \det(M)$ (teorema de Laplace)
se $i \neq k \Longrightarrow c_{ik} = 0$ (teorema de Cauchy)

Logo, $\overline{M} \cdot M$ é a matriz diagonal

$$\begin{bmatrix} \det M & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det M & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \det M & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \det M \end{bmatrix} = \det M \cdot I_n$$

Portanto, $\overline{M} \cdot M = \det(M) \cdot I_n$ (II)

De I e II concluímos então que:

$M \cdot \overline{M} = \overline{M} \cdot M = \det(M) \cdot I_n$

4. Processo de cálculo da inversa de uma matriz quadrada M

Teorema

"Se M é uma matriz quadrada de ordem n e $\det M \neq 0$, então a inversa de M é

$$\boxed{M^{-1} = \frac{1}{\det M} \cdot \overline{M}\ .}$$

Demonstração

Usando o teorema anterior, temos:

$$M \cdot \left(\frac{1}{\det M} \cdot \overline{M}\right) = \frac{1}{\det M} \cdot (M \cdot \overline{M}) = \frac{\det M}{\det M} \cdot I_n = I_n \qquad \text{(I)}$$

$$\left(\frac{1}{\det M} \cdot \overline{M}\right) M = \frac{1}{\det M} \cdot (\overline{M} \cdot M) = \frac{\det M}{\det M} \cdot I_n \qquad \text{(II)}$$

De (I) e (II) segue-se, por definição de matriz inversa, que

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \cdot \overline{M}.$$

Retomando os exemplos anteriores, temos:

1º) $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $\overline{M} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$, $\det M = -2$

Logo $M^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

2º) $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\overline{M} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 9 & -6 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\det M = -5$

Logo

$$M^{-1} = -\frac{1}{5} \begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 9 & -6 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{9}{5} & \frac{6}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Corolário

"Seja M uma matriz quadrada de ordem n. A inversa de M existe, se e somente se, $\det M \neq 0$".

Demonstração

a) Se $\det M \neq 0$, pelo teorema anterior vimos que existe a inversa, e

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \cdot \overline{M}$$

b) Se $\exists\, M^{-1}$ então $M \cdot M^{-1} = I_n$ e, pelo teorema de Binet, $(\det M)(\det M^{-1}) = \det I_n = 1 \neq 0$, portanto,

$$\det M \neq 0.$$

EXERCÍCIOS

D.254 Calcular, usando a teoria precedente, as inversas das seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -10 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \operatorname{sen} a & -\cos a \\ \cos a & \operatorname{sen} a \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

D.255 Para que valores reais de **m** existe a inversa da matriz

$$M = \begin{bmatrix} m & 5 \\ 5 & m \end{bmatrix} ?$$

Solução

A matriz M é inversível se, e somente se, $\det M \neq 0$. Assim, temos:

$$\det M = \begin{vmatrix} m & 5 \\ 5 & m \end{vmatrix} = m^2 - 25 \neq 0 \implies m \neq 5 \quad \text{e} \quad m \neq -5.$$

D.256 Qual a condição sobre a para que a matriz

$$M = \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{bmatrix} \text{ seja inversível?}$$

"Deus criou os números inteiros"

Leopold Kronecker nasceu na Alemanha, de pais judeus embora tenha optado pelo protestantismo.

Foi um homem de negócios muito próspero e que mantinha fortes ligações com professores da Universidade de Berlim, onde aceitou um posto em 1883.

Em contato com Weierstrass, Dirichlet, Jacobi e Steiner obteve seu doutoramento em 1845 com uma tese sobre teoria algébrica dos números.

De acordo com Weierstrass, aprovava a aritmetização universal da Análise mas defendia uma Aritmética finita, entrando em conflito com Cantor.

Insistia na idéia de que Aritmética e Análise deveriam basear-se nos números inteiros, os quais considerava como tendo sentido dado por Deus e rejeitava a construção dos números reais porque não poderia ser feita por processos finitos. Achava que os números irracionais não existiam, lutando pela sua extinção. Diz-se que perguntava a Lindemann para que servia sua prova de que π não é algébrico, já que os números irracionais não existiam.

Kronecker contribuiu significativamente para a Álgebra embora suas idéias na época, fossen consideradas metafísicas. Seu finitismo chegava a embaraçar Weierstrass mas foi a Cantor que atacou mais gravemente, opondo-se a que lhe dessem uma posição na Universidade de Berlim e, além disso, tentando derrotar e extinguir o ramo da Matemática que Cantor estava criando sobre a existência dos números transfinitos. Cantor defendeu-se num de seus artigos dizendo que numerações definidas podem ser feitas com conjuntos infinitos tão bem quanto com finitos, mas Kronecker continuava seus ataques e críticas. Este conflito entre Cantor e Kronecker é considerado como a mais forte controvérsia do século XIX.

Leopold Kronecker
(1823 — 1891)

Em 1881, com seu domínio de racionalidade, provou que o conjunto dos números da forma $a + b\sqrt{2}$ onde a e b são racionais, é um corpo.

Às vezes se diz que seu movimento sobre finitismo morreu de inanição mas reapareceria sob nova forma na obra de Poincaré e Brouwer.

CAPÍTULO VI

SISTEMAS LINEARES

I. INTRODUÇÃO

88. Equação linear

Chamamos de equação linear, nas incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_n$ toda equação do tipo $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b$

Os números $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1n}$, todos reais, são chamados *coeficientes* e b, também real é o *termo independente* da equação.

Exemplos

1º) $3x_1 + 4x_2 - 5x_3 - x_4 = 5$
2º) $2x_1 - x_2 - x_3 = 0$
3º) $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 4$
4º) $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0$

Observemos que *não são lineares* as equações:

1º) $2x_1^2 + 4x_2 + x_3 = 0$
2º) $2x_1x_2 + x_3 + x_4 = 3$
3º) $x_1 + \sqrt{x_2} - x_3 = 4$.

89. Solução de uma equação linear

Dizemos que a seqüência ou ênupla ordenada de números reais

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$$

é uma solução da equação linear

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b$$

se $a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3 + \dots + a_{1n}\alpha_n = b$ for uma sentença verdadeira.

Exemplos

1º) Seja a equação linear

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 3$$

a seqüência (1, 2, 3, −2) é solução, pois $2 \cdot (1) + 3 \cdot (2) - (3) + (-2) = 3$ é sentença verdadeira, porém a seqüência (1, 1, 2, 1) não é solução, pois $2 \cdot (1) + 3 \cdot (1) - (2) + (1) = 3$ é sentença falsa.

2º) Seja a equação linear

$$0x + 0y + 0z = 0$$

é fácil observar que qualquer tripla ordenada $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ é solução da equação.

3º) Seja a equação linear

$$0x + 0y + 0z + 0t = 2$$

é fácil observar que qualquer quádrupla ordenada $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ não satisfaz a equação, pois

$$0\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0\alpha_3 + 0\alpha_4 = 2$$

é sentença falsa $\forall \alpha_1, \forall \alpha_2, \forall \alpha_3, \forall \alpha_4$.

90. Sistema linear

É um conjunto de m $(m \geqslant 1)$ equações lineares, nas incógnitas $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Assim, o sistema

$$S \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

é linear.

Lembrando a definição de produto de matrizes, notemos que o sistema linear S pode ser escrito na forma matricial.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix}$$

Exemplos

1º) O sistema linear

$$S_1 \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

2º) O sistema linear

$$S_2 \begin{cases} 3x + y - z = 4 \\ 2x + 5y + 7z = 0 \end{cases}$$

pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3º) O sistema linear

$$S_3 \begin{cases} x + y = 4 \\ 3x - y = 1 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

91. Solução de um sistema linear

Dizemos que a seqüência ou ênupla ordenada de reais $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)$ é solução de um sistema linear S, se for solução de *todas* as equações de S, isto é

$$\begin{array}{ll}
a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3 + ... + a_{1n}\alpha_n = b_1 & \text{(sentença verdadeira)} \\
a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + a_{23}\alpha_3 + ... + a_{2n}\alpha_n = b_2 & \text{(sentença verdadeira)} \\
a_{31}\alpha_1 + a_{32}\alpha_2 + a_{33}\alpha_3 + ... + a_{3n}\alpha_n = b_3 & \text{(sentença verdadeira)} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + a_{m3}\alpha_3 + ... + a_{mn}\alpha_n = b_m & \text{(sentença verdadeira)}
\end{array}$$

Exemplos

1º) O sistema

$$S \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + y - z = 1 \\ 3x - y + z = 4 \end{cases}$$

admite como solução a tripla ordenada (1, 2, 3) pois

$1 + 2 + 3 = 6$ (sentença verdadeira)

$2 \cdot 1 + 2 - 3 = 1$ (sentença verdadeira)

$3 \cdot 1 - 2 + 3 = 4$ (sentença verdadeira)

S não admite, porém, como solução a tripla (−5, 11, 0) pois

$-5 + 11 + 0 = 6$ (sentença verdadeira)

$2(-5) + 11 - 0 = 1$ (sentença verdadeira)

$3 \cdot (-5) - 11 + 0 = 4$ (sentença falsa)

2º) O sistema linear

$$S \begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ x - y + 4z = 1 \\ 0x + 0y + 0z = 6 \end{cases}$$

não admite solução, pois a última equação não é satisfeita por nenhuma tripla $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

92. Observação

Se um sistema linear S, tiver *pelo menos uma* solução diremos que ele é *possível* ou *compatível* (é o caso do exemplo 1º); caso não tenha nenhuma solução, diremos que S é *impossível ou incompatível* (é o caso do exemplo 2º)

93. Sistema linear homogêneo

Chamamos de sistema linear homogêneo todo aquele em que o termo independente de *todas* as equações vale zero.

Exemplos

$$S_1 \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases} \qquad S_2 \begin{cases} 3x + 4y + z + t = 0 \\ 3x - y - 3z = 0 \\ x + 2y + z - 3t = 0 \\ 4x - z + t = 0 \end{cases}$$

É fácil notar que um sistema linear homogêneo admite sempre como solução a seqüência $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)$ onde $\alpha_i = 0, \forall i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$.

Nos exemplos dados temos:

(0, 0, 0) é solução de S_1

(0, 0, 0, 0) é solução de S_2.

94. Matrizes de um sistema

Dado um sistema linear S de *m* equações e *n* incógnitas, consideremos as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

e

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

A é chamada *matriz incompleta* do sistema e *B, matriz completa.*

Notemos que B foi obtida a partir de A, acrescentando-se a esta a coluna formada pelos termos independentes das equações do sistema.

Exemplos

$$S_1 \begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - y = 4 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$S_2 \begin{cases} 3x - y + z = 1 \\ 4x + y = 7 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

EXERCÍCIOS

D.257 Dizer quais das equações abaixo são lineares:

a) $x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 3$

b) $x_1 + mx_2 + x_3^2 = n$ onde m e n são constantes dadas

c) $x - 2y + 3z = 4$

d) $a_1x_1 + a_2x_2^2 + a_3x_3^3 = b$, onde a e b são constantes dadas

e) $2x_1 + \log x_2 + x_3 = \log 2$

f) $-x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 - x_5 = 0$

g) $\sqrt{3}\,x_1 + \sqrt{2}\,x_2 + x_3 = 5$

h) $x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 10 - 2x_5$

D.258 Verificar se (2, 0, −3) é solução de $2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = -2$.

D.259 Verificar se (1, 1, −1, −1) é solução de $5x_1 - 10x_2 - x_3 + 2x_4 = 0$.

D.260 Encontrar uma solução para a equação linear $2x_1 - x_2 - x_3 = 0$, diferente da solução (0, 0, 0).

D.261 Escrever na forma matricial os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ -x + 2y + 2z = 5 \\ 5x - y + 5z = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 5y + 4z - t = 8 \\ 2x + y - 2z = -3 \\ -x - 2y + z - 3t = 1 \\ -5x - y + 6t = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} ax + by + cz = d \\ -mx + ny = e \\ abx - b^2y + mz = f \end{cases}$

d) $\begin{cases} \sqrt{2}x - 3y + 2z = 7 \\ +7y - z = 0 \\ 4x + \sqrt{3}y + 2z = 5 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ -x + 4y = 1 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} ax - by + 2z = 1 \\ a^2x - by + z = 3 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x + y - z = 3 - t \\ -x - y - 2z = 1 - 3t \\ 5x + 3z = 7 + t \end{cases}$

h) $\begin{cases} (\text{sen}\,a)\ x - (\text{sen}\,b)\ y = 1 \\ (\cos b)\ x + (2\cos a)\ y = -1 \\ (\text{sen}\,b)\ x - (3\cos a)\ y = -2 \\ \text{onde a, b, são constantes dadas.} \end{cases}$

D.262 Quais são os sistemas correspondentes às representações matriciais?

a) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 9 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & 7 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 \\ ab \\ b^2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

D.263 Verificar se (0, −3, −4) é solução do sistema

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - y + z = -1 \\ x + 2y + z = 2 \end{cases}$$

D.264 Verificar se (1, 0, −2, 1) é solução do sistema

$$\begin{cases} 5x + 3y - 2z - 4t = 5 \\ 2x - 4y + 3z - 5t = -9 \\ -x + 2y - 5z + 3t = 12 \end{cases}$$

D.265 Construir as matrizes incompleta e completa dos sistemas:

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ -2x + y = 0 \\ x + 4y = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 4y - z = 2 \\ -x - 3y - 2z = 4 \\ 3x - y + 4z = -3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} ax - y + bz = c \\ a^2x + abz = d \\ -by + az = e \end{cases}$ onde, a, b, c, d, e são dados.

d) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 3y = 4 \\ -x + 2y = -3 \\ 4x - y = 7 \end{cases}$

II. TEOREMA DE CRAMER

Consideremos um sistema linear onde o número de equações é igual ao número de incógnitas (isto é, $m = n$). Nestas condições, A é matriz quadrada; seja $D = \det(A)$.

95. Teorema

Seja S um sistema linear com número de equações igual ao de incógnitas.

Se $D \neq 0$, então o sistema será *possível* e terá *solução única* $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$, tal que

$$\boxed{\alpha_i = \frac{D_i}{D}} \qquad \forall\, i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$$

onde D_i é o determinante da matriz obtida de A, substituindo-se a i'ésima coluna pela coluna dos termos independentes das equações do sistema.

Demonstração

Consideremos o sistema:

$$S \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Consideremos as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1i} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2i} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \ldots & a_{3i} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{ni} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

O sistema S pode ser escrito na forma matricial $A \cdot X = C$. Provemos que tal equação matricial admite *solução única*.

Por hipótese, $D \neq 0$, logo $\exists\, A^{-1}$. Consideremos a matriz $X_0 = A^{-1} \cdot C$ e provemos que ela é solução da equação matricial $AX = C$.

De fato:

$$A(A^{-1} \cdot C) = (A \cdot A^{-1}) \cdot C = I_n \cdot C = C$$

o que prova a existência da solução $X_0 = A^{-1} \cdot C$.

Para provarmos que $X_0 = A^{-1} \cdot C$ é solução única, admitamos que $AX = C$ tenha outra solução X_1, isto é $AX_1 = C$.

Então: $X_1 = I_n X_1 = (A^{-1}A)X_1 = A^{-1}(AX_1) = A^{-1}C = X_0$.

Concluímos, assim, que X_0 é efetivamente *solução única* de $AX = C$.

Por outro lado, já vimos que A^{-1} pode ser calculada pela fórmula

$$A^{-1} = \frac{1}{D} \cdot \bar{A} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \ldots & A_{n2} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & \ldots & A_{n3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \ldots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

onde A_{ij} é o cofator do elemento a_{ij} da matriz A.

Logo

$$X_0 = A^{-1} \cdot C = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1i} & A_{2i} & A_{3i} & \ldots & A_{ni} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \ldots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Tendo em conta que:

$$X_0 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

concluímos que α_i é dado por $\alpha_i = \dfrac{1}{D}(A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + A_{3i}b_3 + \ldots + A_{ni}b_n)$

$$\alpha_i = \frac{1}{D} \cdot D_i = \frac{D_i}{D}$$

96. Exemplo

Seja o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y - z = -4 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases} \qquad \text{temos:} \quad D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

Logo, o sistema tem solução única. Determinemos esta solução

$$D_1 = \begin{vmatrix} \boxed{6} & 1 & 1 \\ \boxed{-4} & -1 & -1 \\ \boxed{1} & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & \boxed{6} & 1 \\ 1 & \boxed{-4} & -1 \\ 2 & \boxed{1} & 1 \end{vmatrix} = -12,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \boxed{6} \\ 1 & -1 & \boxed{-4} \\ 2 & -1 & \boxed{1} \end{vmatrix} = -8.$$

Logo: $x = \dfrac{D_1}{D} = \dfrac{-4}{-4} = 1$; $y = \dfrac{D_2}{D} = \dfrac{-12}{-4} = 3$; $z = \dfrac{D_3}{D} = \dfrac{-8}{-4} = 2$.

Portanto a *solução única* do sistema é (1, 3, 2).

97. Observação

Os sistemas lineares que têm *solução única* são chamados *possíveis e determinados.*

EXERCÍCIOS

D.266 Resolver os sistemas pela regra de Cramer

a) $\begin{cases} -x - 4y = 0 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ -x + 3y = -3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - y + z = 1 \\ 2x + 3z = -1 \\ 4x + y - 2z = 7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} -x + y - z = 5 \\ x + 2y + 4z = 4 \\ 3x + y - 2z = -3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ 2x - y + z = 2 \\ -x + y - z - t = 0 \\ 2x + 2z + t = -1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ -x + 2y + z = 2 \\ 2x - y - z - t = -1 \\ x - 3y + z + 2t = 0 \end{cases}$

D.267 Resolver os sistemas abaixo

a) $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y - 2z = 1 \\ x + 2y + z = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x - y + z = 1 \\ 2x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 2y + z = 2 \\ -4y + 3z = -2 \\ 3x + 2y = \dfrac{36}{15} \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y + z + t = 2 \\ x + 2y - t = 4 \\ 2x - y + z - t = -3 \\ -4x + y - z + 2t = 4 \end{cases}$

D.268 (MAPOFEI-75) — Resolver, aplicando a regra de Cramer, o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ -2x + 3y - 3z = 2 \\ x + z = 1 \end{cases}$$

D.269 Resolver o sistema pela regra de Cramer

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ \dfrac{2x - y}{3z + 2} = \dfrac{z + 1}{2x + y} = 1 \end{cases}$$

Solução

Admitindo $3z + 2 \neq 0$ e $2x + y \neq 0$, temos:

$$\frac{2x - y}{3z + 2} = 1 \iff 2x - y = 3z + 2 \iff 2x - y - 3z = 2$$

$$\frac{z + 1}{2x + y} = 1 \iff z + 1 = 2x + y \iff 2x + y - z = 1$$

então, temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y - 3z = 2 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 10 - 6 = 4 \neq 0$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ \boxed{2} & -1 & -3 \\ \boxed{1} & 1 & -1 \end{vmatrix} = 6 \Rightarrow x = \frac{D_x}{D} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & \boxed{1} & 1 \\ 2 & \boxed{2} & -3 \\ 2 & \boxed{1} & -1 \end{vmatrix} = -5 \Rightarrow y = \frac{D_y}{D} = -\frac{5}{4}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \boxed{1} \\ 2 & -1 & \boxed{2} \\ 2 & 1 & \boxed{1} \end{vmatrix} = 3 \Rightarrow z = \frac{D_z}{D} = \frac{3}{4}.$$

Notemos que $3z + 2 = \frac{9}{4} + 2 \neq 0$ e $2x + y = 3 + (-\frac{5}{4}) \neq 0$.

A solução do sistema é $(\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}, \frac{3}{4})$.

D.270 Calcular o valor de y no sistema

$$\begin{cases} \dfrac{x + 2y}{-3t - 1} = \dfrac{2x - y}{z - 2t} = 1 \\[2ex] \dfrac{x - 2z}{t - y} = \dfrac{3t - 1}{2z - y} = 2 \end{cases}$$

D.271 Resolver o sistema, pela regra de Cramer

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{z} = -1 \\[2ex] \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 0 \\[2ex] \dfrac{3}{x} - \dfrac{2}{y} + \dfrac{1}{z} = 4 \end{cases}$$

Sugestão: faça $\frac{1}{x} = x'$, $\frac{1}{y} = y'$, $\frac{1}{z} = z'$.

D.272 Mostrar que o sistema abaixo tem solução única

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ 3x + 2y - z = 1 \\ 5x - y = 7 \end{cases}$$

D.273 Sendo **a** uma constante real, resolver o sistema:

$$\begin{cases} x \cdot \operatorname{sen} a - y \cdot \cos a = -\cos 2a \\ x \cdot \cos a + y \cdot \operatorname{sen} a = \operatorname{sen} 2a \end{cases}$$

III. SISTEMAS ESCALONADOS

O teorema de Cramer tem um interesse mais teórico do que prático; quando o número de equações é muito grande, fica bastante trabalhoso resolver o sistema através de sua aplicação. Por exemplo, num sistema de 5 equações a 5 incógnitas teremos de calcular 6 determinantes de ordem 5. O método de resolução que veremos agora é mais simples, embora em alguns de seus aspectos teóricos tenhamos que usar o teorema de Cramer.

98. Definição

Dado um sistema linear

$$S \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

onde em cada equação existe pelo menos um coeficiente não nulo, diremos que S está na *forma escalonada*, se o número de coeficientes nulos, antes do primeiro coeficiente não nulo, aumenta de equação para equação.

Exemplos

$$S_1 \begin{cases} x + y + 3z = 1 \\ \quad y - z = 4 \\ \qquad 2z = 5 \end{cases}$$

$$S_2 \begin{cases} 4x - y + z + t + w = 1 \\ \qquad z - t + w = 0 \\ \qquad\quad 2t - w = 1 \end{cases}$$

$$S_3 \begin{cases} x - 4y + z = 5 \\ \quad 2y - z = 0 \end{cases}$$

99. Resolução de um sistema na forma escalonada

Há dois tipos de sistemas escalonados a considerar

1º tipo) *número de equações igual ao número de incógnitas.*

Nesse caso o sistema S terá a forma:

$$S \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad \dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

onde $a_{ii} \neq 0, \forall i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$.

A matriz incompleta do sistema é a matriz triangular:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$D = \det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} \cdot \ldots \cdot a_{nn} \neq 0$, logo, pelo teorema de Cramer S é possível e determinado. Os valores $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ da solução podem ser obtidos, resolvendo-se o sistema por substituição. Partindo da última equação, obtemos x_n; em seguida, substituindo esse valor na equação anterior, obtemos x_{n-1}. Repetindo-se esse procedimento vamos obtendo $x_{n-2}, x_{n-3}, \ldots, x_3, x_2, x_1$.

Exemplo

$$\begin{cases} x + 2y - z + 3t = 6 & \text{(I)} \\ \quad y + 3z - t = -5 & \text{(II)} \\ \quad\quad 5z + 7t = 21 & \text{(III)} \\ \quad\quad\quad 2t = 6 & \text{(IV)} \end{cases}$$

Temos:

em (IV) $2t = 6 \Rightarrow \quad t = 3$

em (III) $5z + 21 = 21 \Rightarrow 5z = 0 \Rightarrow \quad z = 0$

em (II) $y + 3 \cdot 0 - 3 = -5 \Rightarrow \quad y = -2$

em (I) $x - 4 - 0 + 9 = 6 \Rightarrow \quad x = 1$.

Portanto a solução do sistema é (1, -2, 0, 3).

2º tipo) *número de equações é menor que o número de incógnitas.*

Nesse caso o sistema S será do tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad\quad a_{2j}x_j + \ldots\ldots + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \quad (j \geqslant 2) \\ \quad\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \quad\quad\quad a_{mr}x_r + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \quad (r > j) \end{cases}$$

com $m < n$.

Para resolvermos tal sistema, podemos tomar as incógnitas que não aparecem no começo de nenhuma das equações (chamadas *variáveis livres*) e transpô-las para o segundo membro. O novo sistema assim obtido pode ser visto como sendo um sistema contendo apenas as incógnitas do primeiro membro das equações. Nesse caso, atribuindo valores a cada uma das incógnitas do 2º membro, teremos um sistema do 1º tipo, portanto, determinado; resolvendo-o, obteremos uma solução do sistema. Se atribuirmos outros valores às incógnitas do 2º membro, teremos outro sistema, também determinado; resolvendo-o, obteremos outra solução do sistema. Como esse procedimento, de atribuir valores às incógnitas do 2º membro pode se estender indefinidamente, segue-se que podemos extrair do sistema original, um número infinito de soluções. Um tal sistema é dito, *possível e indeterminado*. Chama-se *grau de indeterminação* o número de variáveis livres do sistema, isto é, $n - m$.

Exemplos

1º) $\begin{cases} x - y + z = 4 \\ \quad y - z = 2 \end{cases}$

A única variável livre é z (não aparece no começo de nenhuma equação).
Transpondo z para o 2º membro das equações teremos o sistema:

$$\begin{cases} x - y = 4 - z \\ \quad y = 2 + z \end{cases}$$

Fazendo $z = \alpha$ (onde α é um número real) teremos

$$\begin{cases} x - y = 4 - \alpha & \text{(I)} \\ \quad y = 2 + \alpha & \text{(II)} \end{cases}$$

O sistema é agora do 1º tipo (determinado), para cada valor de α. Resolvendo,

(II) $y = 2 + \alpha$

em (I) $x - 2 - \alpha = 4 - \alpha \Rightarrow x = 6$

Portanto, as soluções do sistema são as triplas ordenadas do tipo $(6; 2 + \alpha; \alpha)$ onde $\alpha \in \mathbb{R}$. Eis algumas:

$\alpha = 1 \longrightarrow (6, 3, 1)$
$\alpha = -7 \longrightarrow (6, -5, -7)$
$\alpha = 0 \longrightarrow (6, 2, 0)$
$\alpha = \frac{1}{2} \rightarrow (6, \frac{5}{2}, \frac{1}{2})$

2º) $\begin{cases} x + y - z - t = 0 \\ 3z + 2t = 4 \end{cases}$

As variáveis livres são y e t; transpondo-as para o 2º membro das equações teremos o sistema

$$\begin{cases} x - z = -y + t \\ 3z = 4 - 2t \end{cases}$$

Fazendo $y = \alpha$ e $t = \beta$ (α e β são números reais) teremos

$$\begin{cases} x - z = -\alpha + \beta & \text{(I)} \\ 3z = 4 - 2\beta & \text{(II)} \end{cases}$$

O sistema é agora do 1º tipo (determinado), para cada valor de α e de β. Resolvendo,

(II) $z = \dfrac{4 - 2\beta}{3}$

em (I) $x - \dfrac{4 - 2\beta}{3} = -\alpha + \beta \Rightarrow x = \dfrac{4 - 2\beta}{3} - \alpha + \beta \Rightarrow x = \dfrac{-3\alpha + \beta + 4}{3}$

Portanto, as soluções do sistema são as quádruplas ordenadas do tipo $\left(\dfrac{-3\alpha + \beta + 4}{3}; \alpha; \dfrac{4 - 2\beta}{3}; \beta\right)$ onde $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}$. Eis algumas:

$\alpha = 0$ e $\beta = 0 \Rightarrow \left(\dfrac{4}{3}; 0; \dfrac{4}{3}; 0\right)$

$\alpha = 1$ e $\beta = 2 \Rightarrow (1; 1; 0; 2)$

$\alpha = -1$ e $\beta = 3 \Rightarrow \left(\dfrac{10}{3}; -1; -\dfrac{2}{3}; 3\right)$

EXERCÍCIOS

D.274 Quais dos sistemas abaixo estão na forma escalonada?

a) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 5 \\ \quad - y - z = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y - z + 5t = 9 \\ 3y + 2z - 3t = 4 \\ - z + t = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ x + 3z = 0 \\ 2y + z = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x + 2z = -2 \\ y - 3z = 1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x - t = 1 \\ 5z - 2t = 3 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2x - y + z - t = 1 \\ 5z - 2t = 3 \end{cases}$

D.275 Resolver os sistemas abaixo.

a) $\begin{cases} -x + 3y - z = 1 \\ 2y + z = 2 \\ 5z = 10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 4y - z = 2 \\ y + z = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 2 \\ - y + 3z = -3 \\ 7z = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x - 3y + z - t = 4 \\ y - z + 2t = 3 \\ 3z + t = 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} ax + by = c \\ my = n \end{cases}$ f) $\begin{cases} x + 2y - z + t = 1 \\ - y + 3z - 2t = 2 \end{cases}$

onde, a, b, c, m, n são dados e $a \neq 0$ e $m \neq 0$.

