Día 2: Coruñeses

Resumen del enunciado

Dado n, encuentra a y b tales que $a + b = n$ y a y b no tienen dígitos consecutivos iguales.

- *Autor: Félix Moreno Peñarrubia*

Solución:

- Si cambias los dígitos en la i-ésima posición de los dos números, la suma no cambia.
- Idea clave: si los pares de dígitos en cada posición son distintos, siempre se pueden hacer que no haya dos consecutivos iguales.
- Se itera posición por posición intentando conseguir la suma con dos dígitos distintos, y teniendo en cuenta las llevadas.

Día 2: Fichas

Resumen del enunciado

Juegas a un juego en un los vértices de un polígono de $n \leq 1000$ vértices en que cada ronda dices un número d, y tu rival se mueve d vértices en alguna de las dos direcciones. Tu objetivo es conseguir que repita una posición en como mucho 15 rondas

- *Autor: Darío Martínez Ramírez*

Solución:

- En el primer turno jugamos $d = \lfloor n/2 \rfloor$.
- A partir de este momento, vamos a mantener una posición tal que hay una casilla usada a distancia m en una dirección y otra a distancia m o $m+1$ en la otra (después del primer turno, $m = \lfloor n/2 \rfloor$.
- En cada turno, jugamos $d = \lceil m/2 \rceil$. Sin importar cuál de las dos direcciones elija, llegaremos a una posición con la misma propiedad con $m' = \lfloor m/2 \rfloor$
- Después de $\log_2 n$ turnos, llegamos a $m = 1$. Jugando $d = 1$ dos veces seguidas ganamos.
- La solución usa $\lceil \log_2 n \rceil + 2 \leq 12$ turnos.

Día 2: Bluff

Resumen del enunciado

Alex y Berta juegan con una string binaria, si hay un 1, Berta suma un punto, si hay un 0 Alex suma un punto, excepto si Alex gana de más de un punto, en ese caso Berta siempre suma un punto y Alex no. Calcular el número de subintervalos contiguos en los que Berta gana.

- *Autor: Elena V. R.*

Solución:

- Considereamos $DP[i]$ = Número de intervalos ganadores de la forma $[i, \cdot]$ y calculamos este DP desde el final de la string.
- Si $a_i = 1$, podemos calcular la suma de prefijos de a donde los 1's suma 1 y los 0's suman -1 y buscar el siguiente j tal que $suma\_prefijos[i-1] = suma\_prefijos[j]$, podemos ver que $dp[i] = dp[j+1] + j - i$ (con algunos detalles si $j = n$, si no existe tal j o si $i = 1$). Todo esto podemos hacerlo en $O(1)$.
- Si $a_i = 0$, podemos simular hasta que se rompa el patrón 00101010101... en $O(n)$ amortizado.

Día 2: Carreteras

Resumen del enunciado

Dado un grafo no dirigido, determinar el mínimo número de aristas que se deben añadir para que exista una orientación de las aristas que haga del grafo un único componente fuertemente conexo.

- *Autor: Roger Lidón Ardanuy*

Solución:

- Es posible orientar las aristas de un grafo para obtener un único componente fuertemente conexo si y solo si el grafo es 2-conexo (no contiene puentes o bridges).
- Reducimos el problema a un árbol agrupando cada componente 2-conexa del grafo original en un único nodo.
- La solución óptima es añadir $\lceil \frac{\#\text{hojas}}{2} \rceil$ aristas. Para ello:
    1. Elegimos como raíz del árbol cualquier nodo que no sea hoja.
    2. Realizamos un recorrido DFS (Euler Tour) para ordenar las hojas.
    3. Emparejamos la hoja i-ésima con la hoja $i + \lceil \frac{\#\text{hojas}}{2} \rceil$-ésima para añadir las aristas mínimas necesarias.

Día 2: Familia numerosa

Resumen del enunciado

n personas tienen que viajar de una ciudad A a una ciudad B, pero solo disponen de un único coche de k plazas, que tienen que traer de vuelta cada vez que llevan a B. La i-ésima persona puede conducir como mucho a_i veces. Determina si es posible que todos lleguen a B.

- *Autor: Darío Martínez Ramírez*

Solución:

- Sea $S = a_1 + \ldots + a_n$. Haremos como mucho $\lfloor S/2 \rfloor$ viajes de ida, llevando a k personas, y $\lfloor S/2 \rfloor - 1$ viajes de vuelta, que traerán una persona. Por tanto acabamos transportando a como mucho $t_{max} = k\lfloor S/2 \rfloor - (\lfloor S/2 \rfloor - 1)$ personas.
- Si $t_{max} < n$, es imposible. Si no, veremos que es posible de forma greedy.

Día 2: Familia numerosa

- Si quedan k o menos personas en A, las llevamos a todas a B y acabamos.
- Si hay alguna persona que aún puede conducir varias veces, hacemos que lleve a las $k-1$ personas a las que menos conducciones les quedan y vuelva solo.
- Si no, llevamos a dos personas a las que les queda una conducción, junto todas las personas que ya no pueden conducir que quepan en el coche. Uno de esos dos conducirá a la ida, y el otro volverá solo.
- Se puede comprobar que todos estos movimientos hacen que se mantenga la desigualdad $t_{max} \geq n$.