IV. SISTEMAS EQUIVALENTES ESCALONAMENTO DE UM SISTEMA

100. Definição

Dizemos que dois sistemas lineares S_1 e S_2 são equivalentes, se toda solução de S_1 for solução de S_2 e toda solução de S_2 for solução de S_1.

Exemplo

$$S_1 \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

$$S_2 \begin{cases} x + 2y = 3 \\ - 3y = -5 \end{cases}$$

S_1 e S_2 são equivalentes, pois ambos são determinados ($D \neq 0$, nos dois) e admitem como solução $\left(-\dfrac{1}{3}; \dfrac{5}{3}\right)$.

Já que sistemas equivalentes têm as mesmas soluções (ou ambos não tem nenhuma), o que iremos fazer é *transformar um sistema linear qualquer num outro equivalente, mas na forma escalonada.* Isto porque sistemas na forma escalonada são fáceis de serem resolvidos. Precisamos, então, saber que recursos usar para transformar um sistema S_1 num outro equivalente S_2, na forma escalonada. Estes recursos são dados por dois teoremas que veremos a seguir.

101. Teorema 1

"Multiplicando-se os membros de uma equação qualquer de um sistema linear S, por um número $K \neq 0$, o novo sistema S' obtido, será equivalente a S".

Demonstração

Seja

$$S \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Multiplicando a i'ésima equação de S por $K \neq 0$ obteremos o sistema:

$$S' \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Ka_{i1}x_1 + Ka_{i2}x_2 + \ldots + Ka_{in}x_n = Kb_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

A única diferença entre S e S' é a i'ésima equação. Portanto devemos nos preocupar apenas com ela.

a) Suponhamos que $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ é uma solução de S. Provemos que ela também será solução de S'.

De fato: por hipótese, $a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \ldots + a_{in}\alpha_n = b_i$.

Colocando $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ no 1º membro da i'ésima equação de S', teremos: $Ka_{i1}\alpha_1 + Ka_{i2}\alpha_2 + \ldots + Ka_{in}\alpha_n = K\underbrace{(a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \ldots + a_{in}\alpha_n)}_{b_i \text{ (por hipótese)}} = Kb_i$

o que prova que $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ satisfaz a i'ésima equação de S'. Logo $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ é solução de S'.

b) Suponhamos agora que $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ é uma solução de S' e provemos que ela também será solução de S.

De fato: por hipótese, $Ka_{i1}\alpha_1 + Ka_{i2}\alpha_2 + \ldots + Ka_{in}\alpha_n = Kb_i$.

Colocando $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ no 1º membro da i'ésima equação de S, teremos:

$$a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \ldots + a_{in}\alpha_n = \frac{K}{K}a_{i1}\alpha_1 + \frac{K}{K}a_{i2}\alpha_2 + \ldots + \frac{K}{K}a_{in}\alpha_n =$$

$$= \frac{1}{K}\underbrace{[Ka_{i1}\alpha_1 + Ka_{i2}\alpha_2 + \ldots + Ka_{in}\alpha_n]}_{Kb_i \text{ (por hipótese)}} = \frac{1}{K} \cdot K \cdot b_i = b_i$$

o que prova que $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ satisfaz a i'ésima equação de S. Logo $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ é solução de S.

102. Teorema 2

"Se substituirmos uma equação de um sistema linear S, pela soma membro a membro, dela com uma outra, o novo sistema obtido, S', será equivalente a S."

Demonstração

Seja

$$S \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jn}x_n = b_j \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Substituindo a i'ésima equação de S, pela soma membro a membro, dela com a j'ésima equação, obteremos o sistema:

$$S' \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (a_{i1} + a_{j1})x_1 + (a_{i2} + a_{j2})x_2 + \ldots + (a_{in} + a_{jn})x_n = b_i + b_j \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jn}x_n = b_j \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

A única diferença entre S e S' é a i'ésima equação. Portanto devemos nos preocupar apenas com ela.

a) Suponhamos que $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ é solução de S e provemos que ela também será solução de S'.

De fato, por hipótese:

$$a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + ... + a_{in}\alpha_n = b_i \quad (I)$$
$$a_{j1}\alpha_1 + a_{j2}\alpha_2 + ... + a_{jn}\alpha_n = b_j \quad (II)$$

Colocando $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ no 1º membro da i'ésima equação de S', teremos:

$$(a_{i1} + a_{j1})\alpha_1 + (a_{i2} + a_{j2})\alpha_2 + ... + (a_{in} + a_{jn})\alpha_n =$$
$$= \underbrace{(a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + ... + a_{in}\alpha_n)}_{b_i \text{ (por hipótese (I))}} + \underbrace{(a_{j1}\alpha_1 + a_{j2}\alpha_2 + ... + a_{jn}\alpha_n)}_{b_j \text{ (por hipótese (II))}} = b_i + b_j$$

o que prova que $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ satisfaz a i'ésima equação de S'. Logo $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ é solução de S'.

b) Suponhamos agora que $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ é solução de S', e provemos que ela também será solução de S.

De fato, por hipótese

$$\begin{cases} (a_{i1} + a_{j1})\alpha_1 + (a_{i2} + a_{j2})\alpha_2 + ... + (a_{in} + a_{jn})\alpha_n = b_i + b_j & \text{(I)} \\ \text{e} \\ a_{j1}\alpha_1 + a_{j2}\alpha_2 + ... + a_{jn}\alpha_n = b_j & \text{(II)} \end{cases}$$

Das igualdades (I) e (II), concluímos que: $a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + ... + a_{in}\alpha_n = b_i$ o que prova que $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ satisfaz a i'ésima equação de S. Logo $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ é solução de S.

Exemplo

Os sistemas:

$$S \begin{cases} 2x + y + 3z = 4 \\ \boxed{x - y + 2z = 1} \\ 4x + y + z = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad S' \begin{cases} 2x + y + 3z = 4 \\ \boxed{3x \quad + 5z = 5} \\ 4x + y + z = 0 \end{cases}$$

são equivalentes, pois S' foi obtido a partir de S, substituindo a 2ª equação, pela soma membro a membro dela com a 1ª equação.

103. Escalonamento de um sistema

Para escalonarmos um sistema, teremos que seguir vários passos, todos eles baseados nos *teoremas 1 e 2.*

1º Passo

Colocamos como 1ª equação aquela em que o coeficiente da 1ª incógnita seja diferente de zero.

2º Passo

Anulamos o coeficiente da 1ª incógnita de todas as equações (com exceção da 1ª) substituindo a i'ésima equação $(i \geqslant 2)$ pela soma da mesma com a 1ª multiplicada por um número conveniente.

3º Passo

Deixamos de lado a 1ª equação e aplicamos o 1º e 2º passos nas equações restantes.

4º Passo

Deixamos de lado a 1ª e 2ª equações e aplicamos o 1º e 2º passos nas equações restantes, e assim por diante, até o sistema ficar escalonado. Os exemplos a seguir esclarecerão o assunto.

104. Exemplos

1º) Vamos escalonar o sistema

$$S \begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x - y - 2z = -4 \end{cases}$$

Temos:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 9 & (-2) \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x - y - 2z = -4 \end{cases}$$

Substituímos a 2ª equação pela soma da mesma com a 1ª multiplicada por -2 .

$$\begin{cases} x + 2y + z = 9 & (-3) \\ -3y - 3z = -15 \\ 3x - y - 2z = -4 \end{cases}$$

substituímos a 3ª equação pela soma da mesma com a 1ª multiplicada por -3

$$\begin{cases} x + 2y + z = 9 & \left(-\frac{1}{3}\right) \\ -3y - 3z = -15 \\ -7y - 5z = -31 \end{cases}$$

multiplicamos a 2ª equação por $-\frac{1}{3}$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ y + z = 5 & (7) \\ -7y - 5z = -31 \end{cases}$$

substituímos a 3ª equação pela soma da mesma com a 2ª multiplicada por 7.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ y + z = 5 \\ 2z = 4 \end{cases}$$

O sistema agora está na forma escalonada. Como ele é do 1º tipo (número de equações igual ao de incógnitas), segue-se que é *possível e determinado.*

2º) Vamos escalonar o sistema

$$S \begin{cases} x + y - 3z + t = 1 \\ 3x + 3y + z + 2t = 0 \\ 2x + y + z - 2t = 4 \end{cases}$$

Temos:

$$\begin{cases} x + y - 3z + t = 1 & (-3) \\ 3x + 3y + z + 2t = 0 \\ 2x + y + z - 2t = 4 \end{cases}$$

substituímos a 2ª equação pela soma da mesma com a 1ª multiplicada por -3.

$$\begin{cases} x + y - 3z + t = 1 & (-2) \\ 10z - t = -3 \\ 2x + y + z - 2t = 4 \end{cases}$$

substituímos a 3ª equação pela soma da mesma com a 1ª multiplicada por -2.

$$\begin{cases} x + y - 3z + t = 1 \\ 10z - t = -3 \\ -y + 7z - 4t = 2 \end{cases}$$

Permutamos a 2ª com a 3ª equação.

$$\begin{cases} x + y - 3z + t = 1 \\ -y + 7z - 4t = 2 \\ 10z - t = -3 \end{cases}$$

O sistema agora está na forma escalonada. Como ele é do 2º tipo (número de equações menor que o de incógnitas), segue-se que é *possível e indeterminado.*

3º) Vamos escalonar o sistema

$$S \begin{cases} x - y + z = 4 \\ 3x + 2y + z = 0 \\ 5x + 5y + z = -4 \end{cases}$$

Temos:

$$\begin{cases} x - y + z = 4 & (-3) \\ 3x + 2y + z = 0 \\ 5x + 5y + z = -4 \end{cases}$$

substituímos a 2ª equação pela soma da mesma com a 1ª multiplicada por -3.

$$\begin{cases} x - y + z = 4 & (-5) \\ 5y - 2z = -12 \\ 5x + 5y + z = -4 \end{cases}$$

substituímos a 3ª equação pela soma da mesma com a 1ª multiplicada por -5.

$$\begin{cases} x - y + z = 4 \\ 5y - 2z = -12 & (-2) \\ 10y - 4z = -24 \end{cases}$$

substituímos a 3ª equação, pela soma da mesma com a 2ª multiplicada por -2.

$$\begin{cases} x - y + z = 4 \\ 5y - 2z = -12 \\ 0y + 0z = 0 \end{cases}$$

A última equação pode ser abandonada, pois ela é satisfeita para quaisquer valores das incógnitas e não dá nenhuma informação a respeito de x, y e z.

$$\begin{cases} x - y + z = 4 \\ 5y - 2z = -12 \end{cases}$$

O sistema agora está na forma escalonada. Como ele é do 2º tipo (número de equações menor que o de incógnitas), segue-se que é *possível e indeterminado.*

4º) Vamos escalonar o sistema

$$S \begin{cases} x + 4y = -8 \\ 3x - y = 15 \\ 10x - 12y = 7 \end{cases}$$

Temos:

$$\begin{cases} x + 4y = -8 & (-3) \\ 3x - y = 15 \\ 10x - 12y = 7 \end{cases}$$

substituímos a 2ª equação pela soma da mesma com a 1ª multiplicada por -3.

$$\begin{cases} x + 4y = -8 & (-10) \\ - 13y = 39 \\ 10x - 12y = 7 \end{cases}$$

substituímos a 3ª equação pela soma da mesma com a 1ª multiplicada por -10.

$$\begin{cases} x + 4y = -8 \\ - 13y = 39 & (-4) \\ - 52y = 87 \end{cases}$$

substituímos a 3ª equação pela soma da mesma com a 2ª multiplicada por -4.

$$\begin{cases} x + 4y = -8 \\ - 13y = 39 \\ 0y = -69 \end{cases}$$

Notemos que a 3ª equação não é satisfeita por nenhum valor de x e y. Logo o sistema é *impossível.*

105. Observações

1. Se, ao escalonarmos um sistema, ocorrer uma equação do tipo

$$0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = 0$$

esta deverá ser suprimida do sistema (ver exemplo 3º).

2. Se, ao escalonarmos um sistema, ocorrer uma equação do tipo

$$0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = b \quad (\text{com } b \neq 0)$$

o sistema será, evidentemente, *impossível* (ver exemplo 4º).

3. Com relação ao número de soluções que um sistema apresenta, ele pode ser classificado em:

- sistema
  - possível
    - determinado (uma única solução)
    - indeterminado (infinitas soluções)
  - impossível (nenhuma solução)

EXERCÍCIOS

D.276 Escalonar e classificar os sistemas abaixo:

a) $\begin{cases} x + 5y = 3 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + \frac{1}{2}y = 2 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$

D.277 Escalonar, classificar e resolver o sistema abaixo.

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 3x - 2y = -1 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases}$$

D.278 Escalonar, classificar e resolver os sistemas:

a) $\begin{cases} x - y - 2z = 1 \\ -x + y + z = 2 \\ x - 2y + z = -2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -x + y - 2z = 1 \\ 2x - y + 3t = 2 \\ x - 2y + z - 2t = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 3y + 2z = 2 \\ 3x + 5y + 4z = 4 \\ 5x + 3y + 4z = -10 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y - z + t = 1 \\ 3x - y - 2z + t = 2 \\ -x - 2y + 3z + 2t = -1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x - y + z + t = -1 \\ y - z + 2t = 2 \\ 2x + z - t = -1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x - 2y - 3z = 5 \\ -2x + 5y + 2z = 3 \\ -x + 3y - z = 2 \end{cases}$

D.279 (ITA-48) Resolver o sistema

$$\begin{cases} 5x - 2y + 3z = 2 \\ 3x + y + 4z = -1 \\ 4x - 3y + z = 3 \end{cases}$$

D.280 (FAM-65) Resolver o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} 3x + 5y + 2z = 26 \\ x - 7y + z = -16 \\ 5x - y + 3z = 14 \end{cases}$$

D.281 Discutir o sistema abaixo

$$\begin{cases} ax + 3ay = 0 \\ 2x + ay = 4 \end{cases}$$

Solução

I. Sabemos que se

$$D = \begin{vmatrix} a & 3a \\ 2 & a \end{vmatrix} \neq 0,$$

o sistema tem solução única (Teorema de Cramer). Assim, os valores de **a** para os quais $D = 0$ são os que tornam o sistema indeterminado ou impossível. Examinemos este caso:

$$D = \begin{vmatrix} a & 3a \\ 2 & a \end{vmatrix} = a^2 - 6a = a(a-6) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ \text{ou} \\ a = 6 \end{cases}$$

II. Se **a = 0,** o sistema fica:

$$\begin{cases} 0x + 0y = 0 \\ 2x + 0y = 4 \end{cases} \Rightarrow x = 2 \text{ e } y \text{ é qualquer.}$$

Logo, o sistema é indeterminado.

III. Se **a = 6,** o sistema fica:

$$\begin{cases} 6x + 18y = 0 \\ 2x + 6y = 4 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 3y = 0 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$$

Escalonando vem:

$$\begin{cases} x + 3y = 0 \\ 0x + 0y = 2 \end{cases} \quad \text{o sistema é impossível.}$$

Resumindo, temos:

$$\begin{cases} a \neq 0 \text{ e } a \neq 6 \rightarrow \text{sistema possível determinado} \\ a = 0 \rightarrow \text{sistema indeterminado} \\ a = 6 \rightarrow \text{sistema impossível.} \end{cases}$$

D.282 Discutir o sistema abaixo

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + ay = b \end{cases}$$

Solução

I. Se

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & a \end{vmatrix} \neq 0,$$

pelo Teorema de Cramer o sistema tem solução única. Se $D = 0$, o sistema poderá ser indeterminado ou impossível. Examinemos este caso.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & a \end{vmatrix} = a + 2 = 0 \Longrightarrow a = -2.$$

II. Se **a = -2,** o sistema fica:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - 2y = b \end{cases} \sim \begin{cases} x - y = 2 \\ 0x + 0y = b - 4 \end{cases}$$

então se $\begin{cases} b - 4 = 0 \longrightarrow \text{sistema possível indeterminado} \\ b - 4 \neq 0 \longrightarrow \text{sistema impossível} \end{cases}$

III. Resumindo, temos:

$$\begin{cases} a \neq -2 \longrightarrow \text{sistema possível determinado} \\ a = -2 \text{ e } b = 4 \longrightarrow \text{sistema possível indeterminado} \\ a = -2 \text{ e } b \neq 4 \longrightarrow \text{sistema impossível.} \end{cases}$$

D.283 Discutir os seguintes sistemas nas incógnitas **x** e **y**:

a) $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + my = 6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + ay = a \\ 6x - 3y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x - 2y = -ax \\ -2x + ay = y \end{cases}$ d) $\begin{cases} ax - y = 1 \\ (a-1)x + 2ay = 4 \end{cases}$

D.284 (FEIUC-58) Discutir o sistema

$$\begin{cases} (2a-1)^2 x + (4a^2 - 1)y = (2a+1)^2 \\ (4a-1)x + (2a+1)y = (4a^2 - 1) \end{cases}$$

segundo os valores de **a**.

D.285 (EPUSP-59) Apresente 3 valores de **a** para os quais o sistema:

$$\begin{cases} x + y = a \\ a^2 x + y = a \end{cases}$$

seja, respectivamente, indeterminado, incompatível, determinado.

D.286 (FEIUC-65) Discutir o sistema linear nas incógnitas **x** e **y**.

$$\begin{cases} mx + y = 1 - m \\ x + my = 0 \end{cases}$$

D.287 Discutir o sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x + ay = b \end{cases}$$

D.288 Resolver o sistema

$$\begin{cases} 2ax + 3y = 1 \\ x + 2y = b \end{cases}$$

D.289 (EPUSP-62) Obter **m**, para que o sistema, nas incógnitas **x, y, z**, abaixo, seja compatível.

$$\begin{cases} x + my - (m+1)z = 1 \\ mx + 4y + (m-1)z = 3 \end{cases}$$

D.290 (MACK-55) Discutir o sistema

$$\begin{cases} mx + y = 1 \\ x + y = 2 \\ x - y = m \end{cases}$$

D.291 (ITA-57) Se $abcd \neq 0$ determinar **p** e **q** de modo que o sistema

$$\begin{cases} ax + by = c \\ px + qy = d \end{cases}$$ seja indeterminado.

D.292 (FAUUSP-69) Resolver o sistema

$$\begin{cases} mx + y = 2 \\ x - y = m \\ x + y = 2 \end{cases}$$

D.293 (MAPOFEI-1974) Determinar os valores de **a** e **b** para que o sistema

$$\begin{cases} 6x + ay = 12 \\ 4x + 4y = b \end{cases}$$ seja indeterminado.

D.294 (MAPOFEI-74) Discutir e resolver o sistema abaixo.

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + mz = 2 \\ mx + 2y + z = -1 \end{cases}$$

Solução

I. Sabemos que se

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & m \\ m & 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

o sistema tem solução única (Teorema de Cramer). Assim, os valores de **m** para os quais $D = 0$, são aqueles que tornam o sistema indeterminado ou impossível. Resolvamos o sistema supondo $D \neq 0$.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & m \\ m & 2 & 1 \end{vmatrix} = m(m-1) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ e \\ m \neq 1 \end{cases}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & m \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (1 - m)$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & m \\ m & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1 - m)$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ m & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2(m - 1)$$

$$x = \frac{D_1}{D} = -\frac{1}{m}, \quad y = \frac{D_2}{D} = -\frac{1}{m}, \quad z = \frac{D_3}{D} = \frac{2}{m}$$

Solução do sistema $\left(-\frac{1}{m}, -\frac{1}{m}, \frac{2}{m}\right)$

II. Se $m = \mathbf{0}$, temos:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + 0z = 2 \\ 0x + 2y + z = -1 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 0x - 2y - z = 2 \\ 0x + 2y + z = -1 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 0x - 2y - z = 2 \\ 0x + 0y + 0z = 1 \end{cases}$$

O sistema é impossível.

III. Se $m = \mathbf{1}$, temos:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 2 \\ x + 2y + z = -1 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 0x - 2y + 0z = 2 \\ 0x + y + 0z = -1 \end{cases}$$

então $y = -1$ e $x = 1 - z$; solução do sistema $(1 - \alpha, -1, \alpha)$.

O sistema é possível indeterminado.

IV. Resumindo temos:

$$\begin{cases} m \neq 0 \text{ e } m \neq 1 & \rightarrow \text{ sistema possível determinado} \\ m = 1 & \rightarrow \text{ sistema possível indeterminado} \\ m = 0 & \rightarrow \text{ sistema impossível} \end{cases}$$

D.295 Discutir o sistema

$$\begin{cases} ax + y + 2z = b \\ 2ax - y + 2z = 1 \\ 2x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

Solução

I. Se

$$D = \begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 2a & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

pelo teorema de Cramer o sistema tem solução única.
Estudemos o caso em que $D = 0$.

$$D = \begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 2a & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -4a + 8 = 0 \Rightarrow a = 2$$

II. Se $\mathbf{a = 2}$, o sistema fica:

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = b \\ 4x - y + 2z = 1 \\ 2x + y + 2z = 3 \end{cases} \sim \begin{cases} 2x + y + 2z = b \\ 0 - 3y - 2z = 1 - 2b \\ 0 = 3 - b \end{cases}$$

Se $b \neq 3 \longrightarrow$ sistema impossível
$b = 3 \longrightarrow$ sistema possível indeterminado

III. Resumindo, temos:

$$\begin{cases} a \neq 2 & \longrightarrow \text{ sistema possível determinado} \\ a = 2 \text{ e } b = 3 & \longrightarrow \text{ sistema possível indeterminado} \\ a = 2 \text{ e } b \neq 3 & \longrightarrow \text{ sistema impossível.} \end{cases}$$

D.296 Discutir, segundo os valores do parâmetro **m**, os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = -2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} mx + 2y + z = -1 \\ x - y + mz = 2 \\ x + y + mz = 2 \end{cases}$

D.297 Discutir, segundo os valores do parâmetro **a**, os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x + a(y + z) = 1 \\ y + a(x + z) = a \\ z + a(x + y) = a^2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x + y + az = -5 \\ -2x + y - z = a \\ ax + y = -2 \end{cases}$

D.298 Discutir o sistema

$$\begin{cases} px - y + 2z = 0 \\ x + pz = p \\ 3x + 2y + pz = 5 \end{cases}$$

D.299 (ITA-53) Discutir o sistema

$$\begin{cases} mx + y - z = 4 \\ x + my + z = 0 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

D.300 Discutir o sistema

$$\begin{cases} mx + y = -2 \\ -2x + y - z = m \\ 4x + y + mz = -5 \end{cases}$$

D.301 (OURO PRETO-53) Discutir o sistema

$$\begin{cases} mx + y + z = a \\ x + my + z = b \\ x + y + mz = c \end{cases}$$

onde a, b, c são diferentes dois a dois e têm soma nula.

D.302 (EPUSP-59) Estudar o sistema linear

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + mz = 2 \\ mx + 2y + z = 1 \end{cases}$$

D.303 Discutir e resolver o sistema

$$\begin{cases} mx - y + mz = m \\ 2x + mz = 3 \\ mx + my = 2 \end{cases}$$

D.304 Discutir e resolver o sistema

$$\begin{cases} x + my + mz = m \\ x - y + mz = 0 \\ x - my + z = m \end{cases}$$

D.305 Discutir e resolver o sistema

$$\begin{cases} x - my + z = 0 \\ 2x - y + mz = 3 \\ 2x - 2y + mz = 2 \end{cases}$$

D.306 (IME-65) Determinar o valor de **a** para que o sistema abaixo seja indeterminado.

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 0 \\ 2x + 5y + az = 0 \\ 3x + 7y + z = 0 \end{cases}$$

D.307 (MAPOFEI-75) Determinar o valor de **k**, para que o sistema seja indeterminado.

$$\begin{cases} 3z - 4y = 1 \\ 4x - 2z = 2 \\ 2y - 3x = 3 - k \end{cases}$$

D.308 (MAPOFEI-71)

a) Determinar os valores de **k**, para que tenha solução a equação matricial.

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 4 & 10 & 2 \\ 6 & 15 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ k \end{bmatrix}$$

b) Resolver a equação, na condição do item a.

D.309 (EESCARLOS-59) Estudar o sistema no qual a é um parâmetro real.

$$\begin{cases} x + y - az = 0 \\ ax + y - z = 2 - \dfrac{a}{2} \\ x + ay - z = -a \end{cases}$$

Para quais valores de **a** o sistema é determinado, impossível ou indeterminado?

D.310 Mostrar que o sistema:

$$\begin{cases} x + my + (m - 1)z = 1 \\ (m - 1)x + y + mz = 1 \\ mx + (m - 1)y + z = 1 \end{cases}$$

é determinado para todo **m** real e não nulo.

D.311 (ITA-63) Determinar os valores **m** e **k**, de modo que seja possível e indeterminado o sistema

$$\begin{cases} x + 2y - mz = -1 \\ 3x - y + z = 4 \\ -2x + 4y - 2z = k \end{cases}$$

D.312 (EEM, IMT-67) Discutir o sistema

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = a \\ -x + 2y - az = b \\ ax - ay + 6z = 2 \end{cases}$$

SISTEMA LINEAR HOMOGÊNEO

106. Conforme vimos em **93**, sistema linear homogêneo é aquele em que os termos independentes de todas as equações valem zero. Assim, o sistema

$$S \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

é homogêneo.

Vimos ainda que tal tipo de sistema admite sempre a solução $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ onde $\alpha_i = 0$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, chamada *solução nula, trivial* ou *imprópria.* Portanto um sistema linear homogêneo é *sempre possível.* Se o sistema linear homogêneo for *determinado* apresentará apenas uma solução (a nula), e se for *indeterminado* apresentará além da solução nula, outras soluções não nulas, também chamadas *soluções próprias.*

107. Exemplos

1º) O sistema linear homogêno

$$S \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ 3x - y + 4z = 0 \\ 5x - y + 6z = 0 \end{cases}$$

é equivalente ao sistema S' na forma escalonada

$$S' \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 3y - 5z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Como S' tem 3 equações e 3 incógnitas (1º tipo), segue-se que é determinado, logo, a única solução de S é (0, 0, 0).

2º) O sistema linear homogêneo

$$S \begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ 4x - y + z = 0 \\ 2x - 3y + 7z = 0 \end{cases}$$

é equivalente ao sistema **S'** na forma escalonada,

$$S' \begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ \quad 5y - 13z = 0 \end{cases}$$

Como S' tem duas equações e três incógnitas (2º tipo), segue-se que o mesmo é *possível e indeterminado.*

Para resolvê-lo, consideremos a variável livre z, à qual atribuímos o valor arbitrário $\alpha \in \mathbb{R}$. Assim, temos:

$$\begin{cases} x + y = 3\alpha & (\mathrm{I}) \\ \quad 5y = 13\alpha & (\mathrm{II}) \end{cases}$$

$$(\mathrm{II})\quad y = \frac{13\alpha}{5}$$

$$\text{em } (\mathrm{I})\quad x + \frac{13\alpha}{5} = 3\alpha \implies x = \frac{2\alpha}{5}$$

e as soluções do sistema são constituídas pelas triplas ordenadas da forma $\left(\frac{2\alpha}{5};\ \frac{13\alpha}{5};\ \alpha\right)$ onde $\alpha \in \mathbb{R}$.

Observemos que, para $\alpha = 0$, obtemos a solução nula do sistema, (0, 0, 0).

EXERCÍCIOS

D.313 Resolver o sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x - 4y + z = 0 \\ 3x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

D.314 Resolver o sistema

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ 4x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

D.315 (EPUSP) Resolver o sistema:

$$\begin{cases} 5x + 4y - 2z = 0 \\ x + 8y + 2z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$$

D.316 (MAUÁ-64) Resolver o sistema

$$\begin{cases} 3x + 2y - 12z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 2x - 3y + 5z = 0 \end{cases}$$

D.317 Discutir, segundo os valores do parâmetro **a**, o sistema:

$$\begin{cases} x + 4y - 5z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ 3x + ay + 2z = 0 \end{cases}$$

Solução

Sendo o número de equações igual ao número de incógnitas, podemos calcular D:

$$D = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & a & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -9 & 13 \\ a - 12 & 17 \end{vmatrix} = -153 - 13a + 156 = 3 - 13a$$

Como se trata de sistema homogêneo, só há duas possibilidades: o sistema é determinado ou indeterminado.

Se $D \neq 0$, isto é, se $a \neq \frac{3}{13}$ então o sistema é determinado. Neste caso, só existe a solução imprópria ou trivial: (0, 0, 0).

Se $D = 0$, isto é, se $a = \frac{3}{13}$ então o sistema é indeterminado. Neste caso, existem soluções próprias ou não nulas.

D.318 Discutir, segundo os valores do parâmetro **m**, os sistemas:

a) $\begin{cases} x + my = 0 \\ 2x + 6y = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ mx + 3y + 5z = 0 \\ m^2x + 9y + 25z = 0 \end{cases}$

D.319 (EEM. IMT-66) Estudar o sistema

$$\begin{cases} k(x + y) + z = 0 \\ k(y + z) + x = 0 \\ k(z + x) + y = 0 \end{cases}$$

D.320 (FILO-USP-QUÍMICA) Dado o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 4x - 2my + 3z = 0 \\ 2x + 6y - 4mz = 0 \end{cases}$$

determinar **m** para que o mesmo admita soluções distintas da trivial e determiná-las.

D.321 Determinar **a**, de modo que o sistema

$$\begin{cases} x + y - az = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 2x - y + az = 0 \end{cases}$$

admita soluções próprias.

D.322 Determinar **k** de modo que o sistema

$$\begin{cases} kx + 2y = -z \\ -y + 3z = 2kx \\ 2x - 2z = 3y \end{cases}$$

admita soluções próprias. Determiná-las.

D.323 Dado o sistema

$$\begin{cases} x + my + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ mx + y + z = 0 \end{cases}$$

determinar **m** de modo que admita solução própria e resolvê-lo.

D.324 Para que valores de **m** o sistema possue solução própria?

$$\begin{cases} x + my + 2z = 0 \\ -2x + my - 4z = 0 \\ x - 3y - mz = 0 \end{cases}$$

Qual o grau de indeterminação?

D.325 Determinar **p** de modo que o sistema tenha soluções próprias.

$$\begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ px + y - z = 0 \\ 2px + 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

D.326 (EEM-IMT-65) É dado o sistema

$$\begin{cases} -(m+1)^3x_1 + (-m-1)^2x_2 + (-m-1)x_3 + x_4 = 0 \\ -(m+2)^3x_1 + (-m-2)^2x_2 + (-m-2)x_3 + x_4 = 0 \\ +(m+1)^3x_1 + (m+1)^2x_2 + (m+1)x_3 + x_4 = 0 \\ (m^2+1)^3x_1 + (m^2+1)^2x_2 + (m^2+1)x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Determinar os valores de **m** (reais), para os quais o sistema admite solução diferente da imprópria (trivial).

D.327 (ÁLVARES PENTEADO-68) Qual o valor de **k** para que o sistema

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2x + ky + z = 0 \\ x - 2y - 2z = 0, \end{cases}$$

admita solução própria?

VI. CARACTERÍSTICA DE UMA MATRIZ TEOREMA DE ROUCHÉ-CAPELLI

108. Matriz escalonada

Dada a matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$, dizemos que A é uma *matriz escalonada* ou que está *na forma escalonada* se o número de zeros que precedem o primeiro elemento não nulo de uma linha aumenta, linha por linha, até que restem eventualmente apenas linhas nulas.

Exemplo

As matrizes A, B, C estão na forma escalonada.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

109. Matrizes linha-equivalentes

Dizemos que a matriz A' é *linha-equivalente* à matriz A, se A' for obtida de A através de uma seqüência finita de *operações*, chamadas operações *elementares sobre linhas.* Tais operações são:

1) Troca de posição de duas linhas.

2) Multiplicação de uma linha qualquer por um número $K \neq 0$.

3) Substituição de uma linha, pela soma desta com outra qualquer.

Com estas três operações podemos, dada uma matriz A, encontrar uma matriz A' na forma escalonada, linha-equivalente a A.

Exemplo

Dada a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

vamos encontrar uma matriz A' escalonada, linha-equivalente a A.

Temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \; -4$$

substituição da 2ª linha pela soma da mesma com a 1ª multiplicada por -4.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -9 & 9 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \; -3$$

substituição da 3ª linha pela soma da mesma com a 1ª multiplicada por -3.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -9 & 9 & 1 \\ 0 & -9 & 6 & 3 \end{bmatrix} \; -1$$

substituição da 3ª linha pela soma da mesma com a 2ª multiplicada por -1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -9 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

A matriz

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -9 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

é uma matriz escalonada linha-equivalente a A.

Notemos que as *operações elementares sobre linhas* de uma matriz A são análogas às operações para o escalonamento de um sistema linear. Tal fato será evidenciado quando, mais adiante, estudarmos o *teorema de Rouché-Capelli.*

110. Característica de uma matriz

Seja A uma matriz qualquer e A' uma matriz escalonada, linha-equivalente a A. Chamamos de *característica da matriz A*, e indicamos por $\rho(A)$, ao *número de linhas não nulas de A'.*

111. Exemplos

1º) $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$, escalonando a matriz A, obteremos

$A' = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ Logo $\rho(A) = 2$.

2º) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -10 \end{bmatrix}$, escalonando a matriz A, obteremos

$A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Logo, $\rho(A) = 2$.

3º) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$, escalonando a matriz A, obteremos

$A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Logo, $\rho(A) = 1$.

EXERCÍCIOS

D.328 Determinar as características das seguintes matrizes:

a) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 6 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -3 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

D.329 (EPUSP-58)

a) O que é característica de uma matriz?
b) Qual é a característica da matriz abaixo?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

D.330 (ITA-62) Justificando a resposta, calcular a característica da matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 4 & 7 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

D.331 (ITA-64) Qual o valor máximo da característica de uma matriz 3×4?

D.332 Discutir, segundo os valores do parâmetro **a**, as características das seguintes matrizes

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ a & 1 & 1 & a^2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & a & a^2 & a^3 \end{bmatrix}$

D.333 Determinar **m** de modo que a característica da matriz seja igual a 2.

$$\begin{bmatrix} 1 & m & -1 \\ 2 & m & 2m \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

D.334 Determinar **m** de modo que a característica da matriz seja 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 & m \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

112. Teorema de Rouché-Capelli

Consideremos um sistema linear

$$S \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Sejam A e B as matrizes incompleta e completa do sistema, isto é:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

O sistema linear S será possível se, e somente se, $\rho(A) = \rho(B)$.

Demonstração

Suponhamos que S seja possível e seja S' um sistema escalonado equivalente a S.

Sejam

A': matriz incompleta de S'
B': matriz completa de S'.

Por definição de matrizes linha-equivalentes,

A' é escalonada e linha-equivalente a A
B' é escalonada e linha-equivalente a B.

Sendo S possível, S' poderá ter um dos tipos:

$$\text{I} \begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ \qquad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 \quad \text{onde } a'_{ii} \neq 0, \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\} \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a'_{nn}x_n = b'_n \end{cases}$$

ou

$$\text{II} \begin{cases} a'_{11}x_1 + \qquad \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ \qquad a'_{2j}x_j + \quad \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 \quad (j \geq 2) \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a'_{kr}x_r + \ldots + a'_{kn}x_n = b'_k \quad (r > j \text{ e com } k < n). \end{cases}$$

Tanto no caso (I) como no (II), o número de linhas não nulas de A' e B' é o mesmo. Logo $\rho(A) = \rho(B)$.

Além disso, se S' for do tipo (I) então $\rho(A) = \rho(B) = n$ e

se S' for do tipo (II) então $\rho(A) = \rho(B) < n$.

Reciprocamente, se $\rho(A) = \rho(B) = n$, S' será do tipo (I), isto é, possível e determinado. E se $\rho(A) = \rho(B) < n$ então S' será do tipo (II), isto é, possível e indeterminado.

EXERCÍCIOS

D.335 Classificar e resolver o sistema abaixo, utilizando o teorema de Rouché-Capelli

$$\begin{cases} x + y - 2z = 4 \\ -x + 4y - 3z = 1 \\ 2x + 2y + z = 2 \end{cases}$$

Solução

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \text{ matriz incompleta do sistema}$$

$$B \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ -1 & 4 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \text{ matriz completa do sistema.}$$

Determinemos $\rho(A)$ e $\rho(B)$.

Escalonando a matriz B obteremos: completa

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ -1 & 4 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & -6 \end{array}\right]$$

$\rho(A) = \rho(B) = 3 = n \implies$ sistema possível determinado.

Solução do sistema $\begin{cases} x + y - 2z = 4 \\ 5y - 5z = 5 \\ 5z = -6 \end{cases}$

temos: $z = -\frac{6}{5}$, $y = -\frac{1}{5}$, $x = \frac{9}{5}$ portanto $(\frac{9}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{6}{5})$, é solução.

D.336 Classificar o sistema abaixo, utilizando o teorema de Rouché-Capelli:

$$\begin{cases} -x + 3y - z = 2 \\ 3x - y + 2z = 1 \\ 2x + 2y + z = 3 \end{cases}$$

Solução

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Escalonando a matriz completa, vem:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 8 & -1 & 7 \\ 0 & 8 & -1 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 8 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

temos, então $\rho(A) = \rho(B) = 2 < 3$, portanto o sistema é possível indeterminado.

D.337 Utilizando o teorema de Rouché-Capelli, classificar e resolver os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ x + 2y + z = 1 \\ x + y + 2z = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -x - y + z = 0 \\ 2x + y + z = 1 \\ 5x + 4y - 2z = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + 4y - z + 2t = 2 \\ 2x - 2y + z - 3t = 5 \\ -x + 3y + 2z - t = 3 \\ 2x + 7y + z + t = -1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y + z = 2 \\ x + 2y + z = -1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = 1 \\ x + y - 2z = 1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} -x + y + 2z = 1 \\ 2x - y - z = 1 \\ 3x + 2y - z = 2 \end{cases}$

D.338 Utilizando o teorema de Rouché-Capelli, classificar os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x + 4y - 3z + t = 1 \\ 2x + 3y + 2z - t = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 1 \\ x + y = -1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - 2y + z = 5 \\ 3x - y - 2z = 3 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - y - z = 2 \\ -x + 3y - 2z = 4 \\ x + 2y - 3z = 6 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 3x + 2y + 3z = 2 \\ -x - y - z = -1 \\ 2x + y + 2z = 1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} -x - y - z = 2 \\ 3x - 3y + 2z = 1 \\ 2x - 4y + z = -3 \end{cases}$

D.339 (EESCUSP-66) Dado o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + a^2y + z = a^2 \\ 2x + 2y + (3 - a)z = b^2 \end{cases}$$

Para que valores de **a** e **b** este sistema é:

a) possível? b) simplesmente indeterminado? c) duplamente indeterminado?

Justifique as respostas utilizando o teorema de Rouché.

D.340 Determinar o valor de **k**, de modo que o sistema

$$\begin{cases} -x + 2y + kz = 1 \\ kx + 4y - 4z = 2 \\ 2x + y + z = -2k \end{cases}$$

seja: a) indeterminado b) impossível

D.341 (IME-64) Determinar o valor de x_3 que satisfaz ao sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1(b + c + d) + x_2(a + c + d) + x_3(a + b + d) + x_4(a + b + c) = 0 \\ x_1(bc + bd + cd) + x_2(ac + ad + cd) + x_3(ab + ad + bd) + x_4(ab + ac + bc) = 0 \\ x_1bcd + x_2acd + x_3abd + x_4abc = B \end{cases}$$

D.342 (EPUSP-60) Para que valores de **a** são equivalentes os sistemas:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} ax + y = a + 1 \\ x + y = 2 \end{cases} \ ?$$

D.343 Resolver o sistema

$$\begin{cases} 2^x \cdot 2^y \cdot 2^z = 8 \\ 3^x \cdot 3^z = 3^9 \cdot 9^y \\ 125 \cdot 5^x = 5^z \end{cases}$$

D.344 Resolver o sistema:

$$\begin{cases} x - y \cdot \cos C - z \cdot \cos B = 0 \\ y - z \cdot \cos A - x \cdot \cos C = 0 \\ z - x \cdot \cos B - y \cdot \cos A = 0 \end{cases}$$

sendo, A, B e C ângulos internos de um triângulo.

D.345 Resolver o sistema:

$$\begin{cases} \log_2 (x + y + z) = 0 \\ \log_y (x + z) = 1 \\ \log_3 5 + \log_3 x = \log_3 (y - z) \end{cases}$$

D.346 (EPUSP-62) Mostre que as retas de equação

$x + ay + a^2 = 1$ $(a \in \mathbb{R}$, variável)

cortam-se duas a duas e que entre elas não existem três passando por um mesmo ponto.

D.347 Provar que se o polinômio na variável **x**

$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n$

assume valor numérico zero para **n + 1** valores distintos de **x**; então $P(x) \equiv 0$.

D.348 Achar os polinômios $P(x)$ do 4º grau que verificam a identidade $P(x) \equiv P(1 - x)$

RESPOSTAS

CAPÍTULO I

D.1 a) 5, 7, 9, 11, 13, 15
b) 3, 6, 12, 24, 48, 96
c) 2, 2^2, 2^4, 2^8, 2^{16}, 2^{32}
d) 4, 4, −4, −4, 4, 4
e) −2, 2^2, 2^6, 2^{24}, 2^{120}, 2^{720}

D.2 a) 1, 4, 7, 10, 13, 16
b) 6, 18, 54, 162, 486, 1458
c) 2, 6, 12, 20, 30, 42
d) −2, 4, −8, 16, −32, 64
e) 1, 8, 27, 64, 125, 216

D.3 a) $a_1 = 3$ e $a_n = a_{n-1} + 3, \ \forall \ n \geqslant 2$
b) $b_1 = 1$ e $b_n = 2 \cdot b_{n-1}, \ \forall \ n \geqslant 2$
c) $c_1 = 1$ e $c_n = (-1)^{n-1}, \ \forall \ n \geqslant 2$
d) $d_1 = 5$ e $d_n = d_{n-1} + 1, \ \forall \ n \geqslant 2$
e) $e_1 = 0$ e $e_n = e_{n-1} + 1, \ \forall \ n \geqslant 2$

CAPÍTULO II

D.5 $a = -\dfrac{23}{6}$

D.7 (−1, 0, 1), (0, 1, 2) ou (1, 2, 3)
D.8 (2, 6, 10) ou (10, 6, 2)
D.9 (0, 0, 0) ou (6, 12, 18)
D.10 (−1, 1, 3) ou (3, 1, −1)
D.12 $\{-9, -4, 1, 6\}$
D.13 (3, 7, 11, 15) ou (−15, −11, −7, −3)
D.14 (1, 4, 7, 10) ou (10, 7, 4, 1)
D.16 (2, 0, −2, −4, −6)
D.17 $\left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, 1, \frac{7}{5}, \frac{9}{5}\right)$
D.18 (2, 2, 2, 2, 2)
D.25 35, 80 e 299
D.27 3
D.28 −2
D.29 a_{20}
D.31 (−3, −1, 1, 3, ...)
D.32 (20, 23, 26, ...)
D.33 (89, 93, 97, ...)
D.34 $a_{p+q} = \dfrac{p \cdot \alpha - q \cdot \beta}{p - q}$
D.35 $m + n = p + q$
D.41 43
D.42 $r = \dfrac{100}{13}$
D.43 69
D.44 601
D.45 849
D.46 6 171
D.47 30
D.50 61 425
D.51 14 520 $n(n + 1)$
D.52 600

D.53 $\frac{1-n}{2}$

D.55 31

D.56 30

D.57 16

D.58 14 662

D.59 $a_1 = -\frac{3410}{59}$ e $r = 2$

D.60 $a_1 = -\frac{1}{2}$ e $r = 3$

D.61 $\frac{259}{262}$

D.63 4 549 050

D.64 7 142 135

D.66 $a_1 = 5$ e $r = 2$

D.69 $a_1 = K \cdot r,\ K \in \mathbb{Z}$

D.70 (3, 4, 5, 6, 7, 8)

D.71 $\{-9, -4, 1, 6\}$

CAPÍTULO III

D.74 $x = 6 - a$

D.75 $x = 3$

D.76 $-\frac{1}{2}$

D.77 P.G. da razão -1

D.78 a) V b) V c) F
d) F e) V f) V
g) V h) F i) V
j) F k) F ℓ) F

D.79 $\{\frac{3}{8}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}\}$

D.80 (2, 10, 50, 250)

D.81 $\{1, 4, 16, 64, 256\}$

D.82 (2, 6, 18, 54, 162, 486)

D.83 $a = 2$, $b = 6$, $c = 18$ e $d = 30$ ou vice-versa.

D.84 $\{6, 12, 18\}$

D.89 $q = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

D.90 $1 < q < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

D.91 12, 12, 12 ou 8, 12, 18

D.92 $x = k\pi$ ou $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, com k inteiro

D.94 $a_{100} = 2 \cdot 3^{99}$

D.95 $a_{21} = 3^{10}$

D.96 não

D.97 248 832

D.98 $a_1 = \frac{10}{273}$ e $q = 3$

D.99 12

D.103 $q = \frac{1}{2}$

D.104 6

D.105 6

D.106 $x = a^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{1}{3}},\ y = a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{2}{3}}$.

D.107 a) 2^{45} b) $2^{20} \cdot 3^{190}$ c) $3^{25} \cdot 2^{300}$
d) -2^{2145} e) 1 f) a^{5050}

D.108 a) $\log_2\left[a^{n+1} \cdot 2^{\frac{n(n+1)}{2}}\right]$

b) $a = 2^{1-\frac{n}{2}}$

D.109 -1

D.110 $2^{756} \cdot 3^{784}$

D.111 $\frac{1023}{512}$

D.112 $\frac{3^{20} - 1}{2}$

D.113 $S = \frac{a(q^{2n} - 1)}{q - 1}$

D.114 $\left[\frac{4^n - 1}{3 \cdot 4^{n-1}}\right] \cdot a^2$

D.115 8

D.116 11

D.117 19

D.119 (3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, 768, 1 536, 3072)

D.121 a) $\frac{5}{2}$; b) $-\frac{9}{2}$;
c) $\frac{25}{6}$; d) $-\frac{8}{15}$.

D.122 4

D.123 $\frac{4a}{5}$

D.124 $S = \frac{21}{25}$

D.125 a) $\frac{139}{333}$ b) $\frac{169}{33}$
c) $\frac{47}{275}$ d) $\frac{4646}{495}$

D.126 $\frac{12022}{99}$

D.127 $\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{3})^{999}$

D.128 $\sqrt{2} + 1$

D.129 15

D.130 $\frac{136}{9}$

D.131 $\{a \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} < a < 2\}$ e $\frac{125}{8}$

D.132 m

D.133 2p

D.134 2A

D.135 a) $2a$ b) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$; c) $\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$; d) $\frac{\pi a^2}{9}$

D.136 a) $4a(2 + \sqrt{2})$ b) $\pi \cdot a \cdot (2 + \sqrt{2})$
c) $2a^2$ d) $\frac{\pi a^2}{2}$

CAPÍTULO IV

D.138 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

D.139 $x = 1$ e $y = 0$

D.140 $x = 0$, $y = 3$, $z = 4$, $t = 1$

D.141 $A + B = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$ e $A - B = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

D.142 $A + B + C = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 8 \\ 12 & 23 & 30 \end{bmatrix}$, $A - B + C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -4 \\ -4 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

$A - B - C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 6 \\ -6 & -5 & -8 \end{bmatrix}$ e $-A + B + C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 4 & -3 & -6 \end{bmatrix}$

D.143 $C = \begin{bmatrix} 8 & 9 & 16 \\ 9 & 16 & 25 \\ 16 & 25 & 36 \end{bmatrix}$

D.144 42

D.145 $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$

D.146 $x = -3$ e $y = 2$

D.148 $X = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 12 & 11 \end{bmatrix}$

D.149 $X = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix}$

D.150 $2A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 10 & 14 \end{bmatrix}, \ \frac{1}{3}B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ e $\frac{1}{2}(A + B) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$

D.151 a) $X = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -1 \\ 6 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$, b) $X = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{15}{2} \\ -1 & -\frac{9}{2} \end{bmatrix}$

c) $X = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}$ d) $X = \begin{bmatrix} 9 & 20 \\ 14 & 27 \end{bmatrix}$

D.153 $X = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 6 \end{bmatrix}$ e $Y = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$

D.154 $X = \begin{bmatrix} -15 \\ -38 \\ -9 \end{bmatrix}$ e $Y = \begin{bmatrix} 11 \\ 28 \\ 9 \end{bmatrix}$

D.155 a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 5 & 14 \\ -14 & 13 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 14 & 5 \\ 30 & 13 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} -3 & 7 & 2 \\ 10 & -6 & 8 \\ 19 & -14 & 13 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 16 \\ 4 & 8 & 3 \end{bmatrix}$

D.157 $AB = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -10 & -4 \end{bmatrix}, \ BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ B^2 = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

D.159 a) $\begin{bmatrix} 34 \\ 56 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 14 & 2 \end{bmatrix}$

D.161 a) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{25}{8} & -\frac{13}{8} \\ \frac{5}{8} & \frac{23}{8} \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

D.162 E

D.163 $x = \frac{1}{2}$ e $y = -\frac{1}{2}$

D.165 a) $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a - 2b \end{bmatrix}$ com $a, b \in \mathbb{R}$ b) $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a + b \end{bmatrix}$ com $a, b \in \mathbb{R}$

c) $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{bmatrix}$ com $a, b, c \in \mathbb{R}$

D.168 a) $\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 19 \\ 5 & 85 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 18 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 54 & 189 \\ 42 & 54 \end{bmatrix}$

D.170 $X = \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix}$ ou $X = \begin{bmatrix} \sqrt{1 - bc} & b \\ c & -\sqrt{1 - bc} \end{bmatrix}$ ou

$X = \begin{bmatrix} -\sqrt{1 - bc} & b \\ c & \sqrt{1 - bc} \end{bmatrix}$ onde $b, c \in \mathbb{R}$ e $bc \leqslant 1$

D.171 $X = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ou $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ou $X = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1 - 4bc}}{2} & b \\ c & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1 - 4bc}}{2} \end{bmatrix}$ ou

$X = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1 - 4bc}}{2} & b \\ c & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1 - 4bc}}{2} \end{bmatrix}$ onde $b, c \in \mathbb{R}$ e $bc \leqslant \frac{1}{4}$

D.172 a) $X = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 7 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}$

b) $X = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$ d) $X = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{5}{3} \\ -1 & \frac{5}{3} \end{bmatrix}$

D.173 $x = 2,\ y = 5,\ z = -4$

D.174 $x = 4,\ y = -2,\ z = -1$

D.175 $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = a_{ji} + b_{ji} = c_{ji}$,
$\forall\ i, j \in \{0, 1, 2, ..., n\}$

D.176 $A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$, $B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ e $D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

D.177 $A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ e

$C^{-1} = \frac{1}{26} \cdot \begin{bmatrix} -4 & -16 & 13 \\ 0 & -26 & 13 \\ 6 & 50 & -26 \end{bmatrix}$

D.179 a) $X = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ c) $X = \begin{bmatrix} \cos 3a \\ \text{sen } 3a \end{bmatrix}$ b) $\nexists\ X$ d) $X = \begin{bmatrix} -7 \\ 9 \end{bmatrix}$

D.180 a) $X = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ b) $\nexists\ X$

D.182 a) $X = A^{-1}B$ b) $X = A^{-1}B^{-1}$ c) $X = A^{-1}B^{-1}$
d) $X = A^{-1}B^{-1}A$ e) $X = A^{-1}B^t$
f) $X = B^t - A$

D.183 a) $X = \begin{bmatrix} -19 & 12 \\ 8 & -5 \end{bmatrix}$ b) $X = \begin{bmatrix} -1 & -21 \\ 0 & 13 \end{bmatrix}$

CAPÍTULO V

D.187 a) $\frac{1}{2}$ b) -12 c) $6i - 5$

D.188 a) $\text{sen } (x + y)$ b) 1
c) $6 + 4 \cdot \text{sen } x - 3 \cdot \cos x$

D.189 a) $\log \frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt{b}}$ b) $-m^2$

D.190 a) $x = 2$ ou $x = -\frac{1}{2}$

b) $x = -1$ ou $x = \frac{1}{2}$

D.191 a) 1 b) -9 c) -40

D.192 a) 121, b) $b(a^2 - c^2)$
c) $4m + 8n - 26$

D.193 a) $x = \frac{1}{2}$ b) $x = 0$ ou $x = 1$
c) $x = 0$ ou $x = -2$

D.194 $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$

D.195 $D_{21} = -25,\ D_{22} = 7,\ D_{23} = 26$

D.196 -19

D.197 $D_{13} = -25,\ D_{24} = 6,\ D_{32} = -19,$
$D_{43} = -4.$

D.198 $D_{11} = 1,\ D_{22} = -41,\ D_{33} = -9,\ D_{44} = 29$

D.199 a) -54 b) -44

D.200 a) -208 b) $a^2 + b^2$ c) 48 d) abcd e) $x^2y^2z^2$

D.201 $-3a + 3d$

D.202 -25

D.203 a) $2ax(2 - 3a)$ b) 0 (zero) c) 3 696 d) zero

D.205 a) Tem 1ª e 3ª colunas proporcionais;
b) tem 1ª e 3ª colunas iguais;
c) Tem 2ª e 3ª colunas proporcionais.

D.209 $\begin{vmatrix} a+b+c & 1 & 2 \\ a-b+c & 3 & 4 \\ a-b-c & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ a & 3 & 4 \\ a & 5 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & 1 & 2 \\ -b & 3 & 4 \\ -b & 5 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & 1 & 2 \\ c & 3 & 4 \\ -c & 5 & 6 \end{vmatrix}$

D.210 8

D.212 Uma condição necessária e suficiente para que um determinante se anule é ter uma fila que é combinação linear de outras filas paralelas.

D.215 P.10, P.3, P.10 e P.7 respectivamente

D.225 a) 281
b) 30
c) -24

D.226 a) $(x - y)\ (z - x)\ (y - z)$
b) $(a + b + c)\ (b - a)\ (a - c)\ (b - c)$
c) $(a + b + c)\ (b - a)\ (c - a)\ (c - b)$

D.229 $S = \{-3a, a\}$

D.230 $8\,x\,y\,z\,t$

D.232 Sim

D.236 a) 240
b) -42
c) $(a^2 - a)\ (a^2 - b)\ (b - a)$

D.237 $(e - a)\ (e - b)\ (e - c)\ (e - d)\ (d - a)\ (d - b)\ (d - c)\ (c - b)\ (c - a)\ (b - a)$

D.238 $(t - x)\ (t - y)\ (t - z)\ (z - x)\ (z - y)\ (y - x)$

D.239 $S = \{1, 2, 3\}$

D.240 $-34\,560$

D.241 12

D.242 $S = \{-5, 1, 2\}$

D.243 Positivo pois $D = (-1)^{\frac{n(n+3)}{2} - 2}\ a_n b_{n-1} \cdots r_1$

D.245 1

D.251 $6! = 720$ termos

D.252 $m = 5$

D.254 $A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -8 & 5 \end{bmatrix}$, $B^{-1} = \dfrac{1}{15}\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{15} \\ \frac{2}{3} & \frac{7}{15} \end{bmatrix}$, $C^{-1} = \begin{bmatrix} \text{sen } a & \cos a \\ -\cos a & \text{sen } a \end{bmatrix}$

$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ $E^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $F^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 16 & -7 & 1 \end{bmatrix}$

D.256 $a \neq 1$ e $a \neq -\frac{1}{2}$

CAPITULO VI

D.257 a, c, f, g, h
D.258 É solução
D.259 Não é solução
D.260 (1, 3, −1), por exemplo

D.261 a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 5 & -1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 3 & -5 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & -3 \\ -5 & -1 & 0 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} a & b & c \\ -m & n & 0 \\ ab & -b^2 & m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & -3 & 2 \\ 0 & 7 & -1 \\ 4 & \sqrt{3} & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} a & -b & 2 \\ a^2 & -b & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$

h) $\begin{bmatrix} \text{sen } a & -\text{sen } b \\ \cos b & 2\cos a \\ \text{sen } b & -3\cos a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$

D.262 a) $\begin{cases} 2x + 4y + 9z = 0 \\ -x - z = 0 \\ 3x + 7y + 3z = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x + 2y - z + 3t = -2 \\ -x + 5y - 2z + t = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} ax + by = a^2 \\ cx + dy = ab \\ ex + fy = b^2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3y + 3z = -1 \\ -y = 2 \end{cases}$

D.263 Não é solução
D.264 É solução

D.265 a) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & -3 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 4 & -3 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} a & -1 & b \\ a^2 & 0 & ab \\ 0 & -b & a \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} a & -1 & b & c \\ a^2 & 0 & ab & d \\ 0 & -b & a & e \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & 7 \end{bmatrix}$

D.266 a) $(2, -\frac{1}{2})$ b) $(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ c) (1, 1, −1)
d) (−2, 3, 0) e) $(4, \frac{1}{2}, \frac{-11}{2}, 2)$ f) (0, 0, 2, −1)

D.267 a) (5, −2, 3) b) (2, −2, 1) c) $(\frac{3}{4}, -\frac{5}{8}, -\frac{3}{2})$ d) impossível

D.268 (−1, 2, 2)

D.270 $y = \frac{-9}{31}$

D.271 $(-3, \frac{-9}{14}, \frac{9}{17})$

D.273 (sen a, cos a)
D.274 a, b, d, e, f

D.275 a) $(-3,\ 0,\ 2)$ b) $(5z - 10,\ 3 - z,\ z)$

c) $\left(\frac{8}{3},\ 3,\ 0\right)$ d) $\left(\frac{-17\alpha + 43}{6},\ \frac{-7\alpha + 11}{3},\ \frac{2 - \alpha}{3},\ \alpha\right)$

e) $\left(\frac{cm - bn}{am},\ \frac{n}{m}\right)$ f) $(-5\alpha + 3\beta + 5,\ 3\alpha - 2\beta - 2,\ \alpha,\ \beta)$

D.276 a) sistema possível determinado b) sistema possível indeterminado

D.277 $(1,\ 2)$; sistema possível determinado

D.278 Soluções

a) sistema possível determinado $(-11,\ -6,\ -3)$
b) sistema possível indeterminado $(-12 - 13\alpha,\ -11 - 11\alpha,\ \alpha,\ 5 + 5\alpha)$
c) impossível
d) sistema possível indeterminado

$\left(\frac{6 - 14\alpha}{7},\ \frac{2 - 7\alpha}{7},\ \frac{1 - 14\alpha}{7},\ \alpha\right)$

e) sistema possível determinado $\left(-\frac{1}{5},\ 1,\ -\frac{1}{5},\ \frac{2}{5}\right)$

$\left(-\frac{1}{5},\ 1,\ -\frac{1}{5},\ \frac{2}{5}\right)$

f) sistema impossível

D.279 $(-\alpha,\ -1 - \alpha,\ \alpha)$

D.280 $(1,\ 3,\ 4)$

D.283 a) $\begin{cases} m \neq 2 \longrightarrow \text{sistema possível determinado} \\ m = 2 \longrightarrow \text{sistema possível indeterminado} \end{cases}$

b) $\begin{cases} a \neq -1 \longrightarrow \text{sistema possível determinado} \\ a = -1 \longrightarrow \text{sistema impossível} \end{cases}$

c) $\begin{cases} a \neq -1 \text{ e } a \neq 3 \longrightarrow \text{sistema possível determinado} \\ a = -1 \text{ ou } a = 3 \longrightarrow \text{sistema possível indeterminado} \end{cases}$

d) $\begin{cases} a \neq \frac{1}{2} \text{ e } a \neq -1 \longrightarrow \text{sistema possível determinado} \\ a = \frac{1}{2} \text{ ou } a = -1 \longrightarrow \text{sistema impossível} \end{cases}$

D.284 $a \neq 0,\ -\frac{1}{2} \text{ e } \frac{1}{2} \longrightarrow$ determinado

$a = 0 \text{ ou } -\frac{1}{2} \longrightarrow$ indeterminado

$a = \frac{1}{2} \longrightarrow$ impossível

D.285 $a = \pm 1$; $\nexists\ a$; $a \neq \pm 1$

D.286 $\begin{cases} m \neq 1 \text{ e } m \neq -1 \longrightarrow \text{determinado} \\ m = 1 \longrightarrow \text{indeterminado} \\ m = -1 \longrightarrow \text{impossível} \end{cases}$

D.287 $\begin{cases} a \neq 6 \longrightarrow \text{determinado} \\ a = 6 \text{ e } b = 3 \longrightarrow \text{indeterminado} \\ a = 6 \text{ e } b \neq 3 \longrightarrow \text{impossível} \end{cases}$

D.288 $\begin{cases} a \neq \frac{3}{4} \longrightarrow \left(\frac{2 - 3b}{4a - 3},\ \frac{2ab - 1}{4a - 3}\right) \\ a = \frac{3}{4} \text{ e } b = \frac{2}{3} \longrightarrow \left(\frac{2}{3} - 2\alpha,\ \alpha\right) \\ a = \frac{3}{4} \text{ e } b \neq \frac{2}{3} \longrightarrow \text{impossível} \end{cases}$

D.289 $\forall m \in \mathbb{R}$

D.290 $\begin{cases} m = 0 \longrightarrow (1,\ 1) \\ m = -1 \longrightarrow \left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right) \\ m \neq 0 \text{ e } m \neq -1 \longrightarrow \text{impossível} \end{cases}$

D.291 $p = \frac{ad}{c},\ q = \frac{bd}{c}$

D.292 $\begin{cases} m = 1 \longrightarrow \left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right) \\ m = -2 \longrightarrow (0,\ 2) \\ m \neq 1 \text{ e } m \neq -2 \longrightarrow \text{impossível} \end{cases}$

D.293 $a = 6$ e $b = 8$

D.296 a) $\begin{cases} m \neq 1 \text{ e } m \neq -2 \longrightarrow \text{determinado} \\ m = 1 \longrightarrow \text{impossível} \\ m = -2 \longrightarrow \text{impossível} \end{cases}$

b) $\begin{cases} m \neq 1 \text{ e } m \neq -1 \longrightarrow \text{determinado} \\ m = 1 \longrightarrow \text{impossível} \\ m = -1 \longrightarrow \text{impossível} \end{cases}$

D.297 a) $\begin{cases} a \neq 1 \text{ e } a \neq -\frac{1}{2} \longrightarrow \text{determinado} \\ a = 1 \longrightarrow \text{indeterminado} \\ a = -\frac{1}{2} \longrightarrow \text{impossível} \end{cases}$

b) $\begin{cases} a \neq 1 \text{ e } a \neq -4 \longrightarrow \text{determinado} \\ a = -4 \longrightarrow \text{impossível} \\ a = 1 \longrightarrow \text{indeterminado} \end{cases}$

D.298 $\begin{cases} p \neq 1 \text{ e } p \neq -2 \longrightarrow \text{determinado} \\ p = 1 \longrightarrow \text{indeterminado} \\ p = -2 \longrightarrow \text{impossível} \end{cases}$

D.299 $\begin{cases} m \neq -1 \longrightarrow \text{determinado} \\ m = -1 \longrightarrow \text{impossível} \end{cases}$

D.300 $\begin{cases} m \neq 1 \text{ e } m \neq -4 \longrightarrow \text{determinado} \\ m = 1 \longrightarrow \text{indeterminado} \\ m = -4 \longrightarrow \text{impossível} \end{cases}$

D.301 $\begin{cases} m \neq -2 \text{ e } m \neq 1 \longrightarrow \text{determinado} \\ m = 1 \longrightarrow \text{impossível} \\ m = -2 \longrightarrow \text{indeterminado} \end{cases}$

D.302 $\begin{cases} m \neq 0 \text{ e } m \neq 1 \longrightarrow \text{determinado} \\ m = 0 \longrightarrow \text{impossível} \\ m = 1 \longrightarrow \text{impossível} \end{cases}$

D.303 $\begin{cases} m \neq 0 \text{ e } m \neq 1 \longrightarrow \text{determinado} \\ \left(\dfrac{m-2}{m}, \dfrac{4-m}{m}, \dfrac{m+4}{m^2}\right) \\ m = 1 \longrightarrow \text{indeterminado} \\ \left(\dfrac{3-\alpha}{2}, \dfrac{1+\alpha}{2}, \alpha\right), \alpha \in \mathbb{R} \\ m = 0 \longrightarrow \text{impossível} \end{cases}$

D.304 $\begin{cases} \text{para } m \neq 1 \text{ e } m \neq -1\text{, sistema possível determinado} \\ x = \dfrac{m(2m-1)}{m-1}, \ y = \dfrac{m}{m+1}, \ z = \dfrac{2m^2}{1-m^2} \\ \text{para } m = \pm 1 \text{ sistema impossível} \end{cases}$

D.305 $\begin{cases} m \neq 2 \longrightarrow \text{determinado } (m+2, 1, -2) \\ m = 2 \longrightarrow \text{indeterminado } (2-z, 1, z) \end{cases}$

D.306 $a = \dfrac{3}{2}$

D.307 $k = 5$

D.308 a) $k = 6$, b) $\left(\dfrac{17-40\alpha}{16}, \alpha, \dfrac{3}{8}\right)$

D.309 $\begin{cases} a = 1 \text{ impossível} \\ a = -2 \longrightarrow \text{impossível} \\ a \neq 1 \text{ e } a \neq -2 \longrightarrow \text{determinado} \end{cases}$

D.311 $m = \dfrac{3}{5}$ e $k = -6$

D.312 $\begin{cases} a \neq -6 \text{ e } a \neq 3 \longrightarrow \text{determinado} \\ a = -6 \text{ e } b \neq -5 \longrightarrow \text{impossível} \\ a = -6 \text{ e } b = -5 \longrightarrow \text{indeterminado} \\ a = 3 \text{ e } b \neq 1 \longrightarrow \text{impossível} \\ a = 3 \text{ e } b = 1 \longrightarrow \text{indeterminado} \end{cases}$

D.313 $(0, 0, 0)$

D.314 $(-\alpha, \alpha, \alpha)$ com $\alpha \in \mathbb{R}$

D.315 $\left(\dfrac{2}{3}\alpha, -\dfrac{1}{3}\alpha, \alpha\right)$ com $\alpha \in \mathbb{R}$

D.316 $(2\alpha, 3\alpha, \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

D.318 a) $\begin{cases} m \neq 3 \longrightarrow \text{determinado} \\ m = 3 \longrightarrow \text{indeterminado} \end{cases}$

b) $\begin{cases} m \neq 3 \text{ e } m \neq 5 \longrightarrow \text{determinado} \\ m = 3 \text{ ou } m = 5 \longrightarrow \text{indeterminado} \end{cases}$

D.319 $\begin{cases} k \neq 1 \text{ e } k \neq -\dfrac{1}{2} \longrightarrow \text{determinado} \\ k = 1 \text{ ou } k = -\dfrac{1}{2} \longrightarrow \text{indeterminado} \end{cases}$

D.320 $m = -1 \longrightarrow \left(-\dfrac{\alpha}{2}, -\dfrac{\alpha}{2}, \alpha\right)$

$m = -\dfrac{3}{2} \longrightarrow (0, -\alpha, \alpha)$

D.321 $a = \dfrac{1}{2}$

D.322 $k = -\dfrac{14}{9}$, e $\left(\dfrac{-3\alpha}{2}, \dfrac{-5\alpha}{3}, \alpha\right)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

D.323 $m = 1$, $(-\alpha - \beta, \alpha, \beta)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$.

D.324 ($m = -2$ ou $m = 0$) e grau de indeterminação 1

D.325 $p = -\dfrac{1}{2}$

D.326 $\left\{-\dfrac{3}{2}, -1, 0, 1\right\}$

D.327 $k = 1$

D.328 a) 2 b) 4 c) 3 d) 3 e) 2 f) 3
g) 3 h) 4

D.329 b) 3

D.330 2

D.331 3

D.332 a) $\begin{cases} a \neq 1 \longrightarrow \rho = 3 \\ a = 1 \longrightarrow \rho = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a \neq 2 \text{ e } a \neq 3 \longrightarrow \rho = 3 \\ a = 2 \longrightarrow \rho = 2 \\ a = 3 \longrightarrow \rho = 2 \end{cases}$

D.333 $m = -1$ ou $m = -2$
D.334 $m \neq 1$

D.337 Soluções

a) Possível determinado $(1, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$
b) Indeterminado $(1 - 2\alpha, 3\alpha - 1, \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$
c) Impossível
d) Impossível
e) Impossível
f) Possível determinado $(1, 0, 1)$

D.338 a) Indeterminado
b) Determinado
c) Determinado
d) Indeterminado
e) Indeterminado
f) Impossível

D.339 $\begin{cases} \text{a) } a = 1 \text{ e } b = \pm\sqrt{2} \text{ ou } a \neq 1 \text{ e } \forall\, b \in \mathbb{R} \\ \text{b) } a = -1 \\ \text{c) } a = 1 \text{ e } b = \pm\sqrt{2} \end{cases}$

D.340 indeterminado $\iff k = -2$
impossível $\iff k = 12$

D.341 $x_3 = \dfrac{-B}{(a-c)\,(b-c)\,(c-d)}$

D.342 $\forall\, a \in \mathbb{R} - \{1\}$
D.343 $(1, -2, 4)$

D.344 Sistema indeterminado $\longrightarrow \left(\dfrac{\alpha \cdot \text{sen } A}{\text{sen } C}, \dfrac{\alpha \cdot \text{sen } B}{\text{sen } C}, \alpha\right)$

D.345 impossível

D.348 $P(x) = ax^4 - 2ax^3 + bx^2 + (a - b)x + c$

TESTES

SEQÜÊNCIAS

TD.1 (PUC-76) A definição por recorrência

$$\begin{cases} a_1 = a \\ \quad \text{e} \\ a_p = a_{p-1} + r \end{cases}$$

sendo $a \in \mathbb{R}$ e $r \in \mathbb{R}^*$, com $p \in \mathbb{N}^*$ pode definir uma seqüência do tipo

a) $(5, 4, 7, 9, 3, 16, \ldots)$
b) $(2, 4, 8, 16, 32, \ldots)$
c) $(4, 9, 14, 19, 24, \ldots)$
d) $(4, 7, 13, 25, \ldots)$
e) $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots)$

TD.2 (PUC-76) Se $a_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+1}$ com $n \in \mathbb{N}^*$, então a seqüência definida é dada por

a) $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots)$
b) $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots)$
c) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots)$
d) $(-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots)$
e) $(\frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, -\frac{5}{6}, \ldots)$

TD.3 (FFCLUSP-69) Considere a seqüência $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ cujo termo geral é $a_n = (-1)^n \cdot n \cdot \text{sen } \dfrac{1}{n}$. Qual das alternativas é verdadeira?

a) o limite da sucessão (a_n) é -1
b) o limite da sucessão (a_n) é 1
c) a sucessão (a_n) não converge e nem diverge
d) a sucessão (a_n) diverge para $+\infty$;
e) nenhuma das respostas anteriores é verdadeira

TD.4 (CESCEM-72) A sucessão

$a + 1;\ a - 1;\ a + \dfrac{1}{2};\ a - \dfrac{1}{3};\ a + \dfrac{1}{4};\ a - \dfrac{1}{9};\ \ldots;\ a + \dfrac{1}{2^n};\ a - \dfrac{1}{3^n};\ a + \dfrac{1}{2^{n+1}};$
$a - \dfrac{1}{3^{n+1}};\ \ldots$ é

a) oscilante
b) convergente para a
c) estritamente crescente
d) estritamente decrescente
e) divergente

TD.5 (FEI-71) Dentre as seqüências $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ abaixo, uma delas tem o têrmo geral:

$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$ é:

a) 0, 0, 0, 0, ...
b) $\sqrt{5}, -\sqrt{5}, \sqrt{5}, -\sqrt{5}, ...$
c) $\sqrt{5}, \sqrt{5}+1, \sqrt{5}+2, \sqrt{5}+3, ...$
d) $\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5\sqrt{5}}, \frac{1}{25}, ...$
e) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

TD.6 (CESCEA-73) A seqüência $(y_n)_{n \geqslant 1}$ é tal que $y_n - y_{n-1} = 2n$, para $n \geqslant 2$. Sabendo-se que $y_1 = -1$, então, o termo y_{21} é igual a:

a) 41
b) 459
c) 359
d) 460

TD.7 (CESCEA-67) Qual das seguintes sucessões não constitui uma P.A.?

a) 1, 6, 11, 16, . . .
b) 4, −1, −6, −11, . . .
c) $\frac{1}{3}, 1, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, ...$
d) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...$
e) $\sqrt{4}, \sqrt{2} \cdot 8, \sqrt{2^2} \cdot 9, ...$

TD.8 (FEI-68) Se as variáveis x e y estão relacionadas pela equação $y = ax + b$ ($a \neq 0$ e $b \neq 0$) então

a) y é diretamente proporcional a x
b) atribuindo a x os valores 1, 2, 3, . . . , os valores correspondentes de y formam uma P.A.
c) As diferenças correspondentes Δy e Δx são inversamente proporcionais
d) y é função crescente de x
e) nenhuma das respostas anteriores.

TD.9 (PUC-69) Se em uma P.A. de 7 termos, de razão k, retirarmos o segundo, terceiro, quinto e sexto termos a sucessão restante é uma P.A. de razão:

a) k
b) 2k
c) $\frac{k}{2}$
d) 3k
e) nada disso

TD.10 (MACK-76) O valor de x, tal que os números 2x, 3x e x^2 sejam termos consecutivos e distintos de uma progressão aritmética, é:

a) racional e maior que 10
b) inteiro e múltiplo de 3
c) inteiro e divisor de 12
d) um número primo
e) inexistente

TD.11 (MACK-76) O valor de x para que log 2, $\log(2^x - 1)$, $\log(2^x + 3)$, nessa ordem, sejam termos consecutivos de uma progressão aritmética, é:

a) $\log_2 3$
b) $\log_2 5$
c) $\log_2 7$
d) 3
e) inexistente

TD.12 (G.V-75) Em um triângulo, os três ângulos estão em progressão aritmética e o maior ângulo é o dobro do menor. Então o menor ângulo mede:

a) 10°
b) 20°
c) 30°
d) 15°
e) 40°

TD.13 (PUC-68) Os lados de um triângulo retângulo estão em P.A. de razão 3. Calculá-los:

a) 3, 6, 9
b) 6, 9, 12
c) 12, 15, 18
d) 9, 12, 15
e) nenhuma das respostas anteriores

TD.14 (CESCEM-77) As medidas dos lados de um triângulo são expressas por $x + 1$, $2x$, $x^2 - 5$ e estão em P.A., nesta ordem. O perímetro do triângulo mede:

a) 8
b) 12
c) 15
d) 24
e) 33

TD.15 (CESCEM-67) Se a soma dos termos de uma P.A. de três termos é igual a 15, então o segundo termo da progressão vale:

a) 3
b) 0
c) 2
d) 5
e) não pode ser calculado, pois não é dada a razão.

TD.16 (CESCEM-76) O 3º termo *c* da P.A. (a; b; c) é:

a) 2b − a
b) a + 2b
c) 2a + b
d) 2(b − a)
e) a + b

TD.17 (COMSART-73) Três números em progressão aritmética, apresentam uma soma igual a 9 e uma soma de seus quadrados igual a 59. Estes três números são dados por:

a) −2, 3, 8,
b) 2, 3, 4
c) 1, 3, 5
d) 0, 3, 6
e) nenhuma das respostas anteriores.

TD.18 (PUC-68) O 150º número ímpar positivo é:

a) 151
b) 291
c) 301
d) 299
e) nenhuma das respostas anteriores.

TD.19 (MACK-69) O n-ésimo termo da progressão aritmética 1,87; 3,14; 4,41; . . . é:

a) $1{,}27n^2 + 0{,}6$
b) $1{,}27n + 0{,}6$
c) $1{,}27 + 0{,}6n$
d) $1{,}27 + 0{,}6$
e) nenhuma das respostas anteriores

TD.20 (GV-73) A soma do 4º e 8º termos de uma P.A. é 20; o 31º termo é o dobro do 16º termo. Determine a P.A.

a) : −5, −2, 1, . . .
b) : 5, 6, 7, . . .
c) : 0, 2, 4, . . .
d) : 0, 3, 6, 9, . . .
e) : 1, 3, 5, . . .

TD.21 (MACK-74) As progressões aritméticas: 5, 8, 11, ... e 3, 7, 11, ... tem 100 termos cada uma. O número de termos iguais nas duas progressões é:

a) 15
b) 25
c) 1
d) 38
e) 42.

TD.22 (CESCEA-75) Quantos números ímpares há entre 14 e 192?

a) 88
b) 89
c) 87
d) 86
e) 90

TD.23 (PUC-68) Sendo 47 o décimo-sétimo termo de uma progressão aritmética e 2,75 a razão, calcular o primeiro termo.

a) −1
b) 1
c) 2
d) 0
e) nenhuma das respostas anteriores

TD.24 (PUC-76) Se o 4º e o 9º termos de uma progressão aritmética são, respectivamente, 8 e 113, então a razão r da progressão é:

a) $r = 20$ b) $r = 21$ c) $r = 22$ d) $r = 23$ e) $r = 24$

TD.25 (CESCEM-76) Considere as proposições

I — O número que se deve inserir entre *a* e *b* para que os três formem P.A. é $\frac{b-a}{2}$.

II — Sendo $(a_1; a_2; a_3; \ldots)$ uma P.A., então $a_3 + a_7 = 2a_5$.

III — A razão da P.A. $(a, \frac{3a}{2} + 1; 2a + 2; \ldots)$ é $\frac{a}{2} + 1$.

a) somente I é correta
b) somente II é correta
c) somente III é correta
d) somente III é falsa
e) somente I é falsa

TD.26 (MACK-68) A razão de uma P.A. de 12 termos cujos extremos são -28 e 60 é:

a) 5 b) -5 c) -8 d) 8 e) 10

TD.27 (CESCEA-68) Os 5 meios aritméticos que devem ser inseridos entre $\sqrt{2} - 1$ e $\sqrt{2} + 1$ são:

a) $\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} - \frac{1}{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2} + \frac{1}{2}, \sqrt{2} + 1.$
b) $-2, -1, 0, 1, 2$
c) $\sqrt{2} - 5, \sqrt{2} - 3, \sqrt{2}, \sqrt{2} + 3, \sqrt{2} + 5$
d) $\sqrt{2} - \frac{2}{3}, \sqrt{2} - \frac{1}{3}, \sqrt{2}, \sqrt{2} + \frac{1}{3}, \sqrt{2} + \frac{2}{3}$
e) $\sqrt{2} - \frac{2}{5}, \sqrt{2} - \frac{1}{3}, \sqrt{2}, \sqrt{2} + \frac{1}{3}, \sqrt{2} + \frac{2}{5}$

TD.28 (PUC-77) Ao se inserir *n* meios aritméticos entre 1 e n^2, a razão de P.A. : $1, \ldots, n^2$, é:

a) n b) $n - 1$ c) $n + 1$ d) $n - 2$ e) $n + 2$

TD.29 (CESCEA-74) Seja $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ uma P.A. Assinalar a afirmação falsa:

a) $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$; b) $a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$; c) $a_n - a_1 = nr - r$;
d) $2S_n = (a_n - a_1)n$; e) $r = \frac{a_n - a_1}{n - 1}$, $n > 1$.

TD.30 (CONSART-74) A soma dos números pares positivos menores do que 101 é

a) 2448 b) 2550 c) 2500 d) 5100 e) 5050

TD.31 (FFCLUSP-68) A soma dos números inteiros positivos menores do que 101 e não divisiveis por 4 é:

a) 1300 b) 5050 c) 6350 d) 3750
e) nenhuma das respostas anteriores

TD.32 (GV-71) A soma dos múltiplos de 7 entre 20 e 1.000 é:

a) 70 539 b) 71 400 c) 71 540 d) 76 500 e) 71 050

TD.33 (CESCEA-72) A soma de todos os números naturais compreendidos entre 100 e 200, e tal que o resto da divisão de cada um deles por 5 seja 2, é:

a) 2990 b) 2691 c) 2713 d) 2027 e) não sei.

TD.34 (MACK-74) A seqüência $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ é uma progressão aritmética de razão 2 e primeiro termo igual a 1. A função f definida por $f(x) = ax + b$ é tal que $(f(a_1), f(a_2), f(a_3), \ldots, f(a_n))$ é uma progressão aritmética de razão 6 e primeiro termo igual a 4. Então $f(2)$ é igual a:

a) 5 b) 7 c) 9 d) 11 e) 13

TD.35 (PUC-77) A soma dos n primeiros termos da progressão aritmética:

$\frac{1-n}{n}, \frac{2-n}{n}, \frac{3-n}{n}, \ldots,$ é:

a) $\frac{n}{2}$ b) $\frac{n+1}{2}$ c) $\frac{1-n}{2}$ d) $\frac{1-n}{2n^2}$ e) $\frac{1+n}{2n^2}$

TD.36 (CESCEM-75) Em uma sucessão, o termo geral tem para expressão $u_n = 2n - 1$, $\forall\, n \geqslant 1$. A soma dos 100 primeiros termos dessa sucessão é:

a) 100 b) 199 c) 9 800 d) 10 000 e) 20 000

TD.37 (PUC-76) A soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética é $n^2 + n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Então a razão é:

a) $r = 3$ b) $r = 4$ c) $r = 1$ d) $r = 2$ e) $r = 5$

TD.38 (EAESP-GV-77) A soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética é $(n + 2)2n$. Se o termo de ordem n é tal que $20 < a_n < 26$, então n vale:

a) 5 b) 4 c) 3 d) 2 e) 6

TD.39 (CESCEM-68) Na progressão em que o primeiro termo é a_1 e o k-ésimo termo é $a_k = 2(k + n) - 1$. A soma dos n primeiros termos da progressão é:

a) $2(k^2 + n^2)$ b) $\frac{n(k+n)^2}{2}$ c) $\frac{n(n+1)}{2}$ d) $3n^2$
e) nenhuma das respostas anteriores.

TD.40 (GV-71) Sabendo que a soma do segundo e do quarto termos de uma progressão aritmética é 40 e que a razão é $\frac{3}{4}$ do primeiro termo; a soma dos dez primeiros termos será:

a) 350 b) 215 c) 270 d) 530 e) 400

TD.41 (MACK-76) Se a soma dos 10 primeiros termos de uma progressão aritmética é 50 e a soma dos 20 primeiros termos também é 50, então a soma dos 30 primeiros termos é:

a) 0 b) 25 c) 50 d) 100 e) 150

TD.42 (GV-70) A soma dos termos de uma progressão aritmética, cujo primeiro termo é 4, o ultimo termo é 46 e a razão é igual ao número de termos, é:

a) 50 b) 100 c) 175 d) 150
e) nenhuma das respostas anteriores.

TD.43 (PUC-70) Sendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2x + 3$, então $f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(25)$ é igual a:

a) 725 b) 753 c) 653 d) 1375 e) 400

TD.44 (CESCEA-75) Seja n um número inteiro $\geqslant 1$ e sejam $A = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$ e $B = 1 + 3 + \ldots + (2n - 1)$ Assinale a afirmação correta:

a) $A + B = \frac{3}{2} n^2$ b) $A \cdot B = \frac{n^4}{2}$ c) $A + B^2 = \frac{n^2 + n^4}{2}$

d) $A - B = \frac{n(1 - n)}{2}$ e) $\frac{A}{B} = \frac{n^2 + 1}{2n}$

TD.45 (SANTA CASA-77) A soma dos vinte primeiros termos de uma progressão aritmética é −15. A soma do sexto termo dessa P.A. com o décimo quinto termo vale:

a) 3,0 b) 1,5 c) 1,0 d) −1,5 e) −3,0

TD.46 (CESCEM-77) O primeiro termo de uma progressão aritmética é −10 e a soma dos oito primeiros termos 60. A razão é:

a) $-\frac{5}{7}$ b) $\frac{15}{7}$ c) 5 d) 28 e) 35

TD.47 (CESCEM-75) Numa progressão aritmética limitada em que o 1º termo é 3 e o último 31, a soma de seus termos é 136. O número de termos dessa progressão é:

a) 8 b) 10 c) 16 d) 26 e) 52

TD.48 (CESGRANRIO-76) Uma progressão aritmética de 9 termos tem razão 2 e soma de seus termos igual a 0. O sexto termo da progressão é:

a) 2 b) 3 c) 6 d) 7 e) 0

TD.49 (GV-74) A razão de uma P.A. é igual a 8% do primeiro termo. Sabendo-se que o 11º termo vale 36, então a soma dos 26 primeiros termos desta P.A. é:

a) 1080 b) 1060 c) 1092 d) 1020 e) 1040

TD.50 (CESCEA-74) Numa progressão aritmética de onze termos a soma dos termos é 176; a diferença dos extremos é 30. O valor do produto *ar*, onde *a* é o 1º termo e $r > 0$ a razão, é:

a) 3 b) 6 c) 8 d) 12 e) não sei.

TD.51 (CESCEA-71) Seja a P.A. : $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$, onde $a_1 = 4$ e $a_2 = 4k$. O valor de k, para o qual a soma dos termos da P.A. é 250, é:

a) $\frac{14}{3}$ b) $\frac{13}{6}$ c) $\frac{26}{3}$ d) $\frac{19}{6}$ e) não sei.

TD.52 (GV-72) Um automóvel percorre no primeiro dia de viagem uma certa distância x; no segundo dia percorre o dobro do que percorreu no primeiro dia; no terceiro dia percorre o triplo do 1º dia; e assim sucessivamente. Ao final de 20 dias percorreu uma distância de 6.300 km. A distância percorrida no primeiro dia foi de:

a) 15 km b) 30 km c) 20 km d) 25 km e) 35 km

TD.53 (CONSART-75) Um matemático (com pretensões a carpinteiro) compra uma peça de madeira de comprimento suficiente para cortar os 20 degraus de uma escada de obra. Se os comprimentos dos degraus formam uma progressão aritmética, se o primeiro degrau mede 50 cm e o último 30 cm e supondo que não há desperdício de madeira no corte, o comprimento mínimo da peça é de:

a) 8 m b) 9 m c) 7 m d) 7,5 m e) 6,5 m

TD.54 (GV-75) Um jardineiro tem que regar 60 roseiras plantadas ao longo de uma vereda retilínea e distando 1 m uma da outra. Ele enche seu regador numa fonte situada na mesma vereda, a 15 m da primeira roseira, e a cada viagem rega 3 roseiras. Começando e terminando na fonte, qual é o percurso total que ele terá que caminhar até regar todas as roseiras?

a) 1240 m b) 1360 m c) 1860 m d) 1630 m e) 2000 m

TD.55 (FFCLUSP-68) A média aritmética de 50 números em P.A. é 100. Retirando-se dessa P.A. os 3º, 5º, 46º, e 48º têrmos, a média aritmética dos 46 elementos restantes é:

a) 100
b) menor que 100
c) insuficiência de dados
d) maior que 100
e) nenhuma das respostas anteriores

TD.56 (USP-67) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \ldots n(n+1)(n+2)$ é igual a:

a) $6 \cdot 5^{n-1}$ b) $6(3n^2 - 5n + 3)$

c) $6(n^3 - 3n^2 + 6n - 3)$ d) $\frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3)$

e) nenhuma das afirmações anteriores é verdadeira.

TD.57 (MACK-76) Se $\sum_{x=5}^{n+5} 4(x - 3) = An^2 + Bn + C$ o valor de A + B é:

a) −10 b) −8 c) 6 d) 8 e) 12

TD.58 (CESCEM-66) Três números iguais constituem

a) uma P.A. de razão 1
b) uma P.G. de razão 0
c) uma P.A. de razão 0 e uma P.G. de razão 1
d) uma P.A. e P.G. de razões iguais
e) nenhuma das respostas anteriores.

TD.59 (MACK-69) — A razão da P.G. $\frac{3-\sqrt{3}}{9}, \frac{4-2\sqrt{3}}{9}, \frac{18-10\sqrt{3}}{27}, \ldots$ é:

a) $\frac{3+\sqrt{3}}{3}$ b) $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$ c) $\frac{3-2\sqrt{3}}{2}$ d) $\frac{3+2\sqrt{3}}{3}$

e) nenhuma das respostas anteriores

TD.60 (GV-74) Das progressões geométricas abaixo, identificar a de maior razão:

a) $\sqrt{5}, 5, 5\sqrt{5}, \ldots$ b) $\frac{3}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{21}, \ldots$

c) $\log_{10}3, \log_{10}9, \log_{10}81, \ldots$ d) $\frac{5}{3}, \frac{15}{3}, \frac{45}{3}, \ldots$

e) 10, -50, 250, ...

TD.61 (PUC-72) Somando-se um mesmo número à 1, 3, e 2, nessa ordem, obtém-se uma progressão geométrica. O número somado é:

a) $\frac{4}{3}$ b) $-\frac{7}{3}$ c) $\frac{5}{3}$ d) $\frac{2}{3}$

e) nenhuma das respostas anteriores.

TD.62 (CESCEA-70) Calculando-se x de modo que a sucessão $\frac{a}{x}$, $a + x$, ax com $a \neq n$, seja uma P.G., o primeiro termo será:

a) $-\frac{1}{2}$ b) 0 c) $-\frac{1}{2}$ ou 0 d) -2 e) $\frac{1}{2}$

TD.63 (CESCEM-74) O número real x é estritamente positivo e diferente de 1. O quadrado de x, o próprio x e log x formam, nesta ordem, uma P.G., então x vale

a) -1 b) 0 c) $\frac{1}{10}$ d) 1 e) 10

TD.64 (CESCEM-73) Na ordem em que são dados, os números x, y, z formam uma P.A. e os números $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{x+z}$ formam uma progressão geométrica. Pode-se concluir que

a) a razão da P.A. é igual a 3, qualquer que seja x
b) $y + z = 5x$
c) a razão da P.G. é igual a $\frac{1}{3}$
d) $yz = 8x^2$
e) não existem os números x, y, z, nas condições acima.

TD.65 (MACK-75) A seqüência $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ com $a_n = 3n + 2$:

a) é uma progressão aritmética de razão 3
b) é uma progressão aritmética de razão 2
c) é uma progressão geométrica de razão $\frac{2}{3}$
d) é uma progressão geométrica de razão $\frac{4}{3}$
e) não é uma progressão.

TD.66 (GV-70) Uma progressão na qual o 1º termo é 2, a razão 5 e o último termo é 3 242

a) não pode ser nem P.A. nem P.G.
b) pode ser tanto P.A. como P.G.
c) é uma P.A.
d) é uma P.G.
e) não é progressão.

TD.67 (CESCEM-73) As diferenças entre os termos consecutivos da sucessão dos quadrados perfeitos

a) formam a sucessão dos números primos
b) formam uma nova sucessão de quadrados perfeitos
c) formam uma P.G.
d) formam uma P.A.
e) formam uma sucessão constante.

TD.68 (CESCEA-68) Suponha que a sucessão real de termo geral x_n seja uma P.A. de razão r. Então, a sucessão cujo termo geral é $y_n = ax_n$ com $a \neq 0$ e real, é:

a) uma P.G.
b) uma P.A. de razão ar
c) nem P.A. nem P.G.
d) uma P.A. de razão 2ar
e) uma P.A. se excluirmos os 5 primeiros elementos.

TD.69 (FEI-72) Dada a função $f(n) = an + b$, $a \neq 0$ e $b \neq 0$, definido no conjunto $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$:

a) os números f(1), f(2), f(3) ... estão em P.A.
b) os números f(1), f(2), f(3) ... estão em P.G.
c) a função é crescente
d) f(2) - f(1), f(3) - f(2), f(4) - f(3) ... são números em P.A.
e) A função tem derivada igual a a.

TD.70 (CESCEM-70) Se a, b e c são números reais positivos que estão em P.A. podemos garantir que:

a) $\log_e a, \log_e b, \log_e c$ estão em P.G.
b) $\log_e a, \log_e b, \log_e c$ estão em P.A.
c) e^a, e^b, e^c estão em P.G.
d) e^a, e^b, e^c estão em P.A.
e) nenhuma das respostas anteriores.

TD.71 (GV-72) Se os números **x, y, z** e **u** formam uma Progressão Geométrica, nessa ordem, de termos reais e positivos, então $\log x^4$, $\log y^4$, $\log z^4$ e $\log u^4$:

a) não é possível saber se formam P.A. ou P.G.
b) formam uma sucessão que tem termos em P.A. e P.G.
c) formam uma Progressão Aritmética
d) formam uma Progressão Geométrica
e) n.d.a.

TD.72 (CESCEA-68) Considere a progressão geométrica finita, $\frac{1}{2}$, x, 32 onde $x > 0$. Pode-se afirmar que:

a) $x = \frac{65}{4}$, pois, em uma P.G. o termo central é média aritmética entre os extremos
b) $x = 16$
c) $x = 8$, pois, em uma P.G. o termo central é a metade do produto dos extremos
d) $x = 2$
e) $x = 4$.

TD.73 (CESCEM-70) Se $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ estão em P.A., então $b^{a_1}, b^{a_2}, \dots, b^{a_n}, \dots$ estão em P.G. de razão:

a) $a_2 - a_1$
b) $b^{a_2 - a_1}$
c) $b^{\frac{a_1 + a_n}{2}}$
d) $\frac{a_1 + a_n}{2}$
e) $\sqrt{b^{a_1} \cdot b^{a_2}}$

TD.74 (CESCEM-70) Se $\log_a x_i = -K + \log_a x_{i+1}$ então

a) $x_1, x_2, \dots, x_n$ formam uma P.G. de razão K
b) $x_1, x_2, \dots, x_n$ formam uma P.G. de razão a^K
c) $\log_a x_1, \log_a x_2, \dots, \log_a x_n$ formam uma P.G. de razão K
d) $\log_a x_1, \log_a x_2, \dots, \log_a x_n$ formam uma P.G. de razão a^K
e) nenhuma das respostas anteriores

TD.75 (CESCEM-74) Os termos da seqüência $(a_n)_{n \in \omega}$ formam uma P.A. A partir desta seqüência, construimos duas outras da seguinte maneira:

$$b_n = a_n^2$$
$$c_n = b_{n+1} - b_n$$

Nestas condições, os termos da seqüência c_n formam

a) outra P.A.
b) uma P.G.
c) uma seqüência constante
d) uma seqüência de termos positivos
e) uma seqüência de termos alternados.

TD.76 (CESCEM-71) A seqüência (a_n): $n = 0, 1, 2, \dots$ é uma P.A. de razão $\gamma \neq 0$ e de primeiro termo γ. A seqüência (b_n): $n = 0, 1, 2, \dots$ é uma P.G. de razão $\omega > 0$ e primeiro termo ω.

Nestas condições, a seqüência $\left(\frac{1}{b_n^{a_n}}\right)$: $n = 0, 1, 2, \dots$ é:

a) não monotônica
b) estritamente crescente
c) constante
d) estritamente decrescente
e) nenhuma das anteriores.

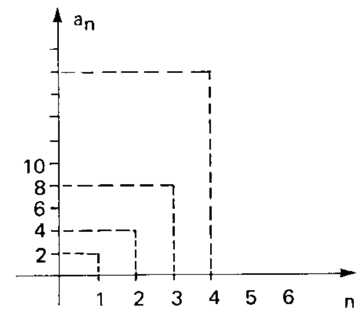
TD.77 (PUC-68) Se a razão de uma P.G. é maior que 1 e o primeiro termo é negativo, a P.G. é chamada:

a) decrescente
b) crescente
c) constante
d) alternante
e) nenhuma das respostas anteriores

TD.78 (CESCEA-68) Para que a progressão geométrica a, aq, aq^2, ... seja decrescente é necessário e suficiente que:

a) $q < 1$
b) $a > 0$ e $q < 0$
c) $(a < 0$ e $q > 1)$ ou $(a > 0$ e $0 < q < 1)$
d) $(a > 0$ e $q < 1)$ ou $(a > 0$ e $0 < q < 1)$
e) $a < 0$ e $q > 0$

TD.79 (GV-70) No gráfico, os pontos representam os termos de uma progressão, sendo **n** o número de termos e a_n o n-ésimo termo.
Então a progressão representada é:



a) uma P.G. de razão 2
b) uma P.A. de razão 3
c) uma P.G. de razão 4
d) uma P.A. de razão 2
e) nenhuma das respostas anteriores.

TD.80 (MACK-74) O gráfico de uma progressão geométrica de razão **q**, $q \neq \pm 1$ e $a_1 = 1$ está contido:

a) numa reta não horizontal
b) numa parábola
c) numa hipérbole
d) numa curva exponencial
e) numa curva logarítmica.

TD.81 (CESGRANRIO-77) Os três primeiros termos de uma progressão geométrica são $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt[3]{2}$ e $a_3 = \sqrt[6]{2}$. O quarto termo é:

a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ b) 1   c) $\sqrt[8]{2}$ d) $\sqrt[9]{2}$ e) $\frac{1}{2}$.

TD.82 (CESCEM-75) Dada a progressão geométrica

$$(\dots : 1 : \frac{\sqrt{3} - 1}{2} : \frac{2 - \sqrt{3}}{2} : \dots)$$ o termo que precede 1 é

a) $1 - \sqrt{3}$ b) $\sqrt{3} + 1$ c) $\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ d) $\sqrt{3} - 1$ e) $\frac{1 - \sqrt{3}}{2}$

TD.83 (MACK-75) Se o oitavo termo de uma progressão geométrica é $\frac{1}{2}$ e a razão é $\frac{1}{2}$, o primeiro termo dessa progressão é:

a) 2^{-1} b) 2   c) 2^6 d) 2^8 e) $\sqrt[8]{\frac{1}{2}}$.

TD.84 (MACK-74) O terceiro termo de uma progressão geométrica de termos positivos é $\sqrt{2}$. Sabendo-se que o sétimo termo é $16 \cdot \sqrt{2}$, a razão da progressão é:

a) $\sqrt{2}$ b) 2 c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
e) nenhuma das respostas acima

TD.85 (FUVEST-77) O quinto e o sétimo termos de uma P.G. de razão positiva valem respectivamente 10 e 16. O sexto termo desta P.G. é

a) 13 b) $10\sqrt{6}$ c) 4 d) $4\sqrt{10}$ e) 10

TD.86 (CESCEA-74) Se $a_1, a_2, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, a_5, a_6, a_7, a_8$ formam nesta ordem uma P.G., então os valores de a_1 e a_8 são, respectivamente:

a) $\frac{1}{8}$ e 16 b) $\frac{1}{16}$ e 8 c) $\frac{1}{4}$ e 4 d) $\frac{1}{16}$ e 2 e) $\frac{1}{16}$ e $\frac{1}{8}$.

TD.87 (MACK-75) O número de termos da progressão (1, 3, 9, ...) compreendidos entre 100 e 1 000 é:

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) maior que 8.

TD.88 (MACK-76) O sexto termo de uma progressão geométrica, na qual dois meios geométricos estão inseridos entre 3 e −24, tomados nessa ordem, é:

a) −48 b) −96 c) 48 d) 96 e) 192.

TD.89 (GV-71) A média aritmética dos seis meios geométricos que podem ser inseridos entre 4 e 512 é:

a) 48 b) 84 c) 128 d) 64 e) 96.

TD.90 (EAESP-FGV-77) Um número positivo é formado por três algarismos, os quais estão em progressão geométrica. Permutando-se os dois últimos algarismos da direita, o número aumenta de 54 unidades. Então, o primeiro algarismo da esquerda é:

a) 6 b) 2 c) 1 d) 4 e) 9.

TD.91 (PUC-73) O número 95 foi dividido em três partes que estão em progressão geométrica de razão $\frac{3}{2}$. As partes são:

a) 20, 35, 40 b) 20, 25, 50 c) 10, 30, 55 d) 10, 40, 45 e) 20, 30, 45.

TD.92 (MACK-75) Numa progressão geométrica de 4 termos, a soma dos termos de ordem par é 10 e a soma dos termos de ordem ímpar é 5. O 4º termo dessa progressão é:

a) 9 b) 8 c) 6 d) 15 e) 10.

TD.93 (GV-70) Numa progressão geométrica a soma do quarto termo com o sexto termo é 160, e a soma do sétimo com o nono termo é 1 280. Então o primeiro termo e a razão desta progressão geométrica valem, respectivamente:

a) 4 e 2 b) 2 e 4 c) 4 e 4 d) 2 e 2
e) nenhuma das respostas anteriores.

TD.94 (GV-72) Numa progressão geométrica de cinco termos, a soma do terceiro termo com o quinto é 60, e a soma do 2º com o 4º é 30. O produto do primeiro termo pela razão é:

a) 15 b) 10 c) 3 d) 2
e) nenhuma das respostas anteriores.

TD.95 (ITA-74) Seja $a > 0$ o 1º termo de uma progressão aritmética de razão r e também de uma progressão geométrica de razão $q = \frac{2r\sqrt{3}}{3a}$. A relação entre **a** e **r** para que o 3º termo da progressão geométrica coincida com a soma dos 3 primeiros termos da progressão aritmética é:

a) $r = 3a$ b) $r = 2a$ c) $r = a$ d) $r = \sqrt{2a}$
e) nenhuma das respostas anteriores.

TD.96 (GV-70) Uma P.A. cujo primeiro termo é zero e uma P.G. cujo primeiro termo é 1 possuem a mesma razão. O nono termo desta P.G. é igual ao quadrado do nono termo daquela P.A. Então:

a) a razão comum é zero.
b) a razão comum é +2 ou −2.
c) não existem duas progressões nestas condições.
d) a razão comum é 1.
e) nenhuma das respostas anteriores.

TD.97 (CESCEA-71) A soma dos termos da P.A.: a_1, a_2, a_3 é 15. Adicionando-se 3,7 e 17, respectivamente, ao 1º, 2º e 3º termo, obtem-se uma P.G. de razão maior do que 1. A P.G. é:

a) :: 6 : 12 : 24
b) :: 5 : 15 : 45
c) :: 4 : 12 : 36
d) :: 24 : 12 : 6
e) não sei.

TD.98 (GV-73) Os números x, y, z formam, nesta ordem, uma P.A. de soma 15. Por outro lado, os números x, y + 1, z + 5 formam, nesta ordem, uma P.G. de soma 21. Sendo $0 \leqslant x \leqslant 10$, o valor de 3z é:

a) 36 b) 9 c) −6 d) 48 e) 21

TD.99 (ITA-70) Seja dada uma progressão geométrica de três termos positivos, tal que o primeiro termo, a razão, o terceiro termo e a soma dos três termos, formam, nesta ordem, uma progressão aritmética. Portanto, a razão da progressão geométrica é:

a) 1 b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{2}{3}$ d) 3
e) nenhuma das respostas acima é válida.

TD.100 (ITA-71) Uma progressão geométrica de 3 termos positivos cuja soma é **m** tem seu segundo termo igual a 1. Que valores deve assumir **m**, para que o problema tenha solução.

a) $0 < m \leqslant 1$ b) $1 \leqslant m < 3$ c) $m \geqslant 3$
d) $1 \leqslant m \leqslant 2$ e) nenhuma das respostas anteriores.

TD.101 (GV-75) Dois conjuntos A e B são tais que o número de elementos de A - B é 50, o número de elementos de $A \cup B$ é 62 e o número de elementos de A - B, $A \cap B$ e B - A estão em progressão geométrica. Então, o conjunto $A \cap B$ tem:

a) 12 elementos b) 10 elementos c) 2 elementos
d) 20 elementos e) 8 elementos

TD.102 (CESCEM-72) Os ângulos de um triângulo estão em P.G. de razão 2. Então o triângulo:

a) tem um ângulo de $\frac{\pi}{3}$ b) é retângulo c) é acutângulo
d) é obtusângulo e) é isósceles

TD.103 (CESCEM-77) Para que as medidas dos lados a e b e a medida da área A de um retângulo sejam três números em P.G., nesta ordem, é necessário que

a) os lados tenham a mesma medida
b) a medida dos lados seja um
c) a medida de um dos lados seja o quadrado da medida do outro
d) a medida de um dos lados seja o dobro da medida do outro
e) a soma das medidas dos lados seja igual à medida da área.

TD.104 (CONSART-73) A soma de três números em progressão geométrica crescente é 26 e, o termo do meio é 6. O maior desses números é dado por:

a) 36 b) 18 c) 24 d) 12
e) nenhuma das respostas anteriores.

TD.105 (CESCEM-71) Os senos dos ângulos de um triângulo estão em P.G. Nestas condições:

a) o triângulo é necessariamente eqüilátero.
b) o triângulo é necessariamente retângulo.
c) o triângulo é necessariamente acutângulo.
d) o triângulo é necessariamente obtusângulo.
e) os lados do triângulo estão em P.G.

TD.106 (CESCEA-73) Há 10 anos o preço de certa mercadoria era de 1 + x cruzeiros. Há 5 anos era de 13 + x cruzeiros e hoje é 49 + x cruzeiros. Sabendo-se que tal aumento deu-se em progressão geométrica e de 5 em 5 anos, pode-se afirmar que a razão do aumento foi:

a) 3 b) 5 c) 7 d) 2

TD.107 (GV-72) Nos últimos seis anos uma certa indústria fez três reajustamentos de 30% cada um nos preços dos seus produtos. Isso totaliza um aumento sobre os preços de 6 anos atrás, de aproximadamente:

a) 40% b) 30% c) 120% d) 90% e) 300%

TD.108 (CESCEA-72) Uma indústria está produzindo atualmente 100 000 unidades de um certo produto. Quantas unidades estará produzindo ao final de 4 anos, sabendo-se que o aumento anual da produção é 10%?

a) 140 000 b) 146 410 c) 146 000 d) 145 000 e) não sei.

TD.109 (CESCEM-71) Sabendo-se que a população de certo município em 1960 foi de 120.000 habitantes e que esta população vem crescendo a uma taxa de 3% ao ano, então em 1963 a melhor aproximação para o número total de habitantes deste município é:

a) 127 308 b) 130 800 c) 131 127 d) 135 061
e) impossível de se prever sem o conhecimento do resultado do censo de 1970.

TD.110 (GV-76) Um químico tem 12 litros de álcool. Ele retira 3 litros e os substitui por água. Em seguida, retira 3 litros da mistura e os substitui por água novamente. Após efetuar essa operação 5 vezes, aproximadamente quantos litros de álcool sobram na mistura?

a) 2,35 b) 2,85 c) 1,75 d) 1,60 e) 1,15

TD.111 (ITA-71) O produto dos termos da seguinte P.G. $-\sqrt{3}, 3, -3\sqrt{3}; \ldots, -81\sqrt{3}$ é:

a) $-\sqrt{3^{25}}$ b) $-\sqrt{3^{42}}$ c) $-\sqrt{5 \cdot 3^9}$ d) $-\sqrt{3^{45}}$
e) nenhuma das respostas anteriores.

TD.112 CESCEM-67) O produto dos termos da seqüência: $x^n, ax^{n-1}, a^2x^{n-2}, \ldots, a^{n-1}x, a^n$ é dado por:

a) $(n + 1)x^n \cdot a^n$ b) $ax^{(n+1)!}$
c) $\frac{n+1}{2}(x^n + a^n)$ d) $\sqrt{(ax)^{n(n+1)}}$
e) é 1 se a = x

TD.113 (CESCEM-76) O número de termos de uma P.G. é ímpar e o seu termo médio é **a**. Pode-se então afirmar que o produto dos termos extremos é:

a) o quadrado de **a**
b) o dobro de **a**
c) a raiz quadrada de **a**
d) a média geométrica dos extremos
e) o produto do número de termos por **a**.

TD.114 (CESCEM-74) Se a_1, a_n, A e x são, respectivamente, numa P.G., o 1º termo, o último termo, a soma e a razão, podemos afirmar que

a) $x = \frac{A - a_1}{a_n - A}$ b) $x = \frac{a_1 + A}{A - a_n}$ c) $x = \frac{A - a_1}{A - a_n}$
d) $x = \frac{a_n - a_1}{A}$ e) $x = \frac{A - a_1 - a_n}{a_1 + a_n}$

TD.115 (ITA-76) Se designarmos por S_n a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica de infinitos termos, de razão $q > 1$ e primeiro termo $a_1 > 0$, podemos afirmar que:

a) $\frac{S_n}{S_{2n} - S_n} = \frac{S_{2n} - S_n}{S_{3n} - S_{2n}}$ b) $\frac{S_n}{S_{2n} - S_n} = \frac{S_{2n}}{S_{3n} - S_{2n}}$
c) $\frac{S_n}{S_{2n} - S_n} = S_{3n} - S_n$ d) $S_{3n} = S_{2n} + S_n$
e) nenhuma das respostas anteriores.

TD.116 (GV-73) A soma $a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1}$ é igual a:

a) $\frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$, se $r = 1$

b) $\frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$, se $r \neq 1$; igual a na, se $r = 1$

c) $\frac{a(1 + r^n)}{1 + r}$, para todo r

d) $\frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$, para todo r

e) na, para todo r

TD.117 (CESCEM-68) Seja uma progressão geométrica de 2n termos, cujo primeiro termo é 1 e a razão é 2. A soma dos termos da sucessão formada pelos termos de ordem 2, 4, 6, ..., 2n da progressão é:

a) $\frac{4^n - 1}{3}$ b) $\frac{2(4^n - 1)}{3}$ c) $4^n - 1$ d) $\frac{4^n - 1}{2}$

e) não há dados suficientes para a solução do problema

TD.118 (CESCEA-67) Quantos termos da P.A. 9, 11, 13, ... devem ser somados a fim de que, a soma seja igual à soma de 9 termos da P.G. 3, -6, 12, -24, 48, ...:

a) 19 b) 20 c) 18 d) -7 e) nada disso.

TD.119 (ITA-77) Sendo $S_k = 1 + 2x + 3x^2 + ... + (k + 1)x^k$, onde $x > 1$ e k é um inteiro maior que 2, então, se n é um inteiro maior que 2,

a) $S_n = \frac{1 - x^{n+1}}{(1 - x)^2}$ b) $S_n = \frac{1 - x^{n+1}}{(1 - x)^2} - \frac{(n + 1)}{1 - x} x^{n+1}$.

c) $S_n = \frac{1 + x^{n+1}}{(1 - x)} - \frac{(n + 2)}{(1 - x)^2} x^{n+1}$

d) $S_n = \frac{1 + x^{n+1}}{(1 - x)^2} + \frac{(n + 2)}{(1 - x)} x^{n+1}$

e) nenhuma das respostas anteriores.

TD.120 (CONSART-74) Se $s_3 = 21$ e $s_4 = 45$ são, respectivamente, as somas dos três e quatro primeiros termos de uma progressão geométrica cujo termo inicial é 3, então a soma dos cinco primeiros termos da progressão é:

a) 66 b) 69 c) 93 d) 96 e) 105

TD.121 (MACK-68) Numa P.G., $a_1 = 2$; $a_n = 686$ e a soma de seus termos é 800. Então:

a) $q < n$ b) $q = n$ c) $q < a_1$ d) $q > n$ e) $n < a_1 + \frac{S_n}{a_n}$

TD.122 (PUC-77) A razão da progressão geométrica, cuja soma dos n primeiros termos é $2^{n+1} - 2$, qualquer que seja n, inteiro e positivo, é:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

TD.123 (GV-70) Um empreiteiro contratou a abertura de um poço de 20 metros, nas seguintes condições: receberia pelo primeiro de profundidade 10 centavos, pelo segundo metro 20 centavos, pelo terceiro 40 centavos, duplicando sempre até o último metro de profundidade. Então pelo último metro de profundidade o empreiteiro receberia:

a) 48 centavos b) $5 \cdot 2^{20}$ centavos c) 390 centavos
d) $10 \cdot 2^{18}$ centavos e) nenhuma das respostas anteriores.

TD.124 (GV-70) Mesmo enunciado da pergunta anterior, o empreiteiro pela abertura total do poço, receberia

(Sugestão: $2^{10} = 1\,024$ é aproximadamente a 1 000 10^3)

a) entre Cr$ 50.000,00 e Cr$ 99.999,90
b) menos de Cr$ 50.000,00
c) exatamente Cr$ 100.000,00
d) exatamente Cr$ 99.999,90
e) mais de Cr$ 100.000,00

TD.125 (GV-76) Um funcionário de uma repartição pública inicia um trabalho. Conseguindo despachar no 1º dia 210 documentos e percebe que seu trabalho no dia seguinte tem um rendimento de 90% em relação ao dia anterior, repetindo-se este fato dia após dia. Se para terminar o trabalho tem que despachar 2 100 documentos, pode-se concluir que:

a) o trabalho estará terminado em menos de 20 dias
b) o trabalho estará terminado em menos de 26 dias
c) o trabalho estará terminado em 58 dias
d) o funcionário nunca terminará o trabalho
e) o trabalho estará terminado em 60 dias.

TD.126 (FFCLUSP-69) É dada uma progressão geométrica crescente e uma progressão aritmética com primeiro termo igual a zero. Somam-se os termos correspondentes das duas seqüências e obtém-se a seqüência (1, 1, 2, ...). A soma dos 5 primeiros termos desta seqüência é:

a) 21 b) 18 c) 27 d) 24 e) 30

TD.127 (GV-70) Quando *n* cresce, a fração

$$\frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^n} + ...}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + ... + \frac{1}{3^n} + ...}$$ tende a:

a) 3 b) $\frac{4}{3}$ c) ∞ d) zero

e) nenhuma das respostas anteriores.

TD.128 (FFCLUSP-67) O limite da soma $S = 1 - \sqrt{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} + ...$

quando o número de parcelas tende ao infinito é:

a) $2 + 2\sqrt{2}$ b) $2 - 2\sqrt{2}$ c) $4\sqrt{2}$ d) $2 - \frac{2\sqrt{2}}{3}$

e) nenhuma das respostas anteriores.

TD.129 (FEI-72) O 1º termo e a razão de uma P.G. têm o mesmo valor $\frac{1}{\sqrt{2}}$. O limite da soma dos termos quando $n \to \infty$ é:

a) $1 + \sqrt{2}$ b) 1 c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{2 + \sqrt{2}}$ e) 0

TD.130 (MACK-69) A soma dos termos da progressão $3^{-1}, 3^{-2}, 3^{-3}, \ldots$ é:

a) $\frac{1}{2}$ b) 2 c) $\frac{1}{4}$ d) 4

e) nenhuma das respostas anteriores.

TD.131 (ITA-75) A expressão $1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \frac{5}{16} + \ldots$ vale

a) 4 b) $\frac{9}{2}$ c) $\frac{7}{2}$ d) 3,8

e) nenhuma das respostas anteriores.

TD.132 (CESCEM-72) A soma da série

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}} + \ldots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \right) \text{ é:}$$

a) $\frac{5}{3}$ b) 1 c) $\frac{3}{2}$ d) 2 e) ∞

TD.133 (MACK-74) A soma $S = 1 + \frac{3}{4} + \frac{7}{16} + \frac{15}{64} + \ldots + \frac{2^n - 1}{2^{2n-2}} + \ldots$ é:

(Sugestão: Decompor o termo geral e usar a fórmula da progressão geométrica.)

a) 2 b) $\frac{2}{3}$ c) 4 d) $\frac{4}{3}$ e) $\frac{8}{3}$

TD.134 A dízima periódica 0,34343434... representa a soma da série geométrica cuja razão q e primeiro termo a são respectivamente

a) 0,01 e 34 b) 0,1 e 0,34
c) 0,34 e 0 d) 0,01 e 0,34

TD.135 (GV-75) O valor da soma $\frac{a}{a-1} + \frac{a}{a+1} + \frac{a(a-1)}{(a+1)^2} + \ldots + \ldots$, para $a > 1$ é:

a) $\frac{2(a+1)}{a(a-1)}$ b) $\frac{a(a+1)}{2(a-1)}$

c) $\frac{a(a-1)}{2(a+1)}$ d) $\frac{(a+1)}{2(a-1)}$

e) $-\frac{1}{2}$

TD.136 (PUC-70) Se $0 < a < 1$, então o limite da soma $a + 2a^2 + 3a^3 + 4a^4 + \ldots$ vale

a) $\frac{a}{(1-a)^2}$

b) $a(1-a)^2$

c) $a(1-a^2)$

d) $\frac{a}{1-a^2}$

e) nenhuma das respostas anteriores.

TD.137 (CESCEA-76) A soma dos termos de uma P.G. infinita é 3. Sabendo-se que o primeiro termo é igual a 2, então o quarto termo desta P.G. é:

a) $\frac{2}{27}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{1}{27}$ e) $\frac{3}{8}$

TD.138 (GV-74) Considere a soma: $a + \ldots + \frac{1}{128} + \frac{1}{512} + \frac{1}{2048} + \ldots = \frac{4}{3}$. Podemos concluir que a soma de a com a razão é:

a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{4}{5}$ c) 1 d) $\frac{1}{4}$ e) $\frac{5}{4}$

TD.139 (PUC-77) Se $1 + r + r^2 + \ldots + r^n + \ldots = 10$, então, r é igual a:

a) 1 b) $\frac{9}{10}$ c) $\frac{-9}{10}$ d) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{10}$

TD.140 (GV-73) A solução da equação $\frac{3}{2} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ é:

a) $x = -\frac{1}{3}$ b) $x = \frac{2}{3}$ c) $x = -\frac{2}{3}$

d) $x = 3$ e) $x = +\frac{1}{3}$

TD.141 (CESCEA-72) Se $2 + \frac{4}{m} + \frac{8}{m^2} + \ldots = \frac{14}{5}$, então, o valor de m é:

a) 5 b) 6 c) 8 d) 7 e) não sei

TD.142 (CESCEA-72) Assinale a afirmação falsa:

a) $1 + r + r^2 + \ldots = \frac{1}{1-r}$, para todo $r \in \mathbb{R}$, $r \neq 1$

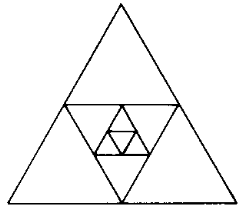
b) $1 + r + r^2 + \ldots + r^n = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$, para todo $r \in \mathbb{R}$, $r \neq 1$ e para todo natural n.

c) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots = 2$

d) $\frac{128}{27}$ é o 5º termo da P.G.: 24, 16, ...

e) não sei.

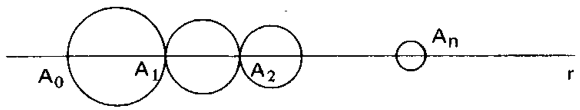
TD.143 (CESCEM-77) O lado de um triângulo equilátero mede 3. Unindo-se os pontos médios de seus lados obtém-se um novo triângulo equilátero. Unindo-se os pontos médios do novo triângulo, obtém-se outro triângulo equilátero, e assim sucessivamente. A soma dos perímetros de todos os triângulos citados é



a) 18 b) 10 c) 6 d) 3 e) 1

TD.144 (CESCEM-70) As bolas abaixo têm centros sobre a reta r e são tangentes exteriormente tendo, cada uma, metade da área da anterior. Sabendo-se que a primeira tem diâmetro igual à **d**, a distância do ponto A_0 ao ponto A_n tendo (quando $n \to \infty$) à:

a) infinito
b) 2d
c) $\dfrac{4d}{3}$
d) $d(2 + \sqrt{2})$
e) $\dfrac{(\sqrt{2} + \pi)}{4}$



TD.145 S_n é a soma dos n primeiros termos da progressão geométrica $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$
O menor valor de n para o qual $2 - S_n < 0{,}0001$ é:

a) 4 b) 10 c) 14 d) 15

TD.146 (CESGRANRIO-COMCITEC-73) O primeiro termo de uma progressão geométrica é $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ e o seu quarto termo $\dfrac{\sqrt{3}}{256}$. Representando-se n e n_0, números inteiros positivos e por S_n a soma dos n primeiros termos, tem-se:

a) para cada número real M escolhido existe n tal que $S_n > M$
b) $S_n < 0{,}55$ para todo n.
c) existe algum n_0 tal que para todo $n > n_0$ se tenha $0{,}55 < S_n < 0{,}58$
d) para cada número real M escolhido existe n tal que $S_n < M$
e) as quatro afirmativas anteriores são falsas.

TD.147 (CESCEM-76) Considere as proposições

I — A razão da P.G. $\left(\frac{a}{b}; \frac{a^3}{b^2 c}; \frac{a^5}{b^3 c^2}; \ldots\right)$ é $\frac{a^2}{bc}$.

II — A soma da série geométrica de termos (a; b; c; ...), onde $|b| > |c|$, é $\dfrac{a}{1 - \frac{b}{a}}$

III — Se o primeiro termo de uma P.G. for estritamente positivo e a razão for estritamente negativa, então a progressão será decrescente.

então,

a) somente I é correta
b) somente II é correta
c) somente III é correta
d) somente III é falsa
e) somente I é falsa

MATRIZES

TD.148 (PUC-74) A matriz quadrada de ordem 2. $A = [a_{ij}]$ com $a_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot i \cdot j$ é:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$

TD.149 (PUC-76) A é uma matriz 3 por 2 definida pela lei

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ se } i = j \text{ e} \\ i^2 \text{ se } i \neq j \end{cases}.$$

Então A se escreve:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 1 & 1 & 9 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \\ 9 & 9 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \\ 9 & 9 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$

TD.150 (PUC-76) Sendo $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ o valor de $2A - B$ é:

a) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & -7 \\ -10 & -1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 7 \\ -10 & -1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 7 \\ -10 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 7 \\ -10 & -1 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 9 & 1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$

TD.151 (PUC-77) Se $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, e $C = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, então a matriz X, de ordem 2, tal que: $\dfrac{X - A}{2} = \dfrac{B + X}{3} + C$ é igual a:

a) $\begin{pmatrix} 28 & 1 \\ 24 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 28 & 1 \\ 23 & 3 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 28 & 1 \\ 25 & 3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 28 & 1 \\ 30 & 3 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 28 & 1 \\ 22 & 3 \end{pmatrix}$

TD.152 (CESCEA-73) Considere as matrizes: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Então, $AB + C$ é igual a:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

TD.153 (PUC-74) Se $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, então a matriz $X = A^2 - 5A + 2 \cdot I$ é:

a) 3.I b) 2.I c) -2.I d) I e) -3.I

TD.154 (PUC-75) Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$, então:

a) A é uma matriz diagonal
b) A é uma matriz quadrada de ordem 4.
c) A matriz transposta de A é $A^t = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$
d) $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 9 & 16 \end{bmatrix}$
e) $A^2 = \begin{bmatrix} -8 & 15 \\ -15 & 7 \end{bmatrix}$

TD.155 (CESCEA-76) Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Definimos: $A^0 = I$ e $A^n = A^{n-1} \cdot A$ para todo número natural n, com $n \geqslant 1$. Então:

a) $A^n = I$, para todo natural n
b) $A^{2n} = A$, para todo natural n
c) $A^{2n} = I$ e $A^{2n+1} = A$, para todo natural n
d) $A^{2n+1} = I$, para todo natural n
e) $A^n = I$ se, e somente se, $n = 0$.

TD.156 (ITA-74) Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, $Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
Então temos:

a) BA = I b) BA = AB c) A = 2B
d) AI = BZ e) nenhuma das respostas anteriores

TD.157 (PUC-70) Sendo as matrizes: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ x & 0 & 2 \end{bmatrix}$, então o valor de x tal que AB = BA é:

a) -1 b) 0 c) 1
d) o problema é impossível e) nenhuma das respostas anteriores.

TD.158 (CESCEM-70) Calculando-se $2AB + B^2$ onde: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Teremos:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & -6 & 3 \\ 6 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & -9 & 4 \\ 6 & -5 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & -6 & 3 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 0 & 6 & 2 \\ 1 & -5 & 6 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

e) nenhum dos resultados anteriores.

TD.159 (FUVEST-77) Considere as matrizes:

1) $A = (a_{ij})$, 4×7, definida por $a_{ij} = i - j$
2) $B = (b_{ij})$, 7×9, definida por $b_{ij} = i$
3) $C = (c_{ij})$, $C = AB$

O elemento c_{63}

a) é -112 b) é -18 c) é -9
d) é 112 e) não existe

TD.160 (CESCEM-73) O produto $M \cdot N$ da matriz $M = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ pela matriz $N = (1, 1, 1)$

a) não se define
b) é uma matriz de determinante nulo
c) é a matriz identidade de ordem 3
d) é uma matriz de uma linha e uma coluna
e) não é uma matriz quadrada.

TD.161 (MACK-74) Sabe-se que $A = \begin{bmatrix} x & 1 & 2 \\ 3 & y & 5 \\ 2 & 3 & z \end{bmatrix}$, $B = (b_{ij})$ é uma matriz diagonal ($b_{ij} = 0$ se $i \neq j$) e $AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 10 \\ 6 & 12 & 25 \\ 4 & 9 & 20 \end{bmatrix}$. Os valores de x, y e z são, respectivamente:

a) 2, 3, 4 b) 1, 4, 4 c) 7, 7, 7
d) 2, 3, 1 e) 1, 1, 1.

TD.162 (PUC-76) Se $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix}$, então

a) x = 5 e y = -7 b) x = -7 e y = -5
c) x = -5 e y = -7 d) x = -7 e y = 5
e) x = 7 e y = -5

TD.163 (FEI-73) Sejam as matrizes: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ e $I = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Calcule x, y e z tais que AB = I.

a) x = z y = 0 z = 2
b) x = 2 y = 0 z = 1
c) x = 0 y = 1 z = 0
d) x = -2 y = 1 z = 4

TD.164 (PUC-77) Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, então, a matriz X, de ordem 2, tal que AX = B, é:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

TD.165 (CESCEM-73) Dada a equação matricial $X^2 - 2X = 0$, onde X é uma matriz quadrada, $n \times n$, não singular. Podemos afirmar que esta equação:

a) tem uma infinidade de soluções
b) não tem solução
c) tem duas soluções distintas
d) tem uma única solução
e) admite a solução $X = \begin{pmatrix} 2 \dots 2 \\ \dots\dots\dots \\ 2 \dots 2 \end{pmatrix}$

TD.166 (ITA-76) $P = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -1 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ é matriz 3×3, então uma solução da equação:

$(P + X)^2 = P^2 + X^2 + 2PX$ é:

a) $X = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ b) $X = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$

c) $X = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ d) $X = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$

e) nenhuma das respostas anteriores.

TD.167 (MACK-74) Seja $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ com $ad - bc \neq 0$. Então A^{-1} é:

a) $\frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ b) $\frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} -a & c \\ b & -d \end{pmatrix}$ c) $\frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$

d) $\frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$ e) $\frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} a^{-1} & b^{-1} \\ c^{-1} & d^{-1} \end{pmatrix}$

TD.168 (CESCEA-75) Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ x & y \end{pmatrix}$ duas matrizes. Se B é a inversa de A, então $x + y$ vale:

a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) -1 d) 1 e) 0

TD.169 (MACK-74) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Então $(A + A^{-1})^3$ é igual a:

a) matriz nula de ordem 2 b) matriz identidade de ordem 2
c) $\frac{1}{2}$ A d) 2^7A e) 8 A.

TD.170 (MACK-75) Sendo $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ x & x \end{bmatrix}$, então o número de valores de x tais que $A + A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ é:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4.

TD.171 (MACK-74) Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} \text{cotg}\,\alpha & \text{cossec}\,\alpha \\ \text{cossec}\,\alpha & \text{cotg}\,\alpha \end{pmatrix}$ com $\alpha \neq k\pi$. Se $A = A^{-1}$ os valores de α são:

a) $\frac{k\pi}{2}$, k inteiro b) $2k\pi$, k inteiro
c) todos os números reais d) inexistentes
e) nenhuma das afirmações acima é verdadeira

TD.172 (EPUSP-68) Seja **b** o elemento da primeira linha e segunda coluna da matriz inversa da matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) $b = -2$ b) $b = -1$ c) $b = 0$ d) $b = 1$
e) nenhuma das respostas anteriores

TD.173 (MACK-73) A matriz inversa da matriz A é $A^{-1} = \begin{pmatrix} 16 & -1 & -10 \\ 13 & -1 & -8 \\ 11 & -1 & -7 \end{pmatrix}$

Lembrando que $A \cdot A^{-1} = I_3$, a segunda linha de A é

a) (1 1 1) b) (3 −2 −2) c) (2 1 −3)
d) (0 0 −1) e) (2 −2 3)

TD.174 (EAESP-GV-77) No que se refere a solução da equação $AX = B$ em que A e B são matrizes quadradas de ordem 3, pode-se dizer que:

a) a equação pode não ter solução
b) a equação nunca tem solução
c) a equação tem sempre uma solução e que $X = \frac{B}{A}$
d) a equação tem sempre uma solução e que $X = BA^{-1}$
e) a equação tem sempre uma solução e que $X = A^{-1}B$

TD.175 (PUC-76) Dada as matrizes $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ então a matriz X de ordem 2, tal que $(XA)^{-1} = B$ é:

a) $\frac{1}{165}\begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 10 & 15 \end{pmatrix}$ b) $\frac{1}{165}\begin{pmatrix} -6 & 7 \\ 10 & 15 \end{pmatrix}$ c) $\frac{1}{165}\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ -6 & 15 \end{pmatrix}$

d) $\frac{1}{165}\begin{pmatrix} 10 & 15 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$ e) $\frac{1}{165}\begin{pmatrix} 7 & 15 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}$

TD.176 (MACK-74) Dadas $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ e $B = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} a & 10 \\ 75 & b \end{pmatrix}$ os valores de a e b, tais que $B = PAP^{-1}$, são respectivamente:

a) 24 e −11   b) 18 e 53   c) −19 e 17   d) 33 e −47   e) 35 e 2

TD.177 (PUC-70) Sendo A e B matrizes invertíveis de mesma ordem e X uma matriz tal que $(XA)^t = B$, então:

a) $X = A^{-1}B^t$
b) $X = B^tA^{-1}$
c) $X = (BA)^t$
d) $X = (AB)^t$
e) nenhuma das respostas anteriores.

(Nota: $(XA)^t$ representa a matriz transposta de XA).

TD.178 (CESCEA-73) Considere as afirmações

1. Se $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, então, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$
2. Seja A uma matriz quadrada.
   Então: A^{-1} existe $\Longleftrightarrow$ det A = 0
3. Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$. Então: $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 1 & 25 \end{pmatrix}$

então:

a) todas são verdadeiras
b) 1 e 3 são falsas
c) 2 e 3 são falsas

TD.179 (PUC-76) Os valores de m, para os quais a matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & m \\ m & 2 \end{pmatrix}$ não é inversível, são:

a) ± 1 b) ± 2 c) $\pm\sqrt{5}$ d) $\pm\sqrt{2}$ e) $\pm\sqrt{3}$

TD.180 (PUC-72) Os valores de k, para que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ k & 1 & 3 \\ 1 & k & 3 \end{bmatrix}$$

não seja invertível, são:

a) k = −4 e k = −2
b) k = 1 e k = 2
c) k = 0 e k = −1
d) k = 1 e k = −4
e) k = 1 e k = −1

TD.181 (FUVEST-77) A matriz

$$\begin{bmatrix} \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 & 1 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

é inversível se e somente se:

a) $\theta \neq n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$ b) $\theta \neq 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$ c) $\theta \neq \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$
d) $\theta \neq \frac{\pi}{4} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$ e) $\theta \in \mathbb{R}$

TD.182 (POLI-68) A é uma matriz quadrada cujo determinante é nulo, então pode-se garantir que·

a) existe uma matriz quadrada X, não nula, tal que AX = 0
b) qualquer que seja a matriz quadrada X, tem-se AX = 0
c) existe uma matriz quadrada X tal que AX = I (I = matriz unitária)
d) a matriz A é nula
e) nenhuma das respostas anteriores

TD.183 (CESCEM-72) A matriz M e sua inversa têm todos os elementos inteiros. Então os determinantes de M e de M^{-1}

a) são nulos   b) são iguais a +1
c) são iguais a −1   d) são iguais, valendo +1 e −1
e) são não nulos, nada mais se podendo concluir.

TD.184 (CESCEA-75) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O determinante de A^{-1} é igual a:

a) $-\frac{1}{2}$.   b) −2.   c) $\frac{1}{12}$.   d) 12.   e) $\frac{1}{15}$.

TD.185 (FFCLUSP-69) Consideremos o conjunto S de todas matrizes quadradas 2×2 que podem ser escritas sob a seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

(θ real qualquer). Qual das afirmações abaixo é verdadeira?

a) a soma de 2 matrizes quaisquer que pertençam a S ainda pertence a S
b) o produto de qualquer matriz por si mesma, pertence a S
c) a inversa de qualquer matriz de S existe e está em S
d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ pertence a S
e) nenhuma das respostas anteriores

TD.186 (ITA-77) Seja $X = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ uma matriz quadrada 2×2 onde m é um número inteiro qualquer. Se $P = (a_{ij})$ é uma matriz definida por $P = X^n + X^{n-1} + X^{n-2} + ... + X$, onde n é um número inteiro positivo ($n \geq 1$), então podemos afirmar que:

a) um elemento a_{ij} da matriz P é igual a $m \cdot \frac{n(n+1)}{2}$

b) um elemento a_{ij} da matriz P é igual a $m \cdot \frac{n(n-1)}{2}$

c) um elemento a_{ij} da matriz P é igual a $n \cdot \frac{m(m-1)}{2}$

d) P é uma matriz cujos elementos são todos inteiros, se, e somente se, m é par

e) nenhuma das respostas anteriores.

TD.187 (CESCEM-71) Define-se distância entre duas matrizes $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ quadradas e de mesma ordem n pela fórmula:

$$d(A; B) = \max |a_{ij} - b_{ij}|\ i, j = 1, 2, ..., n.$$

Assim, a distância entre as matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad e \quad \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \quad é:$$

a) -5 b) -3 c) 0 d) 3 e) 5

TD.188 (CESCEM-71) Dada uma matriz $A_{m \times n}$ e as operações:

1) +/A que transforma a matriz A numa outra matriz $A'_{m \times 1}$ onde cada elemento da única coluna de A' é obtido somando-se os elementos da linha correspondente de A.

2) $+ \not/ A$ que transforma a matriz $A_{m \times n}$ numa outra matriz $A''_{1 \times n}$ onde cada elemento da única linha de A'' é obtido somando-se os elementos da coluna correspondente de A.

Nestas condições, se A for a matriz identidade de ordem p a expressão $+ / (+ \not/ A)$ vale:

a) 2p b) p c) p^2 d) p.m e) p.n

TD.189 (CESCEM-70) São dadas duas matrizes A e B, quadradas de ordem p. A matriz I_p e a matriz O são, respectivamente a matriz identidade e a matriz nula, quadradas, de ordem p. Nestas condições:

a) AB = BA

b) se $AB = O_p$ então $BA = O_p$

c) se $AB = I_p$ então $BA = I_p$

d) AB = BA se e só se AB = I

e) nenhuma das respostas anteriores.

DETERMINANTES

TD.190 (CESCEM-70) Se A é uma matriz quadrada $n \times n$, I é a matriz identidade de ordem n, então o determinante da matriz $(A - xI)$ é um polinômio de grau n na variável x, cujas raízes são chamadas valores próprios de A. Então os valores próprios da matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad são:$$

a) -1; 0; 1 b) 0; 1 c) 0; -1; 3 d) 0; 3

e) nenhuma das respostas anteriores.

TD.191 MACK-73) Sendo $A = (a_{ij})$ uma matriz quadrada de ordem 2 e $a_{ij} = j - i^2$, o determinante da matriz A é:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

TD.192 (COMSART-73) O determinante:

$$\begin{vmatrix} x & y - x \\ y & x - y \end{vmatrix} \quad é \text{ igual a:}$$

é igual a:

a) $x^2 - y^2$ b) $(y - x)(y + x)$ c) $x^2 + y^2 + xy$ d) $x^2 + y^2 - xy$

e) nenhuma das respostas anteriores.

TD.193 (CESCEM-77) Sendo x e y, respectivamente, os determinantes das matrizes não singulares

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} -2a & 2c \\ -3b & 3d \end{bmatrix}, \text{ então } \frac{y}{x} \text{ vale}$$

a) 36 b) 12 c) -6 d) -12 e) -36

TD.194 (GV-70) Considere todos os determinantes de 2ª ordem, em que os elementos podem ser *zero* ou *um*. Então, a razão do número de determinantes positivos para o número total de tais determinantes é:

a) $\frac{4}{16}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{8}$ d) $\frac{3}{8}$ e) $\frac{3}{16}$

TD.195 (MACK-73) O conjunto-solução de:

$$\begin{vmatrix} \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - x) & -[\operatorname{tg}(\pi + x)]^2 \\ [\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} + x)]^2 & \cdot \cos(-x) \end{vmatrix} = 1 \text{ é}$$

a) IR b) $\{x \in IR \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \text{ inteiro}\}$ c) $\emptyset$

d) $\{x \in IR \mid x \neq \frac{k\pi}{2},\ k \text{ inteiro}\}$ e) $\{x \in IR \mid x = k\pi,\ k \text{ inteiro}\}$

TD.196 (MACK-77) Os valores de x, $0 \leqslant x < 2\pi$, tais que para todo a real se tenha $\begin{vmatrix} a & tgx \\ 1 & a - 2tgx \end{vmatrix} > 0$, são:

a) $\frac{3\pi}{4} < x < \pi$ ou $\frac{7\pi}{4} < x < 2\pi$

b) $\frac{3\pi}{4} < x < \frac{4\pi}{3}$ ou $\frac{3\pi}{2} < x < \frac{7\pi}{4}$

c) $\frac{\pi}{4} < x < \frac{2\pi}{3}$ ou $\frac{4\pi}{3} < x < \frac{7\pi}{4}$

d) $\frac{3\pi}{4} < x < \frac{7\pi}{6}$ ou $\frac{4\pi}{3} < x < \frac{7\pi}{4}$

e) não sei.

TD.197 (MACK-75) A sentença

$$\begin{vmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & y \\ y & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y+1 \\ y & x+1 \end{vmatrix} :$$

a) é equivalente a $\begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & y \\ y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y+1 \\ y & x+1 \end{pmatrix}$

b) é verdadeira para x e y não ambos nulos

c) só é verdadeira se $x = y = 0$ d) nunca é verdadeira e) é equivalente a $x = y$.

TD.198 (GV-74) O determinante $\begin{vmatrix} 2 & \log_5 5 & \log_5 5 \\ 5 & \log_5 125 & \log_5 25 \\ 8 & \log_3 27 & \log_3 243 \end{vmatrix}$ tem por valor:

a) 0 b) 1 c) 90 d) 80 e) 122

TD.199 (GV-72) O valor do determinante associado à matriz

$$\begin{bmatrix} sen^2 x & sen^2 x & 0 \\ cos^2 x & cos^2 y & sen^2 y \\ r^2 & 0 & r^2 \end{bmatrix}$$ é:

a) r^2 b) $r^2\ sen^4 x$ c) $r^2\ sen^2 x\ cos^2 y$

d) $r^2\ sen^2 x\ cos^2 y\ sen^2 y$ e) nenhuma das respostas anteriores.

TD.200 (GV-75) O determinante $\begin{vmatrix} 1 & \binom{n}{1} & \binom{n+1}{1} \\ 1 & \binom{n+1}{1} & \binom{n+2}{1} \\ 1 & \binom{n+2}{1} & \binom{n+3}{1} \end{vmatrix}$ é igual a:

a) 1 b) $\binom{n}{1}\binom{n+1}{1}\binom{n+2}{1}\binom{n+3}{1}$ c) 0

d) $\binom{n}{0}\binom{n}{1}\binom{n}{2}\binom{n}{3}$ e) $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{12}$

TD.201 (PUC-74) Se somarmos 4 a todos os elementos da matriz.

$$A - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

cujo determinante é D, então o determinante da nova matriz é:

a) 2 D b) 3 D c) 4 D d) 5 D e) 6 D

TD.202 (CESCEA-75) Considere as matrizes,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 10 \end{bmatrix}.$$

Assinalar dentre as afirmações abaixo, a correta:

a) C é inversível b) A + B é inversível c) O determinante de AB é 272.

d) O determinante da transposta de C é 1. e) $(A + B)C = AC + BC$.

TD.203 (MACK-75) As soluções da equação $\begin{vmatrix} x & -1 & 3 \\ -4 & x & 5 \\ 6 & -3 & 7 \end{vmatrix} = 0$ são:

a) 1 e 2 b) $-\frac{11}{7}$ e 3 c) 2 e $-\frac{11}{7}$

d) 2 e 4 e) 14 e -22.

TD.204 (GV-75) Para que valores de *a* a equação $\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & a & x \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ terá duas raízes reais iguais?

a) $a \geqslant 1$ b) $0 \leqslant a \leqslant 1$ c) só para $a = 1$

b) $a < 0$ e) só para $a = 0$

TD.205 (GV-75) Para que o determinante $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ sen^2 x & 1 & cos^2 x \\ \log_3 x & 2 & \log_3 2 \end{vmatrix}$ seja nulo, x real, 4x deve ser:

a) 36 b) 18 c) 6 d) 12 e) 16

TD.206 (GV-71) O quadrado do valor de x que satisfaz a equação

$$\begin{vmatrix} \log_x 16 & \log_x 2 & \log_x 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}, \quad x > 0 \text{ e } x \neq 1 \text{ vale:}$$

a) 2 b) 4 c) 16 d) $\frac{1}{4}$ e) $\frac{1}{2}$

TD.207 (FEI-73) Chama-se *traço* de uma matriz quadrada a soma dos elementos da diagonal principal. Sabendo que o traço vale 9 e o determinante 15, calcule os elementos x e y da matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix}$$

a) 4 e 6 b) 1 e 3 c) 2 e 4 d) 3 e 5

TD.208 (FUVEST-77) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} =$

a) 2 b) 1 c) 0 d) −1 e) −2

TD.209 (ITA-71) Qual o resto da divisão por 3 do determinante

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 & -6 \\ (3-4) & (6-1) & (-3-5) & (9+6) \\ 5 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

a) 0 b) 3 c) 7 d) 1

e) nenhuma das respostas anteriores.

TD.210 (GV-72) Sejam $A = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 10 & 3 \end{vmatrix}$ e $B = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & -3 & -4 & 1 \end{vmatrix}$

Então, $A + 2B$ é igual a

a) 30 b) −30 c) 15 d) −15 e) 10

TD.211 (CESCEA-75) O determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & x \\ x & 1 & x & 0 \\ x & x & 1 & 0 \\ x & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ é igual a:

a) $(x^2+1)(x-1)$ b) $(x^4-1)(x+1)$ c) $(x^3-1)(x-1)$
d) $(x^2-1)(x^2+2)$ e) $(x+2)(x^3-1)$.

TD.212 (GV-72) Seja $u = \begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 0 \\ 0 & x & 1 & 1 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix}$

Os valores reais de x, para os quais $u^2 - 2u + 1 = 0$ são:

a) $x = -1$ ou $x = -2$ b) $x = \pm 1$ c) $x = 1$ ou $x = 2$
d) $x = 1$ e) $x = \pm\sqrt{2}$

TD.213 (MACK-77) Se x, y e z são números reais positivos, então

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+z \end{vmatrix}$$ é igual:

a) ao volume de um paralelepípedo reto-retângulo cujos lados medem x, y e z
b) ao volume de um paralelepípedo reto-retângulo cujos lados medem $x+1$, $y+1$ e $z+1$
c) a 4 vezes o volume de um paralelepípedo reto-retângulo cujos lados medem x, y e z
d) a 4 vezes o volume de um paralelepípedo reto-retângulo cujos lados medem $x+1$, $y+1$ e $z+1$
e) não sei

TD.214 (CESCEA-70) O conjunto de todos os x para os quais

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5+x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 8+x \end{vmatrix} = 0$$ é:

a) (−2, −4, −7) b) (−3, −5, −8)
c) (−2, −3, −5) d) (−3, 0, 3)
e) (−3, −5, 2)

TD.215 (GV-70) O conjunto solução da equação

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 4 & 5 \\ x & x & x & 6 \\ x & x & x & x \end{vmatrix} = 0$$ é

a) $\{0; 1; 4; 6\}$
b) $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
c) $\{0; 1; 4; 5\}$
d) $\{0; 1; 2; 3\}$
e) nenhuma das respostas anteriores.

TD.216 (FFCLUSP-68) O conjunto de todos os valores reais de *x* que satisfazem a equação

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 \\ x^2 & x & 3x & x \\ x & 6 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0$$ é:

a) $x = 0$ b) $x > 0$ c) $x = 7$
d) o conjunto de todos os reais
e) nenhuma das respostas anteriores

TD.217 (CESCEA-69) Os valores de a para os quais

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a & 0 \\ a & 1 & 0 & a \\ a & 0 & 1 & a \\ 0 & a & a & 1 \end{vmatrix} > 0$$

são tais que:

a) $-1 < a < 1$

b) $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$

c) $a < -2$ ou $a > 2$

d) $a < -\frac{1}{2}$ ou $a > \frac{1}{2}$

e) $a > \frac{1}{2}$

TD.218 (CESCEA-71) Para que

$$\begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 & x \\ c & 0 & d & x & e \\ f & 0 & x & 0 & 0 \\ g & x & h & i & j \\ x & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} < -32$$

devemos ter:

a) $x > 2$ b) $0 < x < 5$ c) $x < -2$ d) $x > 5$ e) não sei.

TD.219 (EE LINS-67) Estando a, b, c, em P.A. de razão *r*, o determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

a) é sempre positivo
b) dada a razão *r*, depende de *a*
c) depende só de *r*, qualquer que seja *a*
d) é $a^3 - r^3$
e) nenhuma das respostas anteriores

TD.220 (GV-74) O determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \log 3 & \log 30 & \log 300 & \log 3000 \\ (\log 3)^2 & (\log 30)^2 & (\log 300)^2 & (\log 3000)^2 \\ (\log 3)^3 & (\log 30)^3 & (\log 300)^3 & (\log 3000)^3 \end{vmatrix}$

é:

a) -3 b) 0 c) 1 d) 6 e) 12

TD.221 (CESCEM-70) Dado o determinante de Vandermonde:

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots\cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots\cdots & a_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots\cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

onde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são termos de uma progressão aritmética de razão r e primeiro termo a_1, o valor do determinante

a) independe de n b) independe de r c) independe de a_1
d) é uma função somente de n e a_1
e) independe dos valores de n, r, e a_1

TD.222 (FEI-68) Seja M a matriz quadrada de 3ª ordem em que $a_{ij} = 2i - j$. Então o complemento algébrico do elemento a_{12} vale:

a) -4 b) 4 c) 0 d) 3
e) nenhuma das respostas anteriores

TD.223 (PUC-76) O cofator do elemento a_{23} da matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ é:

a) 2 b) 1 c) -1 d) -2 e) 3

TD.224 (ITA-67) Seja o determinante $D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

e A_1, A_2, A_3 respectivamente os complementos algébricos de c_1, c_2, c_3. Então $a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 =$

a) D b) -D c) 0 d) D^{-1} e) 1

TD.225 (ITA-69) Sejam

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}$$

matrizes quadradas 2×2. Definimos as matrizes: $\alpha \cdot X$; $X + Y$ e $X \cdot Y$ (α número real) por:

$$\alpha \cdot X = \begin{bmatrix} \alpha x_{11} & \alpha x_{12} \\ \alpha x_{21} & \alpha x_{22} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X + Y = \begin{bmatrix} x_{11} + y_{11} & x_{12} + y_{12} \\ x_{21} + y_{21} & x_{22} + y_{22} \end{bmatrix}$$

$$XY = \begin{bmatrix} x_{11}y_{11} + x_{12}y_{21} & x_{11}y_{12} + x_{12}y_{22} \\ x_{21}y_{11} + x_{22}y_{21} & x_{21}y_{12} + x_{22}y_{22} \end{bmatrix}$$

uma das afirmações abaixo é verdadeira, assinale-a.

a) $X \cdot X = \begin{bmatrix} x_{11}^2 & x_{12}^2 \\ x_{21}^2 & x_{22}^2 \end{bmatrix}$ b) det. $(d. \cdot X) = \alpha$ det X

c) det. $(X + Y)$ = det. X + det. Y d) det. $(\alpha X) = \alpha^2$ det. X

e) det. $(X \cdot Y)$ = det. X + det. Y

TD.226 (MACK-69) Se A é uma matriz quadrada de ordem 2, então:

a) sempre det. 2A = 2. det A
b) sempre det $(A)^2 = (\det. A)^2$
c) det. A = 0 se e somente se $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
d) se det. A = 1 então $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
e) sempre A = det. A

TD.227 (PUC-72) Qual das afirmações abaixo é falsa? Dadas A e B matrizes de ordem n.

a) $\det [A + B] = (\det A) + (\det B)$
b) $\det A = \det (A^t)$
c) $(\det A) \cdot (\det A^{-1}) = 1$
d) $\det (A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)$
e) $(\det A)(\det A^t) = (\det A)^2$

TD.228 (FEI-67) Seja M uma matriz quadrada de 3ª ordem; constrói-se uma nova matriz N em que cada coluna é a soma das outras duas colunas da matriz M. Sendo A o determinante de M e B o determinante de N, tem-se:

a) B = 0 b) B = A c) B = 2A d) A = 2B
e) nenhuma das respostas anteriores

TD.229 (COMSART-73) Quando os elementos da 3ª linha de uma matriz quadrada são divididos por x (x diferente de zero) e os elementos da 1ª coluna são multiplicados por y (y diferente de zero), o determinante da matriz fica dividido por:

a) xy b) $\frac{1}{xy}$ c) $\frac{x}{y}$ d) $\frac{y}{x}$
e) nenhuma das respostas anteriores.

TD.230 (GV-72) O determinante $\begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ac & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix}$ é igual a

a) $\begin{vmatrix} bca & a & a^2 \\ acb & b & b^2 \\ abc & c & c^2 \end{vmatrix}$ b) $abc \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$ c) $\frac{1}{abc} \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$ e) nenhuma das respostas anteriores.

TD.231 (GV-71) O determinante associado à matriz $\begin{bmatrix} 1 & x & 2x + b \\ 1 & y & 2y + b \\ 1 & z & 2z + b \end{bmatrix}$ é igual a:

a) 8xyz b) b c) 0 d) $x \cdot y \cdot z$
e) nenhuma das alternativas anteriores.

TD.232 (EESCUSP-69) O valor do determinante

$$\begin{vmatrix} a & a + r_1 & a + 2r_1 \\ b & b + r_2 & c + 2r_2 \\ c & c + r_3 & c + 2r_3 \end{vmatrix} \quad é:$$

a) 0 b) abc c) $r_1 r_2 r_3$ d) $a + b + c$ e) $r_1 + r_2 + r_3$

TD.233 (FEI-68) Sendo

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

um determinante de 3ª ordem, então:

P: sendo $a_{ij} = a_{2j}$, então $D = 0$ $(j = 1, 2, 3)$
Q: sendo $a_{ij} = a_{ji}$, então será sempre $D = 0$
R: sendo $a_{ij} = i^{j-1}$, então $D \neq 0$

Assinalar
a) se P, Q, R forem falsas b) se P e Q forem verdadeiras
c) se P e R forem verdadeiras d) se Q e R forem verdadeiras
e) se P, Q, R forem verdadeiras

TD.234 (MACK-77) A matriz A é quadrada, de ordem 3 e tal que $a_{ij} + a_{ji} = 0$, $1 \leqslant i$, $j \leqslant 3$. Então:

a) se $A \neq 0$, det $A > 0$ b) se $A \neq 0$, det $A < 0$ c) det A = 0
d) nada se pode afirmar sobre det A e) não sei.

TD.235 (CESCEM-68) Dadas as variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e as constantes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ qual das alternativas abaixo corresponde a uma combinação linear das variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

a) $a_1x_1 + a_2^2x_2 + a_3^3x_3 + \ldots + a_n^nx_n$
b) $a_1\sqrt{x_1} + a_2\sqrt{x_2} + a_3\sqrt{x_3} + \ldots + a_n\sqrt{x_n}$
c) $a_1x_1 + a_2x_2^2 + a_3x_3^3 + \ldots + a_nx_n^n$
d) $(a_1 + x_1) + (a_2 + x_2) + \ldots + (a_n + x_n)$
e) nenhuma das alternativas anteriores

TD.236 (EESCUSP-66) A única proposição correta é:

a) para se multiplicar um determinante por um número, multiplicam-se todos os seus elementos por esse número
b) todo determinante é igual à soma dos produtos dos elementos de uma fila pelos complementos algébricos dos elementos correspondentes de outra fila paralela
c) um determinante não se altera se aos elementos de uma fila se adicionam os elementos correspondentes de uma outra fila paralela multiplicados por um mesmo fator arbitrário
d) todo determinante é igual à soma dos produtos dos elementos da diagonal principal pelos respectivos complementos algébricos
e) quando se trocam as linhas de uma matriz com as colunas da mesma ordem, o determinante da matriz transposta é o oposto do determinante da matriz dada.

TD.237 (EESCUSP-68) Um determinante é nulo somente quando:

a) todos os seus elementos são nulos
b) todos os elementos de uma linha são nulos
c) todos os elementos de uma coluna são nulos
d) duas colunas são iguais
e) nenhuma das respostas anteriores

TD.238 (GV-70) O determinante associado a matriz $\begin{bmatrix} 1 & -11 & 6 \\ -2 & 4 & -3 \\ -3 & -7 & 2 \end{bmatrix}$

é nulo porque

a) tem duas linhas proporcionais
b) tem duas colunas proporcionais
c) tem elementos negativos
d) uma coluna é combinação linear das outras duas
e) nenhuma das respostas anteriores.

TD.239 (EPUSP-67) Acrescentando-se a unidade a cada um dos elementos da matriz

$$\left\|\begin{matrix} 1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ 1 & a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & a_3 & b_3 & c_3 \\ 1 & a_4 & b_4 & c_4 \end{matrix}\right\|$$, o determinante

a) não se altera
b) aumenta de 1
c) aumenta de 4
d) fica multiplicado por 2
e) nenhuma das respostas anteriores.

TD.240 (ITA-76) Seja Q uma matriz 4×4 tal que $\det Q \neq 0$ e $Q^3 + 2Q^2 = 0$.
Então, temos:

a) $\det Q = 2$
b) $\det Q = -2$
c) $\det Q = -16$
d) $\det Q = 16$
e) nenhuma das respostas anteriores

TD.241 (ITA-75) Seja A uma matriz quadrada de ordem n, tal que $A^{-1} = A^t$. Se $\det A = 1$, dizemos que A é uma matriz de rotação e se $\det A = +1$, A é uma matriz de reflexão. Apoiados em tais definições, podemos afirmar que:

a) se n é ímpar, o produto de duas matrizes de reflexão é de reflexão
b) a soma de duas matrizes de rotação é de rotação
c) o produto de duas matrizes de rotação é de rotação
d) a matriz inversa de toda matriz de rotação é de reflexão
e) nenhuma das respostas anteriores

TD.242 (ITA-75) Sejam as matrizes reais $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
e m um número real. Seja: $AX = mX$. Então podemos afirmar que:

a) se $\det(A - mI) \neq 0$, então $x + y = 0$ e $x \cdot y \neq 0$.
b) se $\det(A - mI) = 0$, então existem dois números reais x, y tais que $x + y \neq 0$ ou $x \cdot y \neq 0$.
c) se $\det(A - mI) = 0$, então $\det A = 0$ e $m = 0$.
d) se $\det A = 0$, então não existem dois números reais x, y, tais que $AX = mX$.
e) nenhuma das respostas anteriores.

SISTEMA LINEAR DE EQUAÇÕES

TD.243 (FUVEST-77) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ 4y + 5z = 23 \\ 6z = 18 \end{cases}$

Então x é igual a

a) 27 b) 3 c) 0 d) -2 e) 1

TD.244 (MACK-75) Dado o sistema: $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ -x + y + z = 1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$

os valores de x, y e z que constituem sua solução:

a) são todos distintos entre si
b) são indeterminados
c) possuem soma nula
d) são iguais entre si
e) formam uma progressão aritmética de razão 1.

TD.245 (MACK-74) As soluções do sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 28 \\ 2x - y = 32 \end{cases}$$

onde $x > 0$, $y > 0$ e $z > 0$ obedecem às seguintes restrições:

a) $2 < x < 8$ e $2 < y < 8$
b) $16 < x < 20$ e $0 < y < 8$
c) $10 < x < 20$ e $2 < y < 10$
d) $1 < x < 3$ e $8 < y < 12$
e) $7 < x < 15$ e $9 < y < 11$

TD.246 (COMBITEC-COMBIMED-75) Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} 5732x + 2134y + 2134z - 7866 \\ 2134x + 5732y + 2134z - 670 \\ 2134x + 2134y + 5732z - 11464 \end{cases}$$

obtemos para $x - y - z$ o valor

a) -2 b) -1 c) 0 d) 1 e) 2

TD.247 (CESCEA-70) Se $x = a$, $y = b$, $z = c$ e $w = d$ é a solução do sistema

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \\ z + w = 1 \\ y + w = 0 \end{cases}$$

então, o produto a.b.c.d vale:

a) 1 b) -1 c) $-\frac{1}{16}$ d) $-\frac{1}{8}$ e) -20

TD.248 (PUC-77) Se tivermos

$$\begin{cases} x + y + z = -1 \\ x + z + t = 5 \\ y + z + t = 7 \\ x + y + t = 4 \end{cases}$$

então $x + y + z + t$ é igual a:

a) -1 b) 7 c) 5 d) 4 e) $\frac{5}{4}$

TD.249 (MACK-75) Dado o sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + \ldots\ldots\ldots\ldots + x_n = 1 \\ x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + \ldots\ldots\ldots\ldots + x_n = 2 \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_5 + \ldots\ldots\ldots\ldots + x_n = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_5 + \ldots\ldots\ldots\ldots + x_n = 4 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + \ldots x_{n-1} \qquad\qquad = n \end{cases}$$

os valores de x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, que o satisfazem:

a) são todos iguais
b) formam, a partir de x_2, uma progressão aritmética
c) formam, a partir de x_2, uma progressão geométrica
d) não possuem lei de formação
e) não podem ser determinados.

TD.250 (EAESP-FGV-77) Consideremos os sistemas de equações:

$$(A) \quad \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + 3y - z = 0 \\ 4x + 5y + z = 6 \end{cases}$$

$$(B) \quad \begin{cases} x + y + z = 3 \\ -y + 3z = 6 \end{cases}$$

Qual das afirmações abaixo é correta?

a) os sistemas são determinados
b) os sistemas são impossíveis
c) (A) ou (B) é determinado
d) os sistemas são equivalentes
e) (A) ou (B) é impossível.

TD.251 (GV-74) O sistema $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - 3y + 5z = 11 \\ x - 5y + 6z = 9 \end{cases}$

a) é impossível
b) é possível e determinado
c) é possível e indeterminado
d) admite apenas a solução $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$
e) admite um número finito de soluções.

TD.252 (CESCEM-72) A matriz incompleta do sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + 2y + 3z = 10 \\ 2x + 3y + 4z = 16 \end{cases}$$

tem determinante nulo. Podemos concluir que o sistema:

a) não tem solução
b) tem um número finito de soluções, porém a solução não é única
c) tem infinitas soluções, porém nem todo ponto do $\mathbb{R}^3$ é solução
d) tem uma única solução
e) admite todo ponto do $\mathbb{R}^3$ como solução.

TD.253 (CESCEA-76) Estudando-se o seguinte sistema de 3 equações a 3 incógnitas

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \\ x + 3y - 2z = 1 \end{cases}$$

obtém-se:

a) o sistema é possível, determinado e admite uma única solução $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$
b) o sistema é impossível
c) o sistema é possível, porém indeterminado, com uma incógnita arbitrária
d) o sistema é possível, porém indeterminado, com duas incógnitas arbitrárias
e) o sistema é indeterminado, com uma incógnita arbitrária, sendo $(0, 1, 3)$ uma solução.

TD.254 (PUC-70) O sistema: $\begin{cases} 5x + 3y - 11z = 13 \\ 4x - 5y + 4z = 18 \\ 9x - 2y - 7z = 25 \end{cases}$

a) só apresenta solução trivial
b) é possível e determinado não tendo solução trivial
c) é possível e indeterminado
d) é impossível
e) nenhuma das anteriores

TD.255 (MACK-75) O sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 2x + ay = 4 \end{cases}$

a) tem infinitas soluções qualquer que seja *a*:
b) só tem solução se $a = 3$
c) é impossível se $a \neq 3$
d) nunca é impossível
e) tem solução única qualquer que seja *a*.

TD.256 (CESCEA-70) O conjunto de todos os m para os quais o sistema

$$\begin{cases} mx + y = 1 \\ 4x + my = 2m \end{cases}$$

não tem solução, é:

a) $(-2, 0, 2)$ b) $(0, 1, 4, 5)$ c) $(-2, 1)$
d) $(-2, 2)$ e) $(0, 1, 2)$

TD.257 (PUC-70) O sistema de equações do 1º grau $\begin{cases} ax - y = 1 \\ ay - 4x = 1 \end{cases}$ tem solução determinada se:

a) $a \neq 4$ b) $a \neq -2$ ou $+2$ c) $a \neq 0$
d) $a \neq 1$ e) nenhuma das respostas anteriores é correta.

TD.258 (MACK-77) O lugar geométrico dos pares (x, y), soluções do sistema

$\begin{cases} ax + 3y = 8 \\ 3x + ay = 2(a - 1) \end{cases}$ é:

a) uma reta se $a = 3$ b) uma reta se $a = -3$
c) um único ponto se $a = 3$ d) um único ponto se $a = -3$
e) não sei.

TD.259 (CESCEM-76) O conjunto dos valores de $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ que tornam o sistema $\begin{cases} 3x - 2y = a \\ -6x + 4y = b \end{cases}$ indeterminado é

a) $\{(0; 0)\}$ b) $\{(1; -2)\}$ c) $\{(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha = \frac{\beta}{2}\}$
d) $\{(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid \beta = -2\alpha\}$ e) $\varnothing$

TD.260 (MACK-69) — O sistema $\begin{cases} ax - by = 6 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases}$

a) é impossível se $a = 12$ e $b \neq -30$
b) é possível e determinado se $a = 12$ e $b = -30$
c) é impossível se $a \neq 12$ e $b \neq -30$
d) é determinado se $a = 12$ e $b = -30$
e) é indeterminado se $a = 12$ e $b = -30$

TD.261 (FEI-68) — Dado o sistema linear

$\begin{cases} ax + 2y = 5 \\ 3x - 2y = b \end{cases}$

tem-se:

P : se $a = -3$, o sistema é sempre incompatível
Q : se $a \neq -3$, o sistema é sempre determinado
R : se $b = -5$, o sistema é sempre compatível

Assinale:

a) se P e Q são verdadeiras b) se todas forem verdadeiras
c) se P e R verdadeiras d) se Q e R verdadeiras
e) se todas forem falsas

TD.262 (PUC-74) O sistema:

$\begin{cases} ax - 2y = 1 \\ bx + 4y = 5 \end{cases}$

tem solução determinada se e somente se:

a) $a = \frac{b}{2}$ b) $2a \neq -b$ c) $2a \neq b$ d) $a + 2b = 0$
e) nenhuma das anteriores.

TD.263 (CESCEA-72) Para que o sistema $\begin{cases} ax + by = 1 \\ cx + by = 1 \end{cases}$

seja possível e determinado é suficiente que:

a) $a - c \neq 0$ b) $b \neq 0$ c) $b(a - c) \neq 0$ d) $a(a - c) \neq 0$ e) não sei.

TD.264 (GV-72) Assinale a afirmação verdadeira

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x + y = 6 \end{cases}$ é possível e determinado

b) $\begin{cases} ax + y = 2 \\ x + ay = 3 \end{cases}$ admite uma *única* solução para todo a real

c) $\begin{cases} ax + y = 2 \\ -x + ay = 3 \end{cases}$ admite uma *única* solução para todo a real

d) $\begin{cases} ax + by = c \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases}$ admite uma *infinidade* de soluções para $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} \neq \frac{c}{c_1}$

e) $\begin{cases} 2x + 4y = 8 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$ é impossível

TD.265 (FFCLUSP-69) É dado o sistema de equações lineares em x e y

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ \sqrt{3x} + \sqrt{5y} = m \\ 3x + 5y = m^2 \end{cases}$$

Qual das desigualdades abaixo deve ser satisfeita para *m* de tal forma que o sistema admita solução?

a) $-2 < m < 1$ b) $-1 < m < 3$ c) $m > 3$
d) $m < -3$ e) $m^2 > 5$

TD.266 (EAESP-GV-77)

Dado o sistema linear $\begin{cases} x + y = 5 \\ 3x - 2y = k \\ x + ky = 5 \end{cases}$ onde k é um número real,

uma das afirmações seguintes é correta.

a) se $k = 0$, o sistema é indeterminado
b) se $k = 1$ ou $k = 15$ o sistema é impossível
c) se $k \neq 0$ o sistema é indeterminado
d) se $k \neq 0$ o sistema é impossível
e) se $k = 1$ ou $k = 15$ o sistema é determinado.

TD.267 (CESCEA-77) O sistema $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 2 \\ 3x + 3y + mz = 3 \end{cases}$ é:

a) possível e determinado para $m = 4$ b) impossível para todo m
c) impossível para $m = 3$
d) possível e indeterminado para todo m
e) possível e determinado para $m \neq 3$.

TD.268 (CESGRANRIO-COMCITEC-73) Dado o sistema de equações

$$\begin{cases} rx + y + z = 1 \\ x + ry + z = 1 \\ x + y + rz = -2 \end{cases}$$

onde r é um número real, tem-se que:

a) o conjunto solução é finito e não vazio, para r = -2
b) o conjunto solução contém uma infinidade de pontos do espaço para r = 1
c) o conjunto solução é vazio para r = 2
d) o conjunto solução contém um único ponto do espaço para $r \neq 1$ e $r \neq -2$
e) o conjunto solução é vazio, qualquer que seja r.

TD.269 (PUC-76) Os valores de k para que o sistema

$$\begin{cases} x - z = 1 \\ kx + y + 3z = 0 \\ x + ky + 3z = 1 \end{cases}$$

tenha solução única, são:

a) $k \neq +1$ e $k \neq -3$
b) $k \neq +1$ e $k \neq -5$
c) $k \neq +1$ e $k \neq -6$
d) $k \neq +1$ e $k \neq -2$
e) $k \neq +1$ e $k \neq -4$

TD.270 (G.V.-76) Seja S o sistema de equações simultâneas:

$$\begin{cases} x + y + z = k \\ x - y - z = k \\ x + y - z = k \end{cases}$$

onde k é uma constante real. Então:

a) S possui uma solução somente para k = 0
b) S possui infinitas soluções para $k \neq 0$
c) S possui solução única qualquer que seja k real
d) S não possui solução qualquer que seja k real
e) Se x = y, então z = -k para qualquer valor de k real

TD.271 (MACK-75) A equação matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ k \end{bmatrix}$$

a) não admite solução qualquer que seja k
b) admite solução qualquer que seja k
c) admite solução somente se k = 4
d) admite solução somente se k = 8
e) admite solução somente se k = 12.

TD.272 (ITA-70) Considere o sistema de equações algébricas lineares:

$$\begin{cases} \alpha x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = \beta \end{cases}$$

O sistema terá solução única se:

a) $\beta = 0$ e $\alpha = 0$
b) $\beta = 0$ e $\alpha \neq 0$
c) $\beta \neq 0$ e $\alpha = 0$
d) $\beta = \alpha$
e) β e α forem números complexos conjugados

TD.273 (ITA-69) – Para que valores reais de *a* e *b* o seguinte sistema não admite solução?

$$\begin{cases} 3x + ay + 4z = 0 \\ x + y + 3z = -5 \\ 2x - 3y + z = b \end{cases}$$

a) a = -2 e b = 5
b) $a > -2$ e $b \neq 4$
c) a = -2 e $b \neq 5$
d) a = b = 1
e) nenhuma das respostas anteriores

TD.274 (PUC-73) Os valores de *a* e *b*, de modo que o sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = a \\ 3x + 6y - 4z = 4 \\ 2x + by - 6z = 1 \end{cases}$$

seja indeterminado, são:

a) a = 4 e b = 3
b) a = 3 e b = 4
c) a = 2 e b = 1
d) a = 3 e b = 2
e) a = 2 e b = 3

TD.275 (GV-73) Seja o sistema $\begin{cases} x + 2y + mz = 2 \\ x - y + z = 1 \\ y + 3z = n \end{cases}$ então:

a) para todo valor de m, o sistema é impossível
b) $m = 10$ e $n \neq \frac{1}{3}$ $\Longrightarrow$ sistema possível e determinado
c) $m = 10$ e $n = \frac{1}{3}$ $\Longrightarrow$ sistema possível e indeterminado
d) $m \neq 10$ $\Longrightarrow$ sistema impossível
e) nenhuma das anteriores.

TD.276 (CESCEM-73) Podemos afirmar que o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = -4 \\ 5x - 6y + 7z = -8 \\ 6x - 8y + pz = q \end{cases}$$

é:

a) impossível, se p = 10 e $q \neq -12$
b) possível e determinado, se $q \neq -12$
c) indeterminado, se $p \neq 10$
d) tal que só existe a solução trivial, se p = 10 e q = -12
e) possível e indeterminado, se p = 12 e q = 10

TD.277 (ITA-72) Qual é a relação que a, b e c devem satisfazer tal que o sistema abaixo tenha pelo menos uma solução?

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 2x + 6y - 11z = b \\ x + 2y + 7z = c \end{cases}$$

a) $5a = 2b - c$ b) $5a = 2b + c$
c) $5a \neq 2b + c$ d) não existe relação entre a, b, c
e) nenhuma das respostas anteriores.

TD.278 CESGRANRIO-COMCITEC-73) Considere o sistema

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = a \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = b \\ 5x_2 - x_3 = c \end{cases}$$

Então:

a) o sistema possui solução quaisquer que seja a, b, c
b) o sistema possui solução apenas quando $a = b = c = 0$
c) o sistema possui solução se e somente se $2a - b + c = 0$
d) o sistema possui solução única quando $a = b = c = 0$
e) as quatro afirmativas anteriores são falsas.

TD.279 (FFCLUSP-67) — O sistema

$$\begin{cases} x + ay + a^2z = a^3 \\ x + by + b^2z = b^3 \\ x + cy + c^2z = c^3 \end{cases}$$

a) é sempre determinado
b) é determinado para $a \neq b$, $b \neq c$
c) é determinado para $a \neq b \neq c \neq a$
d) é indeterminado para $a \neq b \neq c \neq a$
e) nenhuma das respostas anteriores

TD.280 (EESCUSP-67) — Seja o sistema:

$$\begin{cases} a_{11} x_1 & = b_1 \\ a_{21} x_1 + x_2 & = b_2 \\ a_{31} x_1 + a_{32}x_2 + x_3 & = b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{n_1} x_1 + \dots + a_{n,\,n-1}x_{n-1} + x_n & = b_n \end{cases}$$

Então o sistema admite

a) sempre solução única
b) nenhuma solução
c) solução, somente se existe um número λ tal que $b_1 = \lambda a_{11}$
d) solução, somente se $a_{11} \neq 0$
e) solução somente se $b_1 = 0$

TD.281 (EAESP-FGV-77) O determinante da matriz incompleta associada a um sistema homogêneo de n equações lineares a n incógnitas é nulo. Em vista desta informação podemos concluir que:

a) o determinante da matriz completa é nulo
b) o sistema é indeterminado
c) o sistema é determinado
d) o sistema não tem solução
e) o determinante da matriz completa é não nulo.

TD.282 (CESGRANRIO-COMCITEC-73) Considere as seguintes afirmações sobre um sistema de 2 equações lineares homogêneas a 3 incógnitas:

1 — o sistema possui alguma solução diferente de (0, 0, 0)
2 — se (x, y, z) e (x', y', z') são soluções, então (x + x', y + y', z + z') também é solução
3 — se (x, y, z) é solução e λ é um número real qualquer, então $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ é solução

Tem-se que:

a) as três afirmativas são falsas
b) apenas uma afirmativa é falsa
c) apenas uma afirmativa é verdadeira
d) as três afirmativas são verdadeiras
e) um sistema de duas equações lineares a três incógnitas nunca é homogêneo

TD.283 (CESCEM-73) A matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$$

tem determinante nulo e nenhum dos números a, b ou c é zero. Então, pode-se garantir que o sistema linear homogêneo nas incógnitas (x, y, z)

$$\begin{cases} ay + bz = 0 \\ -ax + cz = 0 \\ -bx - cy = 0 \end{cases}$$

é tal que

a) qualquer uma das equações é combinação linear das outras duas.
b) não existe solução para o sistema.
c) qualquer terna real (x, y, z) é solução.
d) a única solução é a trivial ($x = 0$, $y = 0$, $z = 0$).
e) existe uma única solução não trivial.

TD.284 (GV-74) O sistema $\begin{cases} 2x - y + 5z = 0 \\ 3x - 2y - z = 0 \\ 5x - 3y + 4z = 0 \end{cases}$ é:

a) impossível
b) possível e indeterminado
c) possível e com solução $x = -11$, $y = -17$ e $z = 1$
d) possível, e admite apenas a solução trivial, $x = y = z = 0$
e) nenhuma das respostas anteriores.

TD.285 (CESCEM-75) O sistema de equações:

$$\begin{cases} 3x + 4y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

a) não tem solução
b) admite uma única solução não trivial
c) admite apenas a solução trivial
d) admite infinitas soluções
e) admite apenas soluções não triviais.

TD.286 (UNICAMP-67) O sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 3x - 2y - 6 = 0 \\ 4x - 8y - 15 = 0 \\ 12x - 8y - 24 = 0 \end{cases} \quad é$$

a) determinado b) impossível c) homogêneo
d) indeterminado e) não tem solução no campo dos números reais

TD.287 (ITA-74) Seja a equação matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 7 \\ 1 & -22 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Podemos afirmar:

a) a equação tem uma e somente uma solução
b) a equação tem duas e somente duas soluções
c) a equação tem três e somente três soluções
d) a equação não tem solução.
e) nenhuma das respostas anteriores.

TD.288 (POLI-66) O sistema de equações:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 0 \\ \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} = 0 \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{y} + \dfrac{4}{z} = 0 \end{cases}$$

a) é impossível b) é indeterminado c) é possível e determinado
d) só admite a solução nula e) nenhuma das respostas anteriores

TD.289 (ITA-66) Consideremos o sistema de 2 equações nas 2 incógnitas x, y:

$$\begin{cases} x - y = kx \\ -x + 5y = ky \end{cases}$$

a) qualquer que seja o valor de k, o sistema tem solução diferente da solução $x = 0$, $y = 0$.
b) existe pelo menos um valor de k para o qual o sistema tem solução diferente da solução $x = 0$, $y = 0$.
c) para nenhum valor de k, o sistema tem solução diferente da solução $x = 0$, $y = 0$.

TD.290 (CESGRANRIO-76) Sejam λ_1 e λ_2 os valores distintos de λ para os quais a equação

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

admite solução $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Então, $\lambda_1 + \lambda_2$ é

a) -5 b) 4 c) 10 d) -6 e) 0

TD.291 (FUVEST-77) A equação matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

admite mais de uma solução se e somente se λ =

a) 0 b) $\pm\sqrt{3}$ c) ± 3 d) $\pm\sqrt{6}$ e) $\pm\sqrt{11}$

TD.292 (MACK-75) Os valores de a para que o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - ay + z = 0 \\ ax - y - z = 0 \end{cases}$$

admita soluções diferentes da trivial são

a) $a = 0$ e $a = 1$ b) $a = -1$ e $a = 1$
c) $a = -1$ e $a = 0$ d) $a = -1$ e $a = 0$ e $a = 1$
e) nenhuma das anteriores.

TD.293 (CESCEA-69) Analise o sistema

$$\begin{cases} x + ay + bz + cz = 0 \\ x + az + by + cz = 0 \\ x + az + bz + cy = 0 \end{cases}$$

e assinale qual das afirmações que seguem é verdadeira:

a) indeterminado
b) impossível
c) a única solução é $x = y = z = 0$
d) possível e $x = \dfrac{a}{2}$, $y = -\dfrac{b}{2}$, $z = -\dfrac{c}{2}$
e) determinado

TD.294 (CESCEA-75) Os valores de m para os quais o sistema

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - 3y + 2z = 0 \\ 4x + 3y + mz = 0 \end{cases}$$

admite somente a solução $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ são:

a) $m > 0$ b) $m < 5$ c) $m = 4$ d) $m > -2$ e) $m \neq 4$

TD.295 (PUC-72) Os valores de k tais que o sistema homogêneo

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x - ky + z = 0 \\ kx - y - z = 0 \end{cases}$$ admite somente a solução trivial, são:

a) $k \neq 0$ e $k \neq -1$
b) $k \neq 1$ e $k \neq -1$
c) $k = 0$ e $k \neq 2$
d) $k \neq 1$ e $k \neq -2$
e) $k \neq 2$ e $k \neq -1$

TD.296 (ITA-68) Seja $$\begin{cases} \lambda x + y = 0 \\ x + \lambda y + z = 0 \\ y + \lambda z = 0 \end{cases}$$

O sistema acima terá solução não trivial para um certo conjunto de valores de λ. Para que isto se verifique este conjunto é constituído:

a) apenas por números complexos não reais
b) apenas por números reais
c) apenas por números racionais
d) apenas por números irracionais
e) apenas por números inteiros

TD.297 GV-70) Os valores de **m** para os quais o sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} (m + 6)x - 2y + 4z = 0 \\ 5x - 4my - 4z = 0 \\ 3x - y + z = 0 \end{cases}$$

admite soluções **diferentes da trivial** são:

a) 5 e 3 b) 6 e -1 c) -6 e 1 d) 6 e 1
e) nenhuma das respostas anteriores.

TD.298 (ITA-76) Considere a matriz 3×3, $M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix}$. Sabendo que

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$, então, temos:

a) det M é um número positivo
b) Existe uma matriz P, 3×3, tal que: $MP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
c) $M_{21} = -3M_{22} - 2M_{23}$
d) se $M_{21} = 3M_{22} + 2M_{23}$, então $M_{21} \neq 0$
e) nenhuma das respostas anteriores.

TD.299 (FFCLUSP-69) Para qual dos seguintes valores de α o sistema linear em x, y e z:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ (\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha)y + (2 \operatorname{sen} \alpha)z = 0 \\ (\cos \alpha)y + (\cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha)z = 0 \end{cases}$$

admite soluções não triviais?

a) $\frac{5\pi}{4}$ b) $\frac{3\pi}{4}$ c) $\frac{\pi}{4}$ d) $\frac{7\pi}{8}$ e) $\frac{5\pi}{8}$

TD.300 (ITA-72) Quais os valores de α de modo que o sistema

$$\begin{cases} (\operatorname{sen} \alpha - 1)x + 2y - (\operatorname{sen} \alpha)z = 0 \\ (3 \operatorname{sen} \alpha)y + 4z = 0 \\ 3x + (7 \operatorname{sen} \alpha)y + 6z = 0 \end{cases}$$ admite soluções não triviais?

a) $\alpha = n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$
b) $\alpha = n\pi + \frac{\pi}{3}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$
c) $\alpha = n\pi + \frac{\pi}{2}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
d) não há valores de α
e) nenhuma das respostas anteriores.

TD.301 (FFCLUSP-66) Para que o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ ax + by + cz = 0 \\ a^2x + b^2y + c^2z = 0 \end{cases}$$

admita solução não trivial é suficiente que:

a) $a = b$ ou $b = c$ ou $a = c$
b) $a \neq b \neq c$
c) $abc = 0$
d) $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$
e) nenhuma das respostas anteriores.

TD.302 (ITA-77) Seja $$\begin{cases} (k_1 + k_2)x + (k_2 - k_3)y + (k_1 - k_3)z = 0 \\ (k_2 - k_1)x + (k_2 + k_3)y + (k_3 - k_1)z = 0 \\ (k_1 - k_2)x + (k_3 - k_2)y + (k_3 + k_1)z = 0 \end{cases}$$
um sistema homogêneo de equações lineares reais em x, y e z. Com respeito ao sistema acima podemos afirmar:

a) se $k_1 \neq \pm k_2$, $k_1 \neq \pm k_3$ e $k_2 \neq \pm k_3$ então o sistema só admite solução trivial
b) se $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 \neq 0$, então o sistema só admite solução trivial
c) o sistema admite solução não trivial, se e somente se, $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = 0$
d) se $k_1 \neq 0$, $k_2 \neq 0$ e $k_3 \neq 0$, então o sistema só admite solução trivial
e) nenhuma das respostas anteriores.

TD.303 (FEI-66) A matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

tem característica

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4
e) nenhuma das respostas anteriores.

TD.304 (PUC-73) A característica da matriz: $M = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ é:

a) 4 b) 3 c) 1 d) 0 e) 2

TD.305 (EESCUSP-66) Se as linhas de uma matriz são combinações lineares, de **p** delas, a sua característica é:

a) $p + 1$ b) p c) $\leqslant p$ d) $\geqslant p$ e) $\geqslant p + 1$

TD.306 (MACK-75) Se numa matriz A de terceira ordem todas as sub-matrizes de segunda ordem têm determinante nulo, então:

a) a característica da matriz A pode ser 3
b) a característica da matriz A pode ser 2
c) a característica da matriz A pode ser 1
d) todos os elementos da matriz A são nulos
e) a matriz A é inversível.

TD.307 (EPUSP-65) Sendo nulos todos os menores de 2ª ordem de uma matriz de 4ª ordem.

a) o determinante da matriz é nulo
b) o determinante não é necessariamente nulo, mas são nulos todos os menores de 3ª ordem
c) pode existir um menor de 3ª ordem não nulo
d) a característica da matriz é dois
e) nenhuma das respostas anteriores.

TD.308 (POLI-67) Sendo a, b, c, d quatro números diferentes e não nulos, o número de menores de 2ª ordem, não nulos que podem ser extraídos da matriz

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & b & c & d \\ 0 & a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ 0 & a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ 0 & a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{Vmatrix} \text{ é:}$$

a) 60 b) 76 c) 84 d) 100
e) nenhuma das respostas anteriores.

TD.309 (EPUSP-68) Seja S um sistema linear homogêneo, com 3 equações e 3 incógnitas x, y e z. Seja T o sistema obtido acrescentando a S uma nova equação $ax + by + cz = 0$.

a) a característica de S pode ser maior que a de T
b) o sistema T pode ser incompatível
c) o sistema T pode ser indeterminado
d) a nova equação é sempre combinação linear das outras três
e) nenhuma das respostas anteriores.

TD.310 (FEI-67) Um sistema linear homogêneo de três equações e três incógnitas admite como soluções os ternos (1, 3, 5) e (2, 4, 5), mas não o terno (1, 1, 1). A característica do sistema é:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3
e) nenhuma das respostas anteriores.

RESPOSTAS

TD.1 c	**TD.36** d	**TD.71** c	**TD.106** b
TD.2 d	**TD.37** d	**TD.72** e	**TD.107** c
TD.3 e	**TD.38** a	**TD.73** b	**TD.108** b
TD.4 b	**TD.39** d	**TD.74** b	**TD.109** c
TD.5 e	**TD.40** a	**TD.75** a	**TD.110** b
TD.6 b	**TD.41** a	**TD.76** c	**TD.111** d
TD.7 d, e	**TD.42** c	**TD.77** a	**TD.112** d
TD.8 b	**TD.43** a	**TD.78** c	**TD.113** a
TD.9 d	**TD.44** d	**TD.79** a	**TD.114** c
TD.10 c	**TD.45** d	**TD.80** d	**TD.115** a
TD.11 b	**TD.46** c	**TD.81** b	**TD.116** c
TD.12 e	**TD.47** a	**TD.82** b	**TD.117** b
TD.13 d	**TD.48** a	**TD.83** c	**TD.118** b
TD.14 d	**TD.49** e	**TD.84** b	**TD.119** b
TD.15 d	**TD.50** a	**TD.85** d	**TD.120** c
TD.16 a	**TD.51** b	**TD.86** b	**TD.121** d
TD.17 e	**TD.52** b	**TD.87** a	**TD.122** b
TD.18 d	**TD.53** a	**TD.88** b	**TD.123** b
TD.19 b	**TD.54** c	**TD.89** b	**TD.124** e
TD.20 c	**TD.55** a	**TD.90** c	**TD.125** d
TD.21 b	**TD.56** d	**TD.91** e	**TD.126** a
TD.22 b	**TD.57** e	**TD.92** b	**TD.127** b
TD.23 e	**TD.58** c	**TD.93** a	**TD.128** d
TD.24 b	**TD.59** b	**TD.94** e	**TD.129** a
TD.25 e	**TD.60** d	**TD.95** a	**TD.130** a
TD.26 d	**TD.61** b	**TD.96** e	**TD.131** a
TD.27 d	**TD.62** a	**TD.97** a	**TD.132** c
TD.28 b	**TD.63** e	**TD.98** e	**TD.133** e
TD.29 d	**TD.64** b	**TD.99** e	**TD.134** d
TD.30 b	**TD.65** a	**TD.100** c	**TD.135** b
TD.31 d	**TD.66** c	**TD.101** b	**TD.136** a
TD.32 e	**TD.67** d	**TD.102** d	**TD.137** a
TD.33 a	**TD.68** b	**TD.103** c	**TD.138** e
TD.34 b	**TD.69** a	**TD.104** b	**TD.139** b
TD.35 c	**TD.70** c	**TD.105** e	**TD.140** e

TD.141 d
TD.142 a
TD.143 a
TD.144 d
TD.145 d
TD.146 c
TD.147 d
TD.148 b
TD.149 b
TD.150 d
TD.151 b
TD.152 b
TD.153 e
TD.154 e
TD.155 c
TD.156 e
TD.157 b
TD.158 b
TD.159 e
TD.160 b
TD.161 b
TD.162 b
TD.163 d
TD.164 a
TD.165 d
TD.166 c
TD.167 a
TD.168 e
TD.169 e
TD.170 b
TD.171 e
TD.172 b
TD.173 b
TD.174 a
TD.175 a
TD.176 a
TD.177 b
TD.178 c
TD.179 d
TD.180 d
TD.181 a
TD.182 a
TD.183 d
TD.184 a
TD.185 c
TD.186 a
TD.187 e
TD.188 b
TD.189 c
TD.190 d
TD.191 d
TD.192 a
TD.193 c
TD.194 e
TD.195 b
TD.196 a
TD.197 e
TD.198 a
TD.199 b
TD.200 c
TD.201 d
TD.202 c
TD.203 c
TD.204 e
TD.205 b
TD.206 c
TD.207 d
TD.208 b
TD.209 e
TD.210 b
TD.211 c
TD.212 b
TD.213 a
TD.214 a
TD.215 a
TD.216 d
TD.217 b
TD.218 c
TD.219 c
TD.220 e
TD.221 c
TD.222 a
TD.223 d
TD.224 c
TD.225 d
TD.226 b
TD.227 a
TD.228 c
TD.229 d
TD.230 d
TD.231 c
TD.232 a
TD.233 c
TD.234 c
TD.235 a
TD.236 c
TD.237 e
TD.238 d
TD.239 d
TD.240 d
TD.241 c
TD.242 b
TD.243 e
TD.244 d
TD.245 b
TD.246 c
TD.247 c
TD.248 c
TD.249 b
TD.250 d
TD.251 c
TD.252 c
TD.253 c
TD.254 d
TD.255 d
TD.256 d
TD.257 c
TD.258 b
TD.259 d
TD.260 e
TD.261 d
TD.262 b
TD.263 c
TD.264 c
TD.265 b
TD.266 e
TD.267 d
TD.268 d
TD.269 e
TD.270 c
TD.271 e
TD.272 b
TD.273 c
TD.274 b
TD.275 c
TD.276 a
TD.277 d
TD.278 c
TD.279 c
TD.280 c
TD.281 b
TD.282 d
TD.283 a
TD.284 b
TD.285 d
TD.286 a
TD.287 e
TD.288 a
TD.289 a
TD.290 b
TD.291 e
TD.292 c
TD.293 a
TD.294 e
TD.295 a
TD.296 b
TD.297 e
TD.298 c
TD.299 e
TD.300 d
TD.301 a
TD.302 d
TD.303 b
TD.304 b
TD.305 c
TD.306 c
TD.307 a
TD.308 b
TD.309 d
TD.310 c